



**VALORIZACIÓN DE OPCIONES
REALES MULTIDIMENSIONALES
MEDIANTE SIMULACIÓN DE
MONTECARLO UTILIZANDO EL
ALGORITMO LSM.**

JORGE LUIS URZÚA VALDÉS

Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:

GONZALO CORTAZAR S.

Santiago de Chile, Mayo, 2004.



**VALORIZACIÓN DE OPCIONES REALES
MULTIDIMENSIONALES
MEDIANTE SIMULACIÓN DE
MONTECARLO UTILIZANDO EL
ALGORITMO LSM.**

JORGE LUIS URZÚA VALDÉS

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

AUGUSTO CASTILLO R.

GONZALO CORTAZAR S.

PETER KNIGHTS.

JORGE VERA A.

Para completar las exigencias del grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Mayo, 2004.

A mi señora Pascale y

A mis padres Tatiana y Luis

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer al profesor Gonzalo Cortazar por su constante guía y apoyo en el desarrollo de esta tesis. Sus orientaciones han sido el pilar de esta investigación y de mi formación profesional.

Quiero agradecer a mis compañeros de Magíster: Andrea, Eric y Javier por las inolvidables jornadas de trabajo. Un reconocimiento especial es para Lorenzo Naranjo y Miguel Gravet, compañeros y grandes investigadores, con los que hemos compartido enriquecedoras discusiones.

Se agradece el apoyo financiero del proyecto FONDEF I102400, FONDECYT y Fundación COPEC-UC.

Quiero agradecer a mi familia, por su incondicional cariño y apoyo, a mis padres Tatiana y Luis y a mis hermanos Renato, Gabriel y Tomás.

Finalmente, quiero agradecer a Pascale y a sus padres Ella y Sergio por su paciencia y comprensión, en todas las horas dedicadas a este trabajo.

INDICE GENERAL

	Pág.
DEDICATORIA	ii
AGRADECIMIENTOS	iii
INDICE DE TABLAS	ix
INDICE DE FIGURAS.....	xii
RESUMEN.....	xviii
ABSTRACT.....	xix
I INTRODUCCIÓN.....	1
II OPCIONES REALES Y EVALUACIÓN DE INVERSIONES EN RECURSOS NATURALES	6
2.1 Deficiencias del Valor Presente Neto	7
2.2 Tipos de Opciones Reales en la Literatura.....	7
2.3 Opciones Reales en Recursos Naturales y Valoración Neutral al Riesgo.....	11
III MÉTODOS DE EVALUACIÓN DE OPCIONES AMERICANAS Y ALGORITMO LSM	13
3.1 Evolución de metodologías de Valorización de Opciones.....	13
3.2 Descripción del Algoritmo LSM en Longstaff y Schwartz (2001).....	15
3.2.1 Valor Esperado de Continuar.....	16
3.2.2 Resolución Backward	17
3.2.3 Resolución Forward.....	19
3.3 Comparación de algoritmos para Opciones Americanas	20
3.3.1 Árboles Binomiales	21
3.3.2 Diferencias Finitas	23
3.3.3 Barraquand - Martineau.....	26
3.3.4 Algoritmo LSM	28

IV	MODELOS DE PRECIOS DE COMMODITIES Y VALORIZACIÓN DE ACTIVOS CONTINGENTES	31
4.1	Retorno por Conveniencia de un Commodity.....	33
4.2	Dinámica Ajustada por Riesgo para Procesos de Precios Commodities	34
4.3	Modelos Propuestos en la literatura para la dinámica del Precio de un Commodity.....	35
4.3.1	Modelo de Brennan y Schwartz (1985).....	35
4.3.2	Modelo 1 de Schwartz (1997).....	36
4.3.3	Modelo de Gibson y Schwartz (1990).....	36
4.3.4	Modelo 3 de Schwartz (1997).....	37
4.3.5	Modelo de Cortazar y Schwartz (2003).....	37
4.4	Momentos de las variables de estado para procesos de precios de Commodities	38
4.5	Valorización de Contratos Futuros sobre el precio de un Commodity	41
4.6	Valorización de Opciones Europeas sobre el precio Spot de un Commodity.....	42
V	ANÁLISIS DE BASES DE REGRESIÓN PARA PROCESOS DE PRECIOS DE COMMODITIES EN ALGORITMO LSM	44
5.1	Bases de Regresión en algoritmo LSM: Especificaciones y Notación	44
5.2	Opciones Europeas y Valor Esperado de Continuar.....	48
5.3	Descripción Función Esperanza Condicional	49
5.4	Ajuste de Funciones de Regresión a Opciones Europeas: Procedimiento	52
5.5	Resultados Ajuste Funciones de Regresión	56
5.5.1	Ajuste Funciones de Regresión en Modelo de Brennan y Schwartz (1985).....	57
5.5.2	Ajuste Funciones de Regresión en Modelo Gibson y Schwartz (1990).....	59
5.5.3	Ajuste Funciones de Regresión en Modelo de Cortazar y Schwartz (2003).....	64
VI	RESOLUCION DE LA OPCION DE INVERSION EN SCHWARTZ (1997) MEDIANTE LSM	70
6.1	Descripción Opción de Inversión en Schwartz (1997)	70

6.2	Resolución General de la Opción de Inversión en Schwartz (1997) mediante LSM.....	72
6.2.1	Implementación del Algoritmo: Resolución Backward.....	72
6.2.2	Implementación del Algoritmo: Resolución Forward.....	75
6.3	Opción de Inversión Perpetua: Evaluación Analítica en Modelo de Brennan y Schwartz (1985) y algoritmo LSM.....	76
6.4	Opción de Inversión a Plazo Fijo: Evaluación Diferencias Finitas Schwartz (1997) y algoritmo LSM.	80
6.4.1	Opción de Inversión Modelo 1 Factor: Schwartz (1997).....	80
6.4.2	Opción de Inversión Modelo 2 Factores: Gibson y Schwartz (1990)....	83
6.4.3	Opción de Inversión Modelo 3 Factores: Schwartz (1997)	90

VII	VALORIZACIÓN DE LA MINA DE COBRE EN BRENNAN Y SCHWARTZ (1985) PARA UN MODELO MULTIFACTORIAL DE PRECIOS MEDIANTE EL ALGORITMO LSM.	96
7.1	Mina de Brennan y Schwartz (1985) : Formulación Original	97
7.2	Implementación de la Mina de Brennan y Schwartz (1985) en Procesos Multifactoriales de Precios mediante el algoritmo LSM.....	100
7.2.1	Dimensiones de Estado del Problema.....	100
7.2.2	Flujos de caja en transiciones de estados.....	105
7.2.3	Implementación del Algoritmo LSM: Resolución Backward.....	106
7.2.4	Implementación del Algoritmo LSM: Resolución Forward	111
7.2.5	Política Óptima de Operación y Precios Críticos de Ejercicio	112
7.3	Implementación Mina de Brennan y Schwartz (1985) en el modelo multifactorial de Cortazar y Schwartz 2003	116
7.4	Resultados Implementación Mina de Brennan y Schwartz (1985) en el modelo multifactorial de Cortazar y Schwartz 2003.....	121
7.4.1	Validación Implementación de la Mina Brennan y Schwartz (1985) para el modelo de precios en Cortazar y Schwartz (2003)	121
7.4.2	Evaluación Histórica Mina de Brennan y Schwartz (1985) bajo el modelo de precios Cortazar y Schwartz (2003).	124
7.4.3	Sensibilidad en Variables de Estado Mina de Brennan y Schwartz (1985) bajo el modelo de precios Cortazar y Schwartz (2003).....	128
7.4.4	Variación Valor Mina en función del nivel de Inventario Inicial.	130

7.4.5 Evolución Valores Esperados de la Mina de Brennan y Schwartz (1985) en el modelo multifactorial de Cortazar y Schwartz 2003	131
7.4.6 Política Óptima de la Mina de Brennan y Schwartz (1985) en el modelo multifactorial de Cortazar y Schwartz (2003).....	134
VIII CONCLUSIONES.....	141
BIBLIOGRAFÍA.....	143
A N E X O S.....	150
ANEXO A : DINÁMICA AJUSTADA POR RIESGO Y PORTAFOLIO LIBRE DE RIESGO	151
A.1 Portafolio Libre de Riesgo en Subyacentes Transables.....	151
A.2 Portafolio Libre de Riesgo en Subyacentes No Transables: Precio de Mercado del Riesgo	152
A.3 Ecuación Diferencial Parcial para el Equilibrio General de Activos.....	154
ANEXO B : DISTRIBUCIONES PARA PROCESOS DE PRECIOS DE COMMODITIES.....	157
B.1 Solución General de la Ecuación Diferencial Estocástica Lineal a Coeficientes Constantes	157
B.2 Cálculo de Momentos para Modelos de Precios de Commodities.....	157
B.2.1 Modelo de Brennan y Schwartz (1985).....	158
B.2.2 Modelo 1 de Schwartz (1997).....	158
B.2.3 Modelo Gibson y Schwartz (1990).....	159
B.2.4 Modelo Cortazar y Schwartz (2003).....	161
B.2.5 Modelo 3 Schwartz (1997)	163
ANEXO C : VALORIZACIÓN DE OPCIONES EUROPEAS SOBRE EL PRECIO SPOT DE COMMODITIES	165
C.1 Resultado General.....	165
C.2 Aplicación a Opciones sobre el spot de Commodities.....	166
ANEXO D : SIMULACIÓN DE MONTECARLO.....	167
D.1 Aspectos Técnicos de la Simulación de Montecarlo	168

ANEXO E: FUNCIONES BASES REGRESIONES	169
E.1 Bases Polinomiales en la forma de Rodrigues	169
E.2 Bases Polinomiales en forma Recursiva	170
E.3 Gráficos formas Polinomiales	171

INDICE DE TABLAS

	Pág.
Tabla IV-1: Valor esperado del logaritmo del precio spot en modelos de commodities.....	39
Tabla IV-2: Varianza del logaritmo del precio spot en modelos de commodities.....	40
Tabla V-1: Parámetros utilizados en el análisis de bases en modelo de Brennan y Schwartz (1985).....	57
Tabla V-2: Parámetros utilizados en el análisis de bases en modelo de Gibson y Schwartz (1990).....	59
Tabla V-3: Variables de estado utilizadas en el análisis de bases en modelo de Gibson y Schwartz (1990).....	60
Tabla V-4: Parámetros utilizados en el análisis de bases en modelo de Cortazar y Schwartz (2003).....	64
Tabla V-5: Variables de estado utilizadas en el análisis de bases en modelo de Cortazar y Schwartz (2003).....	65
Tabla VI-1: Comparación solución analítica de la opción de inversión en Schwartz (1997) y solución algoritmo LSM en el modelo de precios de Brennan y Schwartz (1985), orden máximo 3 en función de regresión potencias contratos futuros 30.000 simulaciones, 30 años plazo.	79
Tabla VI-2: Error cuadrático medio porcentual en solución opción de inversión Schwartz (1997) por medio del algoritmo LSM en el modelo de precios de Brennan y Schwartz (1985) en función del número de simulaciones y orden máximo función de regresión potencias contratos futuros. Evaluación obtenida para 30 años plazo.....	80
Tabla VI-3: Parámetros proceso de precio spot cobre modelo 1 Schwartz (1997) para implementación opción inversión.....	81

Tabla VI-4: Evaluaciones opción de inversión Schwartz (1997) por medio del algoritmo LSM en el modelo de precios de Brennan y Schwartz (1985) en función del número de simulaciones y orden máximo función de regresión potencias contratos futuros. Evaluación obtenida para 10 años de simulaciones, solución original Schwartz (1997) 1,23 US\$.....	83
Tabla VI-5: Comparación solución de la opción de inversión en Schwartz (1997) y solución según algoritmo LSM para precio spot 0,5 US\$/lb en el modelo de Gibson y Schwartz utilizando 10.000 simulaciones en función del retorno por conveniencia y orden máximo función de regresión potencias contratos futuros	88
Tabla VI-6: Comparación solución de la opción de inversión en Schwartz (1997) y solución según algoritmo LSM para precio spot 0,5 US\$/lb en el modelo de Gibson y Schwartz utilizando 20.000 simulaciones en función del retorno por conveniencia y orden máximo función de regresión potencias contratos futuros	88
Tabla VI-8: Parámetros modelo 3 Schwartz (1997) utilizados en la valorización de la opción de inversión.	91
Tabla VI-9: Comparación solución de la opción de inversión en Schwartz (1997) y solución según algoritmo LSM para precio spot 0,5 US\$/lb y retorno por conveniencia 0,1 en el modelo 3 de Schwartz (1997) utilizando 10.000 simulaciones en función de la tasa de interés y orden máximo función de regresión potencias contratos futuros	92
Tabla VII-1: Parámetros operativos y estructura tributaria de la mina del ejemplo propuesto en Brennan y Schwartz (1985).....	116
Tabla VII-2: Parámetros utilizados en la valorización de la mina de Brennan y Schwartz (1985) bajo el modelo de Cortazar y Schwartz (2003).....	117
Tabla VII-3: Parámetros técnicos algoritmo LSM implementación mina de Brennan y Schwartz (1985) en modelo de Cortazar y Schwartz (2003).....	120

Tabla VII-4: Parámetros y variables de estado para validación implementación programa mina Brennan y Schwartz (1985) utilizando el proceso de precios Cortazar y Schwartz (2003)	122
Tabla VII-5: Comparación solución mina Brennan Schwartz (1985) utilizando diferencias finitas y evaluación con parámetros modificados Cortazar y Schwartz (2003) a través del algoritmo LSM.	123
Tabla VII-6: Variables de estado modelo de Cortazar y Schwartz (2003) para 14 de Enero de 1999.....	126
Tabla B-1: Equivalencia de variables de estado entre el modelo Schwartz (1997) y modelo de Cortazar y Schwartz (2003).....	163
Tabla B-2: Equivalencia de parámetros entre el modelo Schwartz (1997) y modelo de Cortazar y Schwartz (2003).....	164
Tabla E-1: Funciones base en fórmula de Rodrigues.	169
Tabla E-2: Funciones base en forma recursiva.	170

INDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 3-1: Definición del dominio de solución para una opción americana, en el esquema numérico de árbol binomial Cox et al. (1979)	22
Figura 3-2: Definición del dominio de solución para una opción americana en diferencias finitas propuesto en Brennan y Schwartz (1977)	24
Figura 3-3: Definición del dominio de solución para una opción americana, en el esquema numérico de Barraquand y Martineau (1995)	27
Figura 3-4: Definición del dominio de solución para una opción americana, en el esquema numérico de Longstaff y Schwartz (2001).....	29
Figura 4-1: Series de precios de contratos futuros a un mes plazo y dos años plazo, para el periodo 1995-2003.....	32
Figura 4-2: Ejemplos de estructuras temporales de precios de contratos futuros de cobre, creciente (contango), decreciente (normal backwardation) y plana.....	33
Figura 5-1: Crecimiento número de funciones de regresión en función del orden máximo de la base y las dimensiones subyacentes de la opción en propuesta original algoritmo LSM.	46
Figura 5-2: Funciones de Continuación en resolución opción americana sobre el precio spot 1 factor estocástico modelo Brennan y Schwartz (1985) mediante diferencias finitas implícitas. Plazo de la opción al vencimiento 1 año y precio de ejercicio 0,4 dólares. Parámetros proceso de precios $r = 2\%$, $\delta = 1\%$ y $\sigma = 24\%$	50
Figura 5-3: Funciones de Continuación mínimos cuadrados en resolución opción americana sobre el precio modelo Brennan y Schwartz (1985) mediante algoritmo LSM. Precio de ejercicio 0,4 dólares. Parámetros proceso de precios $r = 2\%$, $\delta = 1\%$ y $\sigma = 24\%$	51

Figura 5-4: Esquema gráfico del procedimiento de ajuste funciones de continuación en algoritmo LSM a opciones europeas.	54
Figura 5-5: Esquema cálculo ajuste función de transición a opciones europeas.	55
Figura 5-6: Comparación error de ajuste función de continuación en modelo de 1 factor Brennan y Schwartz (1985) en función del orden máximo de la base para las funciones potencias ($P_n(x)$), Legendre ($Le_n(x)$), Laguerre ($La_n(x)$), Hermite ($H_n(x)$), Chebyshev ($C_n(x)$) y contratos futuros ($F_n(x, \Delta t)$).	58
Figura 5-7: Comparación error de ajuste función de continuación en modelo de 2 factores Gibson y Schwartz (1990) en función del orden máximo de la base para las funciones potencias, Legendre, Laguerre, Hermite, Chebyshev. El incluir productos cruzados se indica por la letra c.	61
Figura 5-8: Comparación error de ajuste función de continuación en modelo de 2 factores Gibson y Schwartz (1990) en función del orden máximo de la base para polinomios de Chebyshev con productos cruzados y potencias de contratos futuros teóricos.	62
Figura 5-9: Comparación error de ajuste función de continuación en modelo de 2 factores Gibson y Schwartz (1990) en función del número de regresores presentes en la base para las funciones Chebyshev (con productos cruzados) y potencias de contratos futuros.	63
Figura 5-10: Comparación error de ajuste función de continuación en modelo de 3 factores Cortazar y Schwartz (2003) en función del orden máximo de la base para las funciones potencias, Legendre, Laguerre, Hermite, Chebyshev. El incluir productos cruzados se indica por la letra c.	67
Figura 5-11: Comparación error de ajuste función de continuación en modelo de 3 factores Cortazar y Schwartz (2003) en función del orden máximo de la base para los polinomios de Chebyshev con productos cruzados y potencias de contratos futuros evaluados en cada trayectoria.	68
Figura 5-12: Comparación error de ajuste función de continuación en modelo de 3 factores Cortazar y Schwartz (2003) en función del número de regresores	

presentes en la base para las funciones Chebyshev (con productos cruzados) y potencias de contratos futuros.....	68
Figura 6-1: Valor de la opción de inversión en Schwartz (1997) y valor presente sin opción de postergación, considerando un tiempo de concesión infinito y el modelo del precio spot de Brennan y Schwartz (1985).	77
Figura 6-2: Comparación solución analítica de la opción de inversión en Schwartz (1997) y solución algoritmo LSM en el modelo de precios de Brennan y Schwartz (1985), orden máximo 3 en función de regresión potencias contratos futuros 30.000 simulaciones, 30 años plazo.	78
Figura 6-3: Valor Opción de inversión algoritmo LSM y valor presente neto sin opción de postergar inversión en el Modelo 1 de Schwartz (1997). Solución con un plazo de concesión de 10 años, 20.000 simulaciones y las tres primeras potencias de contratos futuros.....	82
Figura 6-4: Valor Opción de inversión algoritmo LSM y valor presente neto sin opción de postergar en el Modelo de Gibson y Schwartz (1990).	84
Figura 6-5: Frontera crítica Opción de inversión algoritmo LSM Modelo de Gibson y Schwartz (1990).....	85
Figura 6-6: Curvas de nivel para δ constante en valor opción de inversión algoritmo LSM y valor presente neto sin opción de postergación: Modelo de Gibson y Schwartz.	86
Figura 6-7: Curvas de nivel para precio spot constante en valor opción de inversión algoritmo LSM y valor presente neto sin opción de postergación: Modelo de Gibson y Schwartz.	87
Figura 6-8: Curvas de nivel para retorno por conveniencia y la tasa de interés constante en valor opción de inversión algoritmo LSM y valor presente neto sin postergación: Modelo 3 Schwartz (1997).	94

Figura 6-9: Curvas de nivel para precio spot y tasa de interés constante en valor opción de inversión algoritmo LSM y valor presente neto sin postergación: Modelo 3 Schwartz (1997).	95
Figura 7-2: Posibles estados de reservas a través de las oportunidades de ejercicio para mina de Brennan y Schwartz (1985).	102
Figura 7-3: Posibles estados operacionales a través de las oportunidades de ejercicio para mina de Brennan y Schwartz (1985).	102
Figura 7-4: Trayectorias del proceso de precios multifactorial a través de las oportunidades de ejercicio.	103
Figura 7-6: Ilustración funciones del valor mina abierta o cerrada precios críticos de ejercicio mina de Brennan y Schwartz (1985)	113
Figura 7-7: Evolución de variable de estado precio spot, en modelo de Cortazar y Schwartz (2003).	118
Figura 7-8: Evolución de variable de estado, desviación de corto plazo (y) en modelo de Cortazar y Schwartz (2003).	118
Figura 7-9: Evolución de variable de estado, retorno de largo plazo (v) en modelo de Cortazar y Schwartz (2003).	119
Figura 7-10: Evolución histórica mina de Brennan y Schwartz (1985) bajo el modelo de Cortazar y Schwartz (2003) considerando 30 años de operaciones y 10.000 simulaciones.	124
Figura 7-11: Evolución histórica valor opción y precio spot en decimales de dólar mina de Brennan y Schwartz (1985) bajo el modelo de Cortazar y Schwartz (2003) considerando 30 años de operaciones y 10.000 simulaciones.	125
Figura 7-13: Evaluación mina y valor presente en proceso Cortazar y Schwartz (2003). Considerando $\nu = -0,1$, $y = 0,01$	128

Figura 7-14: Evaluación mina y valor presente en proceso Cortazar y Schwartz (2003), con respecto a las al retorno de corto plazo ν . Considerando $S = 0,4, \nu = 0,3$	129
La última variable que queda por analizar es el retorno de largo plazo ν . En el siguiente gráfico es posible apreciar la variación del valor de la mina y el valor presente neto, con respecto al retorno de largo plazo. Se dejaron fijos los valores del precio spot ($S = 0,4$) y la desviación de corto plazo ($y = -0,26$):	129
Figura 7-15: Evaluación mina y valor presente en proceso Cortazar y Schwartz (2003), con respecto a al retorno de largo plazo ν considerando $S = 0,4, y = -0,26$	130
Figura 7-16: Valor Opción mina Brennan y Schawartz (1985) porcentual al valor sin opciones versus inventario inicial.	131
Figura 7-17: Evolución del valor esperado de una mina abierta, que cuenta con 150 y 75 MM de toneladas de reservas, en las variables de estado son $S = 0,9$ US\$/lb., $y = 0, \nu = 0$	132
Figura 7-18: Evolución del valor esperado de una mina abierta para un inventario de 150 MM de toneladas. Para precios spot de $S = 0,5$ y $S = 0,9$ US\$/lb. Considerando $\nu = 0, y = 0$	132
Figura 7-19: Evolución del valor esperado de una mina abierta para un inventario de 150 MM de toneladas. Retorno de largo plazo en los niveles de $\nu = -0,15$ o $\nu = 0,5$, considerando un precio spot $S = 0,9$ US\$/lb., $y = 0$	133
Figura 7-20: Evolución del valor esperado de una mina abierta para un inventario de 150 MM de toneladas. Desviaciones de corto plazo en los niveles de $y = 0,5$ o $y = -0,25$, considerando un precio spot $S = 0,9$ US\$/lb., $\nu = 0$	133
Figura 7-21: Política óptima problema original mina Brennan y Schwartz (1985), resuelto mediante diferencias finitas.	135

Figura 7-22: Precios de abandono en función de la reservas para distintos valores de la desviación de corto plazo en los niveles de $y = -0,15$ $y = 0,15$, $y = 0,5$, considerando $\nu = 0$.	136
Figura 7-23: Precios de cierre en función de la reservas para distintos valores de la desviación de corto plazo en los niveles de $y = -0,15$ $y = 0,15$, $y = 0,5$, considerando $\nu = 0$.	136
Figura 7-24: Precios de apertura en función de la reservas para distintos valores de la desviación de corto plazo en los niveles de $y = -0,15$ $y = 0,15$, $y = 0,5$, considerando $\nu = 0$.	137
Figura 7-25: Precios de abandono en función de la reservas para distintos valores del retorno de largo plazo en los niveles de $\nu = -0,3$, $\nu = 0$, $\nu = 0,3$. Considerando desviación de corto plazo $y = 0$.	138
Figura 7-26: Precios de cierre en función de la reservas para distintos valores del retorno de largo plazo en los niveles de $\nu = -0,3$, $\nu = 0$, $\nu = 0,3$, considerando desviación de corto plazo $y = 0$.	138
Figura 7-27: Precios de apertura en función de la reservas para distintos valores del retorno de largo plazo en los niveles de $\nu = -0,3$, $\nu = 0$, $\nu = 0,3$, considerando desviación de corto plazo $y = 0$.	139
Figura E-1: Polinomios Hermite.	171
Figura E-2: Polinomios Chebyshev.	172

RESUMEN

En la presente tesis se analiza la aplicación del algoritmo LSM para la evaluación de opciones reales de tipo americano multidimensionales, que surgen al considerar proyectos con opciones interrelacionadas y modelos de precios con especificaciones multifactoriales.

Para validar las implementaciones propuestas se estudia el comportamiento del algoritmo en dos problemas con solución conocida. El primer problema abordado es el ajuste de las funciones de regresión del algoritmo LSM a las expresiones analíticas de valorización de opciones europeas del precio spot de un commodity. Utilizando la relación entre el valor esperado de continuar y el valor analítico de una opción europea se logra medir el ajuste de distintas funciones de regresión en el algoritmo LSM.

La segunda validación para una implementación general del algoritmo LSM para opciones multidimensionales se realiza comparando las soluciones de diferencias finitas de la opción de inversión descrita por Schwartz (1997) con las evaluaciones a través del algoritmo LSM.

En base a las dos validaciones presentadas se extiende el trabajo realizado por Gravet (2003) resolviendo la evaluación de la mina de cobre de Brennan y Schwartz (1985) en un modelo multifactorial de precios. Esta evaluación incorpora las opciones de apertura, cierre y abandono de las operaciones. La implementación es ilustrada utilizando el modelo de precios descrito en Cortazar y Schwartz (2003), que explica la dinámica del precio spot del cobre, mediante un proceso de tres factores estocásticos. Este problema no ha sido resuelto mediante algoritmos tradicionales para opciones americanas por su alta complejidad.

Los resultados presentados en esta investigación apoyan la utilización del algoritmo LSM para la valorización y obtención de la política óptima de ejercicio de opciones complejas multidimensionales de manera general y flexible.

ABSTRACT

In this thesis we study the general application of the Least Squares Montecarlo Method in Longstaff and Schwartz (2001) for the evaluation of american style Real Options in a multi-dimensional setting, that are present in projects with interacting options and multifactor stochastic price models.

We present two validation studies of the behavior of the algorithm in problems with known results. In first place, we analyze the valuation of european options with analytical expressions testing the conditional expectation function through the LSM algorithm. In the second study we compare the valuation using LSM algorithm of the investment option presented in Schwartz (1997) with finite differences methods.

Given the results in the validation studies we show a general implementation of the LSM algorithm in the evaluation of the cooper mine in Brennan and Schwartz (1985) under a multifactor spot price cooper model. This mine includes the options to open, close or abandon the operations in any date. The problem is illustrated using the three factor model in Cortazar and Schwartz (2003) where we simultaneously obtain the value and optimal operation policy of the mine. Traditional methods of evaluation i.e. finite differences are unlikely to resolve this kind of problems because of the fast grow in complexity.

The results presented in this thesis support the use of the LSM algorithm in Real Options problems in multifactor setting with american style exercise features, in a general and flexible way.

I INTRODUCCIÓN

La alta volatilidad presente en los mercados financieros y en especial en el de recursos naturales, ha forzado un enorme desarrollo de herramientas que la modelen. El continuo flujo de información desde y hacia los mercados financieros, desata perturbaciones inciertas en los niveles y estructuras de los precios de commodities, monedas y bonos. El comportamiento aleatorio o estocástico de estas variables ha motivado fecundas áreas de investigación a partir del trabajo fundacional de Black y Scholes (1973). En particular, el estudio del comportamiento estocástico de precios de commodities, como cobre y petróleo, tiene una gran relevancia debido al impacto de estos precios en la economía mundial.

La evidencia presentada en la literatura muestra que las suposiciones iniciales del comportamiento de los precios de commodities no son adecuadas. Por ejemplo, Tourinho (1979), Pindyck (1980), Brennan y Schwartz (1985) asumen que el precio spot del commodity sigue un proceso browniano geométrico (un factor estocástico). Sin embargo, como indica Schwartz (1997), este supuesto no incorpora la reversión a la media de largo plazo que exhiben los precios de ciertos commodities. Lo anterior se debe a que al elevarse los precios de un commodity -como el cobre- se generará una mayor oferta, al ingresar yacimientos con mayores costos de producción. Junto al aumento en la oferta se encuentra un efecto de sustitución del commodity, los que en conjunto generan una fuerza a la baja en los precios. Los efectos contrarios se generan al disminuir los niveles de precios.

Como indican Gibson y Schwartz (1990) y Brennan (1991) al modelar los precios de commodities a través de procesos con reversión multifactoriales, se obtienen valorizaciones más precisas de contratos futuros y propiedades dinámicas que representan de mejor forma sus volatilidades. La evidencia del comportamiento multifactorial de los precios del cobre está indicada en Cortazar y Schwartz (1994), que al realizar un estudio de componentes principales para el cobre, demuestran que la varianza de los precios es explicada por 3 factores estocásticos ortogonales.

Recientes investigaciones en modelos multifactoriales para el caso del petróleo como Cortazar y Schwartz (2003) y Cortazar y Naranjo (2003), entregan excelentes resultados de calibración en modelos de tres y cuatro factores estocásticos respectivamente, logrando ajustar correctamente la estructura temporal de precios de

contratos futuros de petróleo y las volatilidades históricas. Otros trabajos que modelan los precios de commodities mediante procesos multifactoriales son Sørensen (2002) y Casassus y Collin-Dufresne (2001).

Los modelos estocásticos de precios tienen profundas implicancias para la valorización de activos contingentes. La teoría de derivados establece, de manera precisa, las herramientas de análisis necesarias para la evaluación de proyectos e instrumentos financieros que dependen de precios de commodities y otras variables estocásticas. En un sobresaliente trabajo Brennan y Schwartz (1985) establecen los fundamentos para la aplicación de la teoría de derivados a la evaluación de proyectos, más conocida como teoría de Opciones Reales. Las opciones reales reconocen la semejanza entre los flujos de caja de las opciones financieras y los proyectos de inversión con flexibilidades.

El análisis de opciones reales está estrechamente relacionado a los avances de la teoría de opciones. Sin embargo, los niveles de complejidad que pueden alcanzar los problemas de opciones reales son, en general, superiores a los de opciones financieras. Por ejemplo, una mina de cobre puede ser analizada como una secuencia de opciones sobre opciones u opciones compuestas, en donde existen etapas de exploración de las reservas, etapas de inversión, explotación y abandono de las faenas como se expone en Cortazar et al. (2001). Un problema de opciones reales puede contener variadas fuentes de incertidumbre o variables estocásticas como costos, precios y tasas de interés. Al mismo tiempo, puede evaluarse en múltiples dimensiones: niveles de inventario, fases de desarrollo y además, tener la flexibilidad de ejercer las opciones en cualquier instante del tiempo, lo que implica, un derecho de ejercicio de las opciones de tipo americano.

Los métodos de evaluación de opciones reales están directamente relacionados con los disponibles para opciones financieras. La evolución de los métodos de resolución parte con soluciones analíticas como aquellas propuestas en Black y Scholes (1973) y en Merton (1976). Los métodos de diferencias finitas son introducidos por Brennan y Schwartz (1977) para problemas de dimensión temporal y una dimensión espacial. Un enfoque simplificado para la evaluación de opciones fue desarrollado por Cox et al. (1979) a través de los árboles binomiales. A pesar de la capacidad de los métodos anteriores para valorizar activos de tipo americano en una dimensión, la literatura enfatiza en el explosivo aumento de la complejidad de resolución al agregar dimensiones al problema, lo que se denomina “maldición de la dimensionalidad”. Una alternativa poderosa para problemas

multidimensionales, son los métodos de simulación de montecarlo introducidos por Boyle (1977).

Se ha establecido que los problemas de opciones reales surgen de la necesidad de evaluar proyectos con flexibilidades sometidos a incertidumbre, por ejemplo en los precios de commodities o tasas de interés. Estas variables han sido correctamente modeladas a través de procesos multifactoriales los que restringen la aplicación de los métodos tradicionales de evaluación de opciones, como las diferencias finitas, al crecer la complejidad de su implementación. Por ejemplo, para evaluar la mina de cobre de Brennan y Schwartz (1985), considerando un modelo del precio spot del cobre con tres factores estocásticos es necesario implementar la solución de un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden en cinco dimensiones, con condiciones de borde de tipo frontera libre¹. El problema anterior impone fuertes limitantes prácticas a una resolución tradicional (diferencias finitas o árboles binomiales) debido a la compleja implementación y elevado esfuerzo computacional, lo que ha motivado la búsqueda de algoritmos alternativos para enfrentar este tipo de evaluaciones.

La simulación de montecarlo para la resolución de opciones americanas en múltiples dimensiones, se ha desarrollado con los trabajos de Barraquand y Martineau (1995) , Raymar y Zwecher (1997) y Broadie y Glasserman (1997c). Estos han sido empleados en la evaluación de opciones reales en los trabajos de Acosta (1999), Osorio (1999), Cortazar y Schwartz (1998), Castillo (1999) y Cortazar (2001), sin embargo, su implementación presenta desventajas en la obtención de ciertos indicadores como la política óptima de ejercicio y su tiempo de ejecución puede ser extenso en algunos problemas de opciones reales.

Un nuevo algoritmo denominado “Least Squares Montecarlo” (LSM) para la resolución de opciones americanas multidimensionales, propuesto en Longstaff y Schwartz (2001), ha generado un elevado interés en la literatura². El algoritmo utiliza la información

¹ La condición de frontera libre surge de las características de ejercicio americano de las opciones reales consideradas.

² Algunos artículos que analizan o implementan el algoritmo LSM son Moreno y Navas (2003), Hsu y Schwartz (2003), Stentoft (2001), Clement et al. (2002) y Longstaff et al. (2001)

de panel de las simulaciones para estimar la función de continuación de la opción americana, a través de una regresión de mínimos cuadrados.

Gravet (2003) demuestra la convergencia del algoritmo LSM para dos problemas de opciones reales. El primer activo evaluado por el autor corresponde a la opción de inversión en una concesión petrolera presentado en el artículo de Cortazar y Schwartz (1998) e implementado a través del algoritmo de Barraquand y Martineau (1995). El segundo problema resuelto por Gravet (2003) mediante el algoritmo LSM, corresponde a la mina de cobre en Brennan y Schwartz (1985) evaluada por diferencias finitas.

El objetivo principal de esta tesis es la extensión y análisis del trabajo realizado por Gravet (2003) en la aplicación del algoritmo LSM en problemas de opciones reales considerando modelos multifactoriales de precios, para encontrar una implementación general y flexible de la mina de cobre de Brennan y Schwartz (1985), uno de los problemas de Opciones Reales más exigentes del área.

Los objetivos específicos se detallan en los siguientes párrafos.

El primer objetivo de esta investigación es establecer la relación del algoritmo LSM con otros algoritmos de evaluación de opciones americanas. Lo anterior es logrado en respuesta a la aparente disociación en la literatura de los métodos de resolución de opciones americanas. El desarrollo de las relaciones entre los algoritmos de evaluación se encuentra en el capítulo 2.

La principal dificultad en la aplicación del algoritmo LSM con múltiples variables de estado es el crecimiento exponencial del número de funciones de regresión y sus posibles combinaciones. Como indican Moreno y Navas (2001) la especificación de las funciones de regresión en opciones de una variable de estado es simple y el algoritmo LSM es robusto si se modifica la forma funcional de regresión. Sin embargo, al considerar opciones en múltiples variables de estado la función de regresión tiene un crecimiento exponencial en el número de términos lo que hace necesario encontrar formas más compactas para su representación. A pesar de los ejemplos de aplicación del método Longstaff y Schwartz (2001), los autores no entregan pautas sobre la forma en que se deberían encontrar las funciones de regresión para evaluar activos sin soluciones conocidas.

El segundo objetivo de esta tesis es abordar el problema de identificación de funciones de regresión realizando dos análisis de comparación. El primer análisis, desarrollado en el capítulo 5, compara la solución analítica de una opción europea sobre el precio spot y su solución mediante el algoritmo LSM utilizando distintas funciones de regresión para aproximar la función de esperanza condicional de una opción americana. El segundo análisis, desarrollado en el capítulo 6, compara las soluciones de la opción de inversión evaluado en Schwartz (1997) mediante fórmulas analíticas y diferencias finitas con la evaluación mediante el algoritmo LSM. En base a los dos análisis de comparación se construye una especificación simple de funciones de regresión formada por contratos futuros del precio spot, que pueda ser utilizada en evaluaciones más complejas.

En base a los resultados de los capítulos 5 y 6, se implementa el algoritmo LSM a la mina de cobre de Brennan y Schwartz (1985) suponiendo que el precio spot está definido por un proceso multifactorial. Como se mencionó anteriormente este problema representa una fuerte prueba para cualquier algoritmo de evaluación de opciones. El problema implementado no cuenta con solución conocida por lo que se realizan experimentos de validación.

Los próximos capítulos se organizan de la siguiente forma. En el capítulo 2 se describe el enfoque de las opciones reales, concentrándose en las flexibilidades de los proyectos de inversión, se destaca su rol en inversiones de recursos naturales y los fundamentos teóricos de la evaluación de activos contingentes. El capítulo 3 describe y analiza algunos métodos tradicionales de evaluación de opciones americanas y su relación con el algoritmo LSM. El capítulo 4, analiza distintas especificaciones de procesos de precios de commodities, incluyendo a los multifactoriales obteniendo las expresiones analíticas para los momentos de las variables de estado y las fórmulas de valorización de contratos futuros y opciones europeas escritas sobre el precio spot. En el capítulo 5, se compara la valorización analítica de opciones europeas con la del algoritmo LSM y se analiza el comportamiento de las funciones de continuación de opciones americanas. En el capítulo 6, se implementa el problema de inversión descrito en Schwartz (1997) utilizando el algoritmo LSM y se comparan los resultados con las soluciones del método de diferencias finitas. En el capítulo 7 se implementa la mina de Brennan y Schwartz (1985) utilizando procesos multifactoriales, la implementación es ilustrada con el proceso de tres factores del precio spot en Cortazar y Schwartz (2003). El capítulo 8 concluye.

II OPCIONES REALES Y EVALUACIÓN DE INVERSIONES EN RECURSOS NATURALES

En este capítulo se explican las principales características de la teoría de opciones reales indicando sus fundamentos como alternativa al valor presente neto, los distintos tipos de opciones reales o flexibilidades en la literatura y los fundamentos teóricos en su análisis.

La aplicación de la teoría de opciones para evaluar proyectos de inversión tiene su origen en tres aspectos. En primer lugar, la creciente incertidumbre en variables críticas para el desempeño de los proyectos como precios de productos, materias primas y niveles de tasas de interés. En segundo lugar, la identificación de distintas flexibilidades disponibles en la gestión de proyectos, que permiten modificar la operación en el tiempo aprovechando escenarios positivos y limitando los efectos de escenarios negativos. Finalmente, las deficiencias de las herramientas tradicionales de evaluación como el Valor Presente Neto para la modelación de la incertidumbre y flexibilidad, hacen de la teoría de activos contingentes y opciones reales una alternativa muy atractiva para la evaluación de inversiones.

Los tipos de flexibilidades que dan origen a las opciones reales incluyen en las diferentes etapas del proyecto, la opción de invertir en el momento óptimo, la opción de detener y reanudar la producción en respuesta al nivel de precios, la opción de abandonar el proyecto y la opción de expandir o contraer la escala de producción.

Las opciones presentes en los proyectos de inversión comparten las definiciones de las opciones financieras. Una característica principal en una opción es el momento en que ellas pueden ejercerse. Una opción de tipo europeo sólo puede ser ejercida al vencimiento del contrato, una opción americana puede ejercerse en cualquier instante entre el inicio y el vencimiento del contrato, una opción de tipo bermudiano puede ejercerse en ciertos instantes del tiempo. La clasificación de opciones de acuerdo a los momentos de ejercicio es crítica al plantear un algoritmo de valorización, en el caso de opciones reales la gran mayoría de las investigaciones abordan problemas de tipo americano o bermudiano, aspecto que se aborda en detalle en el próximo capítulo.

La tendencia actual de las investigaciones en opciones reales y en particular el análisis de inversiones en recursos naturales ha transitado hacia una modelación cada vez

más compleja de los proyectos, incorporando múltiples flexibilidades y fuentes de incertidumbre. En el capítulo cuatro de la presente investigación se presentan los modelos que se han utilizado en la caracterización de los precios de commodities, los que han tenido un gran desarrollo incorporando mayores dimensiones (factores) en su especificación.

En lo que sigue de este capítulo se realiza una descripción de las dificultades del valor presente neto, para evaluar inversiones flexibles bajo incertidumbre. En segundo lugar, se reseña los tipos de opciones reales analizadas en la literatura y finalmente se realiza un análisis de inversiones en recursos naturales que agrupan las dos implementaciones de opciones reales en los capítulos cinco y seis.

2.1 Deficiencias del Valor Presente Neto

Los fundamentos del Valor Presente Neto (VPN) requieren para su aplicación dos variables fundamentales. En primer lugar, requieren estimar los flujos de caja netos y, en segundo lugar, estimar la tasa de descuento apropiada según el riesgo no diversificable del proyecto.

Las deficiencias del VPN están presentes tanto en los flujos esperados, como en la tasa de descuento. Al reemplazar los flujos de caja netos por su valor esperado, se utiliza un enfoque estático de evaluación en el cual el gerente no toma decisiones intermedias durante la realización del proyecto. Por ejemplo, el gerente de una mina de cobre puede alterar el nivel de producción, en respuesta a los cambios de precios.

Generalmente, la tasa de descuento se asume constante durante la vida del proyecto, ignorando los posibles cambios en el perfil de riesgo del proyecto en el tiempo. Finalmente, la dificultad de estimar el premio por riesgo adecuado para proyectos con alta incertidumbre, impone un problema adicional para la evaluación mediante el Valor Presente Neto. En Cortazar (1999), pueden encontrarse mayores detalles sobre los problemas del Valor Presente Neto para la evaluación de recursos naturales.

2.2 Tipos de Opciones Reales en la Literatura

A continuación se presenta una clasificación de variados tipos de opciones reales, con una breve descripción y algunos artículos que abordan cada flexibilidad. Para

una exhaustiva revisión de los avances en opciones reales se recomienda Schwartz y Trigeorgis (2001).

- Opción de Diferir

La gerencia tiene una concesión de explotación de un recurso por un periodo fijo de años, teniendo la opción de desarrollar o no el proyecto de acuerdo al precio del recurso a explotar. Ejemplos de este tipo de opciones se encuentran en la extracción de recursos naturales y el desarrollo inmobiliario. Algunos artículos que abordan la opción de diferir o posponer son Tourinho (1979) que analiza el valor opción de una reserva de recursos naturales, Titman (1985) aborda la valorización de terrenos urbanos, McDonald y Siegel (1986) examinan la opción de esperar para invertir, Paddock et al. (1988) evalúan la opción presente en concesiones petroleras, Ingersoll y Ross (1992) analizan el efecto de tasas de interés estocásticas en la opción de posponer una inversión, Schwartz (1997) evalúa un yacimiento minero que puede iniciar su producción en cualquier instante, Cortazar y Schwartz (1998) valorizan la opción de diferir una explotación petrolera.

- Opción Secuencial

Cada etapa de un proyecto o proceso puede verse como una opción sobre el valor de la siguiente. Ejemplos de opciones secuenciales están presentes en industrias con altos niveles de investigación y desarrollo, como la industria farmacéutica, proyectos con grandes niveles de inversión inicial, como construcción a gran escala o plantas de energía eléctrica. Artículos que abordan este problema son Majd y Pindyck (1987) abordan la opción de construcción secuencial, Carr (1988) realiza un análisis para determinar el valor de inversiones secuenciales, Trigeorgis (1991a) examina el valor de la entrada anticipada al mercado, Cortazar y Schwartz (1993) evalúan un proceso productivo de dos etapas a través de una opción compuesta, Cortazar y Casassus (2000) abordan un sistema con múltiples etapas de producción, Schwartz y Moon (2000a) valorizan proyectos de investigación y desarrollo y Cortazar et al. (2001) resuelven la evaluación de una inversión minera considerando etapas de exploración, inversión y explotación del yacimiento.

- Opción para modificar la cantidad producida.

De acuerdo a las condiciones del mercado, el gerente puede expandir, reducir o detener la producción. Ejemplos de este tipo de opciones son yacimientos mineros, productos de consumos masivo y la construcción en industrias cíclicas. Artículos que

abordan este problema son Brennan y Schwartz (1985), trabajo central de esta investigación descrito en detalle en el capítulo siete, McDonald y Siegel (1985) evalúan la opción de cerrar las operaciones de una firma, Trigeorgis y Mason (1987) explican el valor de la flexibilidad operacional, Pindyck (1988) desarrolla un modelo de elección de capacidad de la firma, considerando una inversión irreversible y una demanda futura incierta. Finalmente, Cortazar y Casassus (1998) resuelven la valorización de una expansión de capacidad en una mina de cobre.

- Opción de Abandono.

La opción de abandono consiste en la flexibilidad para liquidar los activos del negocio en el mercado, terminando las operaciones. Ejemplos de esta opción se pueden encontrar en las líneas aéreas, la industria de servicios financieros y en la introducción de nuevos productos en nuevos mercados. Myers y Majd (1990) modelan la opción de abandono, como una opción de venta americana con precio de ejercicio igual al valor de mercado de los activos. Hsu y Schwartz (2003) evalúan la opción de abandono, en proyectos de investigación y desarrollo farmacéuticos analizando el problema de inversión en fármacos de alto costo de desarrollo.

- Opción para Cambiar productos, insumos o procesos.

Interesa evaluar la opción de la firma para cambiar los productos vendidos, por ejemplo a través de procesos de manufactura flexible. Alternativamente, se evalúa cambiar los insumos de producción, como combustibles y productos químicos. Ejemplos de industrias con producción flexible son los de productos electrónicos, juguetes, automóviles o papel. Margrabe (1978) establece las bases para analizar el cambio de un activo por otro, Kulatilaka (1993) evalúa el valor de la flexibilidad en la operación de calderas al permitir el cambio de combustibles, Kulatilaka y Trigeorgis (1993) plantean la evaluación de un proyecto con múltiples opciones de modificación. En Cortazar et al. (1998b) valorizan una firma que puede alterar su nivel de producción y su nivel de inversión en el tiempo.

- Opciones de Crecimiento.

Las opciones de crecimiento son aquellas inversiones que permiten desarrollos futuros, por ejemplo un sistema de redes que permita mayores servicios a clientes, inversión en equipos más potentes o laboratorios de última generación para el desarrollo de

fármacos. Myers (1987) expone la relevancia de la teoría de opciones para realizar inversiones que generen opciones de crecimiento futuras. Kester (1993) argumenta que el valor opción de crecimiento debería considerarse en todo proyecto riesgoso o de bajo retorno inmediato. Trigeorgis (1993) analiza un conjunto genérico de opciones disponibles en distintos instantes de tiempo. Otros artículos que abordan las opciones de crecimiento son Pindyck (1988), Chung y Charoenwong (1991).

- **Opciones Múltiples con Interacción**

La gran mayoría de los proyectos pueden ser vistos como una colección de opciones, que permiten realizar el máximo resultado en escenarios favorables y disminuir las pérdidas en el caso opuesto. Es importante aclarar que el valor de la flexibilidad en la presencia de múltiples opciones en general no es la suma de ellas por separado, debido a su interacción. Un ejemplo clásico de estas opciones compuestas es la mina de cobre en Brennan y Schwartz (1985). Otro ejemplo, de opciones múltiples es Cortazar et al. (1998a), en donde se presentan distintas interacciones en un proyecto minero. Otros artículos que abordan opciones múltiples son Trigeorgis (1993) y Kulatilaka (1995).

2.3 Opciones Reales en Recursos Naturales y Valoración Neutral al Riesgo

Las deficiencias expuestas de la metodología del Valor Presente Neto se acentúan al evaluar proyectos de inversión en recursos naturales. Los precios de commodities, como petróleo y cobre, exhiben grandes fluctuaciones en periodos cortos de tiempo, haciendo de la estimación de precios y flujos de caja del proyecto una tarea prácticamente imposible, en el horizonte relevante de evaluación.

No obstante lo anterior, los avances en finanzas modernas han elaborado conceptos claves para la comprensión de la evaluación racional de las inversiones en recursos naturales. Uno de estos avances es el concepto de equivalentes ciertos, en donde el ajuste por riesgo se realiza en los flujos de caja, y la tasa de descuento es la tasa de interés libre de riesgo.

Para el caso particular de flujos de caja asociados a precios de commodities con un mercado activo de contratos futuros, el equivalente cierto es el precio del contrato futuro. Por lo tanto, para evaluar un proyecto de explotación a tasa de producción fija de un commodity, basta evaluar las ventas del commodity al precio del contrato futuro y descontar el flujo de caja a la tasa libre de riesgo.

En términos teóricos los resultados anteriores son más generales, y surgen como casos particulares de la literatura de valorización de activos contingentes. Harrison y Pliska (1981), Harrison y Kreps (1979) demostraron que cuando los mercados son perfectos, por ejemplo, sin costos de transacción, la ausencia de oportunidades de arbitraje implica la existencia de una distribución de probabilidad tal que: la valorización de cualquier activo, está basada en el valor esperado descontado de sus flujos bajo esta distribución denominada ajustada por riesgo. Cuando existen contratos futuros, el precio del contrato futuro es el valor esperado del precio spot bajo la medida ajustada por riesgo.

La medida ajustada por riesgo, en que la tasa de descuento relevante es la tasa libre de riesgo, permite la correcta valorización de proyectos con múltiples opciones, ya que en ella, está implícito el concepto de valorización relativa mediante argumentos de no arbitraje. De acuerdo a lo anterior, la valorización de proyectos en recursos naturales

utilizando la medida ajustada por riesgo, es equivalente a la construcción de un portafolio libre de riesgo entre dos activos correlacionados y por lo tanto su valor en el “mundo real” es exactamente el mismo que en un “mundo neutral al riesgo”. Por ejemplo, Brennan y Schwartz (1985) consideran un portafolio formado por el valor de una mina de cobre y contratos a futuro de cobre. En el anexo A se muestra la metodología que construye un portafolio libre de riesgo a través del precio spot de un commodity y sus contratos futuros.

Si un activo o un proyecto es contingente a una o más variables que no son activos transables, por ejemplo, tasas de interés o la temperatura, es necesario un modelo de equilibrio general de activos en la economía para encontrar su valor. Cox et al. (1985) derivan la ecuación diferencial parcial que debe satisfacer el valor de cualquier activo dependiente de las variables no transables. Este enfoque para la valorización de activos, cuyo valor depende de variables no transables, ha sido utilizado en numerosos artículos como Brennan y Schwartz (1982), Schwartz y Moon (2000a) y Schwartz y Moon (2000b). El desarrollo de la ecuación diferencial parcial para la valorización de estos activos se encuentra en el Anexo A.

En resumen al utilizar la valoración neutral al riesgo para evaluar proyectos de recursos naturales se consigue, en primer lugar, tomar en cuenta todas las flexibilidades u opciones asociadas al proyecto. En segundo lugar la valoración utiliza toda la información contenida en los precios de mercado, por ejemplo, en los precios de contratos futuros y, finalmente, permite la utilización de todas las herramientas de análisis desarrolladas para activos contingentes, para determinar tanto el valor, como la política óptima de ejercicio de la opciones reales consideradas.

En este capítulo se indicaron los fundamentos del análisis de opciones reales, indicando las deficiencias del valor presente neto para la evaluación de inversiones flexibles bajo incertidumbre, se resumieron distintos tipos de opciones presentes en la literatura destacando que generalmente ellas son de tipo americano o bermudiano. En el próximo capítulo se revisan los principales métodos de evaluación de opciones americanas propuestos en la literatura y su relación con el algoritmo LSM.

III MÉTODOS DE EVALUACIÓN DE OPCIONES AMERICANAS Y ALGORITMO LSM

La evaluación de proyectos mediante un análisis de opciones reales exige en la mayoría de los casos una resolución numérica, en atención a la escasez de expresiones analíticas. Los principales desarrollos en el área numérica, han sido realizados para la valorización de opciones financieras y han sido adaptados y extendidos para su aplicación en proyectos de inversión.

En este capítulo se realiza una descripción de la evolución de las distintas alternativas para la evaluación de opciones europeas y americanas. Se describe en detalle el algoritmo propuesto por Longstaff y Schwartz (2001) (LSM), el cual se utiliza en esta tesis para la resolución de dos problemas de opciones reales. Asimismo, se diseña un marco conceptual para la comparación de los principales algoritmos de resolución de opciones americanas, que establece la relación entre el algoritmo LSM y otras metodologías propuestas en la literatura.

3.1 Evolución de metodologías de Valorización de Opciones.

Las características de ejercicio de las opciones determinan la metodología de evaluación correcta para su evaluación. Por lo tanto, debe diferenciarse claramente entre la valorización de una opción europea y una opción americana. En el caso de una opción europea su dueño puede ejercerla sólo al vencimiento, en cambio, si la opción es americana puede ejercerse en cualquier momento hasta su vencimiento. La evaluación de opciones europeas es sencilla y puede realizarse mediante simulación con un gran número de variables de estado, sin embargo, la valorización de opciones americanas sigue siendo un problema de complejas características, ya que debe encontrarse la estrategia de ejercicio que maximice el valor de la opción.

El desarrollo de soluciones analíticas para la evaluación de opciones contempla el pionero trabajo de Black y Scholes (1973) para opciones europeas. Geske y Johnson (1984) exponen una aproximación polinomial para evaluar una opción americana de venta, mientras que Barone-Adesi y Whaley (1987) proponen una aproximación cuadrática. Kim (1990), propone valorizar la opción de venta americana sumando un premio por ejercicio anticipado al valor de una opción europea, del mismo modo que en Carr et al. (1992). Las soluciones analíticas tienen un campo de aplicación restringido, debido a la creciente

complejidad en el número de dimensiones de las opciones y a la incapacidad de tratar problemas de tipo americano en forma general.

La introducción de los árboles binomiales en Cox et al. (1979), permitió un enfoque simple e intuitivo para la resolución de opciones europeas y americanas. Trigeorgis (1991b) extiende el método binomial realizando una transformación logarítmica, finalmente Boyle (1988) extiende la metodología para evaluar opciones con dos variables de estado.

Otra técnica tradicional para evaluar opciones europeas y americanas son las diferencias finitas explícitas e implícitas. Esta metodología fue introducida por Brennan y Schwartz (1977) y considera la discretización directa de la ecuación diferencial parcial que satisface el valor de la opción. Las condiciones de borde definidas en cada etapa de la resolución determinan si la opción es europea o americana.

Tanto los árboles binomiales como el método de diferencias finitas comparten el problema denominado “maldición de la dimensionalidad” en que la complejidad de resolución aumenta exponencialmente con el número de dimensiones del problema. Debido a lo anterior, las investigaciones han derivado a métodos como la simulación de montecarlo para evitar el explosivo crecimiento del tamaño del problema.

La simulación de montecarlo fue introducida por Boyle (1977) para la evaluación de opciones europeas y presenta variadas ventajas con respecto a los algoritmos tradicionales de valorización. Una de ellas es la posibilidad de valorizar adecuadamente opciones europeas, independiente del número de variables de estado del problema (Broadie y Glasserman (1997c)).

Para la valorización de opciones americanas es necesario estimar una estrategia óptima de ejercicio, la que se obtiene de manera recursiva desde el instante final al inicial. Sin embargo, la simulación de montecarlo avanza hacia adelante, por lo que inicialmente no se consideró para la evaluación de opciones americanas.

La aparición de algoritmos híbridos que combinan la simulación de montecarlo con la programación dinámica, que se debe a trabajos como los de Tilley (1993), Barraquand y Martineau (1995), Broadie y Glasserman (1997c) y Raymar y Zwecher (1997), ha permitido situar a la simulación de montecarlo como una excelente alternativa a las metodologías tradicionales de valorización.

Para la valorización de los activos descritos en esta investigación bajo procesos de precios multifactoriales, se ha considerado el algoritmo planteado en Longstaff y Schwartz (2001). De acuerdo a los autores, el algoritmo permite valorizar activos americanos de dimensión arbitraria y determinar conjuntamente su estrategia óptima de ejercicio.

3.2 Descripción del Algoritmo LSM en Longstaff y Schwartz (2001)

A continuación se presenta el algoritmo de Longstaff y Schwartz (2001) para valorizar opciones americanas, se describen las ideas centrales del método y el algoritmo de resolución junto con las posibles variantes de su implementación.

Para entender la idea central del algoritmo LSM se debe recordar que una opción americana entrega el derecho, en cualquier instante del tiempo hasta la fecha de vencimiento, de obtener el flujo de caja asociado al ejercicio. Por lo tanto, el dueño de una opción americana debe comparar el flujo de caja que obtendría si ejerce la opción inmediatamente, con el valor esperado de continuar con la opción. La metodología de Longstaff y Schwartz (2001) se concentra en realizar una estimación del valor esperado de continuar en cada oportunidad de ejercicio, a través de una regresión por mínimos cuadrados (a partir de la información de panel entregada por la simulación). La estimación del valor esperado de continuar es utilizada para determinar la estrategia óptima de ejercicio, de forma de aproximar los tiempos óptimos para ejercer la opción americana. Una vez determinados los flujos de caja óptimos mediante programación dinámica, estos son descontados al instante inicial, entregando el valor de la opción.

El algoritmo contempla una partición del dominio temporal en K oportunidades de ejercicio entre el instante inicial 0 y el vencimiento de la opción T . Una secuencia de instantes intermedios, se designa por $0 < t_1 < \dots < t_K = T$ ³.

Si se realizan N simulaciones de las variables estocásticas subyacentes a la opción, \mathbf{x}_t de dimensión h y se designa a cada trayectoria por ω , en cada oportunidad de ejercicio se tiene una matriz \mathbf{X}_t de dimensión $N \times h$.

³ La literatura define opción Bermudiana a aquella que puede ser ejercida en algunos instantes del tiempo diferenciándolas de las opciones americanas que pueden ser ejercitadas en cualquier instante.

$C(\omega, s:t, T)$ se utilizará para representar el flujo de caja proveniente de la opción a valorizar (sobre la trayectoria ω), con la condición de que ésta no se ejerza en el tiempo t , o en tiempos anteriores a t , y además, se asume que el dueño de este activo sigue la política de ejercicio óptima para todo tiempo representado por s , donde: $t < s \leq T$. El pago generado por la opción en todas las trayectorias se puede representar, en la oportunidad de ejercicio t_k , por el vector \mathbf{C}_{t_k} de dimensión N . Finalmente, se define $\hat{G}(\omega, t_i)$ como la aproximación del valor esperado de continuar para la trayectoria ω , en la oportunidad de ejercicio t_k y el vector $\hat{\mathbf{G}}(t_i)$ de dimensión N contiene los valores esperados de continuar para todas las trayectorias en t_k .

3.2.1 Valor Esperado de Continuar

Una exitosa implementación del algoritmo LSM, exige la especificación de una función para aproximar el valor esperado de continuar $\hat{G}(\omega, t_i)$, para la trayectoria ω , en la oportunidad de ejercicio t_k . La definición de la esperanza condicional del pago de continuar con la opción en el tiempo t_k es:

$$G(\omega, t_k) = E^Q \left[\sum_{j=k+1}^K \exp(-\int_{t_k}^{t_j} r(\omega, s) ds) C(\omega, t_j, t_k, T) \middle| f_{t_k} \right] \quad (3.1)$$

donde $r(\omega, t)$ corresponde a la función que representa a la tasa de interés en el tiempo t , para un estado perteneciente a la trayectoria ω . El valor esperado se toma según la medida de probabilidad Q ajustada por riesgo, condicional en la información generada por la partición de eventos f_{t_k} .

El supuesto clave que hacen los autores es que la función $G(\omega, t_k)$ pertenece al espacio de Hilbert, y ya que cualquier función que pertenece a este espacio admite una representación como una combinación lineal finita de funciones base del espacio definidas por $L_j(\mathbf{x}_t(\omega))$ debe satisfacerse la siguiente igualdad:

$$G(\omega, t_k) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j L_j(\mathbf{x}_t) \quad (3.2)$$

donde a_j son constantes, y el vector \mathbf{x}_{t_k} representa las variables de estado relevantes para el cálculo del valor esperado de continuar con la opción.

Lógicamente, para la aplicación práctica de este supuesto, se recurre a una base finita de M funciones cuya combinación lineal aproximará el valor esperado de continuar:

$$\hat{G}_M(\omega, t_k) = \sum_{j=1}^M \hat{a}_j L_j(\mathbf{x}_{t_k}) \quad (3.3)$$

Las funciones bases propuestas por los autores para la aproximación pueden ser los polinomios de: Laguerre, Chebyshev, Gegenbauer y Jacobi, o incluso potencias simples de las variables de estado. En el capítulo cinco se revisan distintas especificaciones para estas bases.

Finalmente, los autores proponen la estimación de los coeficientes \hat{a}_j mediante una regresión de mínimos cuadrados. La regresión es especificada con los pagos descontados de la opción hasta el instante t_{k-1} , como la variable dependiente y las funciones base evaluadas en las variables de estado en el instante t_{k-1} como regresores.

3.2.2 Resolución Backward

El algoritmo se inicia en la oportunidad de ejercicio final, correspondiente al vencimiento de la opción ($t_K = T$). En este instante el dueño de la opción debe elegir entre el pago inmediato de la opción o dejar expirar la opción sin ejercerla. Tomada esta decisión el vector de pagos \mathbf{C}_T es conocido. Por ejemplo, si el activo subyacente es el precio spot de un commodity S_t y la opción es de compra con precio de ejercicio Z , el vector de pagos se definirá como:

$$\mathbf{C}_T(\omega) = \max(S_T(\omega) - Z, 0) \quad (3.4)$$

Cuando se establece el vector de pagos en el instante T , para determinar los flujos de caja en $T-1$, debe compararse el valor esperado de continuar con la opción con el valor de ejercicio inmediato $VI(\omega, t_{K-1})$:

Si $VI(\omega, t_{K-1}) \geq \hat{G}_M(\omega, t_{K-1})$, entonces el valor de ejercicio inmediato es mayor a la estimación del valor esperado de continuar. Por lo tanto, conviene ejercer la opción y el pago en la trayectoria considerada es el valor intrínseco:

$$C(\omega, s, t_{K-2}, T) = VI(\omega, t_{K-1}) \quad (3.5)$$

Si $VI(\omega, t_{K-1}) \leq \hat{G}_M(\omega, t_{K-1})$ el valor de ejercicio inmediato es menor que la estimación del valor esperado de continuar. Por lo tanto, el valor que se asigna a esta trayectoria es el valor almacenado en la oportunidad siguiente, descontado a la tasa libre de riesgo realizada en el intervalo $t_k - t_{k-1}$:

$$C(\omega, s, t_{K-2}, T) = C(\omega, s, t_{K-1}, T) \exp\left(-\int_{t_{K-2}}^{t_{K-1}} r(\omega, s) ds\right) \quad (3.6)$$

En consecuencia, la valorización toma en cuenta el valor realizado en la trayectoria. La estimación del valor esperado de continuar se utiliza solamente para determinar la decisión óptima en cada trayectoria ω de la oportunidad de ejercicio t_k .

De acuerdo a la indicación hecha por Bossaerts, en el artículo de Longstaff y Schwartz (2001), si se utiliza el valor esperado de continuar con la opción $\hat{G}_M(\omega, t_{K-1})$ para la valorización reemplazando el pago descontado en la trayectoria en la ecuación (3.6) por el valor esperado de continuar $\hat{G}_M(\omega, t_{K-1})$ se tiene la siguiente actualización del vector de pagos:

$$C(\omega, s, t_{K-2}, T) = \text{Max}(VI(\omega, t_{K-1}); \hat{G}_M(\omega, t_{K-1})) \quad (3.7)$$

El reemplazo en la ecuación (3.7) genera un sesgo superior. Lo anterior se debe a que la aproximación en $\hat{G}_M(\omega, t_{K-1})$ tiene un error de medición y el operador máximo es convexo. Utilizando la desigualdad de Jensen puede demostrarse que el error en la aproximación $\hat{G}_M(\omega, t_{K-1})$ produce el sesgo indicado.

En el instante inicial de la opción, no es posible utilizar un estimador de mínimos cuadrados para el cálculo de $\hat{G}(\omega, t_0)$, ya que en t_0 el vector de estados \mathbf{x}_t es el mismo para todas las trayectorias. Considerando lo anterior, se recurre al promedio aritmético del vector de pagos C_1 en todas las trayectorias, descontados a la tasa libre de riesgo realizada en el intervalo, es decir:

$$\hat{G}(t_0) = \frac{1}{N} \sum_{\omega=1}^N C_1(\omega) \exp\left(-\int_{t_0}^{t_1} r(\omega, s) ds\right) \quad (3.8)$$

Utilizando la expresión anterior la valorización de la opción en el tiempo inicial es :

$$V = \max(VI(\omega, t_0), \hat{G}(t_0)) \quad (3.9)$$

Un resultado importante derivado de la resolución backward son los coeficientes estimados en las regresiones de mínimos cuadrados: se obtiene una matriz $\hat{\mathbf{a}}$ de dimensiones M (número de funciones base utilizadas en la regresión) por $k-1$ (oportunidades de ejercicio en que se realizan regresiones). Los coeficientes estimados permiten la obtención de los valores críticos de ejercicio para las variables de estado, en cada oportunidad de ejercicio, en consecuencia contienen toda la información relevante para el cálculo de la política óptima empleada en la evaluación de la opción.

3.2.3 Resolución Forward

La literatura sobre resolución de opciones americanas enfatiza en la obtención de políticas óptimas o criterios parada. Lo anterior, se debe a que una vez conocida la estrategia de ejercicio se puede valorizar fácilmente el activo mediante simulación de montecarlo.

El procedimiento consiste en realizar un set de simulaciones para las variables de estado y luego avanzar por cada trayectoria desde el tiempo inicial hasta llegar al primer tiempo de parada o decisión de ejercicio. Posteriormente se descuentan los flujos de caja al tiempo inicial, y se promedian todas las trayectorias.

En el marco del algoritmo de Longstaff y Schwartz (2001) existen dos formas de realizar una valorización Forward de una opción americana:

La primera consiste en evaluar las aproximaciones para el valor esperado de continuar $\hat{G}_M(\omega, t_i)$, para la trayectoria ω y la oportunidad de ejercicio t_i . Con esta evaluación se puede decidir en cada punto de la trayectoria si es óptimo ejercer la opción.

La segunda forma consiste en la determinación de las variables de estado críticas de ejercicio \mathbf{x}^* , calculando los valores de las variables de estado que igualan la función valor esperado de continuar con el ejercicio inmediato, es decir:

$$VI(\mathbf{x}^*) = \hat{G}_M(\mathbf{x}^*, t_i) \quad (3.10)$$

Por ejemplo, en el caso de una opción de compra con precio de ejercicio Z , escrita sobre el precio spot de un commodity S_t , la ecuación (3.10) para determinar el precio crítico S_t^* , en cada oportunidad de ejercicio t_i es:

$$M \max(S_t^* - Z, 0) = \hat{G}_M(S_t^*, t_i) \quad (3.11)$$

La diferencia entre ambos enfoques para realizar una evaluación Forward de una opción americana, está dada por la facilidad para encontrar las variables críticas que definen el ejercicio, si esta búsqueda es imprecisa será preferible la evaluación directa de la función $\hat{G}_M(\mathbf{x}, t_i)$. Por ejemplo, si las raíces de la ecuación (3.11) son múltiples y similares la selección del precio crítico es compleja. Por otra parte si la opción es función de múltiples variables de estado, será necesario resolver (3.11) para cada conjunto de variables de estado en todas las oportunidades de ejercicio.

Es importante aclarar que la evaluación Forward puede realizarse utilizando el conjunto de simulaciones inicial u otro nuevo. En el primer caso y evaluando directamente $\hat{G}_M(\mathbf{x}, t_i)$ se debe obtener el mismo valor para la opción que en la resolución backward, ya que el algoritmo realiza las mismas decisiones de ejercicio.

3.3 Comparación de algoritmos para Opciones Americanas

El objetivo de esta sección consiste en realizar una identificación de las características comunes de los algoritmos más relevantes para valorizar opciones americanas, resolviendo la aparente disociación existente entre los métodos de evaluación de opciones americanas.

Se introduce un marco conceptual general, con tres elementos claves para la comprensión de los algoritmos: el valor de estado, el valor de transición y el valor de nodo de una opción americana. El valor de estado corresponde al valor de ejercicio inmediato de la opción en una oportunidad de ejercicio y combinación de variables de estado determinada. El valor de transición corresponde al valor esperado de continuar de una opción americana⁴. La gran mayoría de los algoritmos de valorización se concentran en el

⁴ El valor de continuación corresponde al valor esperado de la opción en las oportunidades de ejercicio siguientes condicional a no ejercerla de inmediato.

cálculo del valor de continuación según el cual se toman las decisiones de ejercicio anticipado. El valor de nodo corresponde al valor asignado por el algoritmo como el valor de la opción el que incluye las decisiones de ejercicio óptimo. La asignación de los valores de nodo en los métodos tradicionales surge tomando el máximo entre el valor de estado y el valor de transición, sin embargo, en algoritmos como LSM el valor de nodo se asigna con los valores descontados de las trayectorias simuladas. Estos conceptos serán aplicados más adelante en la resolución de opciones reales a través del algoritmo LSM.

Los algoritmos son descritos para el caso de una opción de venta, escrita sobre el precio spot de una acción que no entrega dividendos y sigue un proceso browniano geométrico. El precio de ejercicio de la opción está representado por Z y la tasa de interés libre de riesgo se asume constante e igual a r .

Las características que comparten los algoritmos analizados son las siguientes:

- 1) Realizan una definición del dominio de resolución, de acuerdo a las dimensiones relevantes del problema denominadas variables de estado. En el dominio es posible calcular a priori los valores de estado de la opción, como el flujo de caja de ejercicio.
- 2) Requieren de la definición de un valor de transición, con el que se determinan las decisiones óptimas de ejercicio.
- 3) Utilizan técnicas de programación dinámica para determinar recursivamente, desde la condición de borde hasta el inicio de la opción, las decisiones secuenciales para maximizar el valor de la opción. Los valores determinados, en todo el dominio de resolución, se definen como valores de nodo.

3.3.1 Árboles Binomiales

El primer algoritmo analizado es el propuesto por Cox et al. (1979) denominado árbol binomial. La primera característica referente a la definición del dominio de solución se encuentra definiendo N oportunidades de ejercicio en cada una existe un número ascendente de nodos de los que surgen las ramas del árbol binomial.

A partir el precio spot inicial S_0 se construyen los movimientos ascendentes y descendentes en cada nodo por las cantidades u y d respectivamente, que en general

satisfacen $u > 1$ y $d < 1$. En la figura se muestra un esquema con $N = 5$ oportunidades de ejercicio que implican 5 nodos finales.

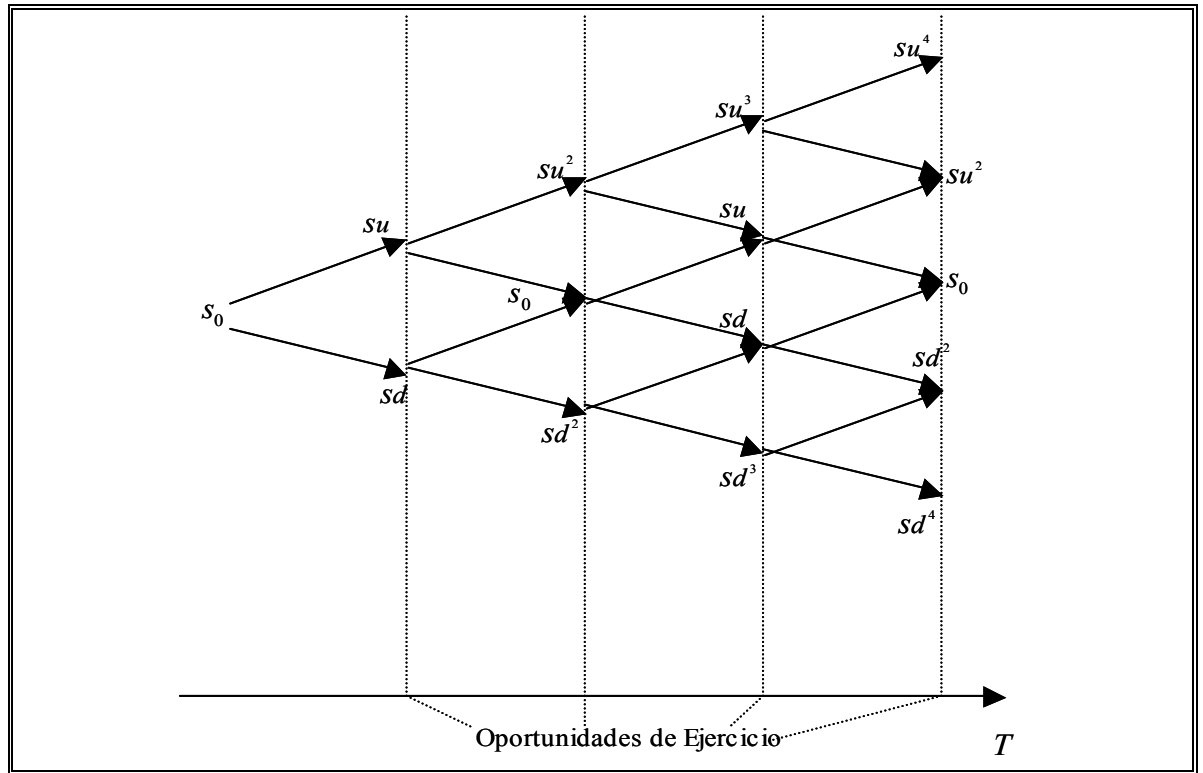


Figura 3-1: Definición del dominio de solución para una opción americana, en el esquema numérico de árbol binomial Cox et al. (1979)

A partir del árbol de precios se puede calcular para cada nodo un valor de estado que representa el valor intrínseco del pago de la opción:

$$V_{i,j}^{estado} = f_{i,j} = \text{Max}(Z - S_0 u^j d^{i-j}) \quad (3.12)$$

donde i recorre las oportunidades de ejercicio en el eje temporal y j recorre los nodos pertenecientes a cada oportunidad de ejercicio. De acuerdo a lo anterior $0 \leq i \leq N$ y $0 \leq j \leq i$.

El valor de transición en cada nodo, para la decisión de ejercicio anticipado, se calcula como el valor esperado ajustado por riesgo, de los valores de nodo de la opción. Si

se consideran dos ramas de la penúltima oportunidad de ejercicio, el valor de la opción en cada rama, es equivalente al pago en la última oportunidad de ejercicio:

$$V_{i,j}^{transicion} = [pV_{N,j+1} + (1-p)V_{N,j}]e^{-r\Delta t} = [pf_{N,j+1} + (1-p)f_{N,j}]e^{-r\Delta t} \quad (3.13)$$

El valor de la opción se calcula recorriendo cada nodo del árbol desde la última oportunidad de ejercicio hasta la inicial, resolviendo en cada nodo de acuerdo a la siguiente expresión:

$$V_{i,j} = \text{Max}\{V_{i,j}^{estado}, V_{i,j}^{transicion}\} \quad (3.14)$$

La expresión anterior ocupa en cada resolución el valor de transición que se obtiene resolviendo los nodos inmediatamente posteriores, generado un problema ascendente de programación dinámica. El valor de transición es el valor esperado de continuar (ajustado por riesgo) con la opción de venta hacia las oportunidades de ejercicio posteriores.

3.3.2 Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas introducido por Brennan y Schwartz (1977) requiere de la definición del dominio a partir de las variables de estado de la opción, típicamente este es rectangular para problemas de dos dimensiones, sin embargo, existen formas de refinamiento del dominio para mejorar la aproximación de la función.

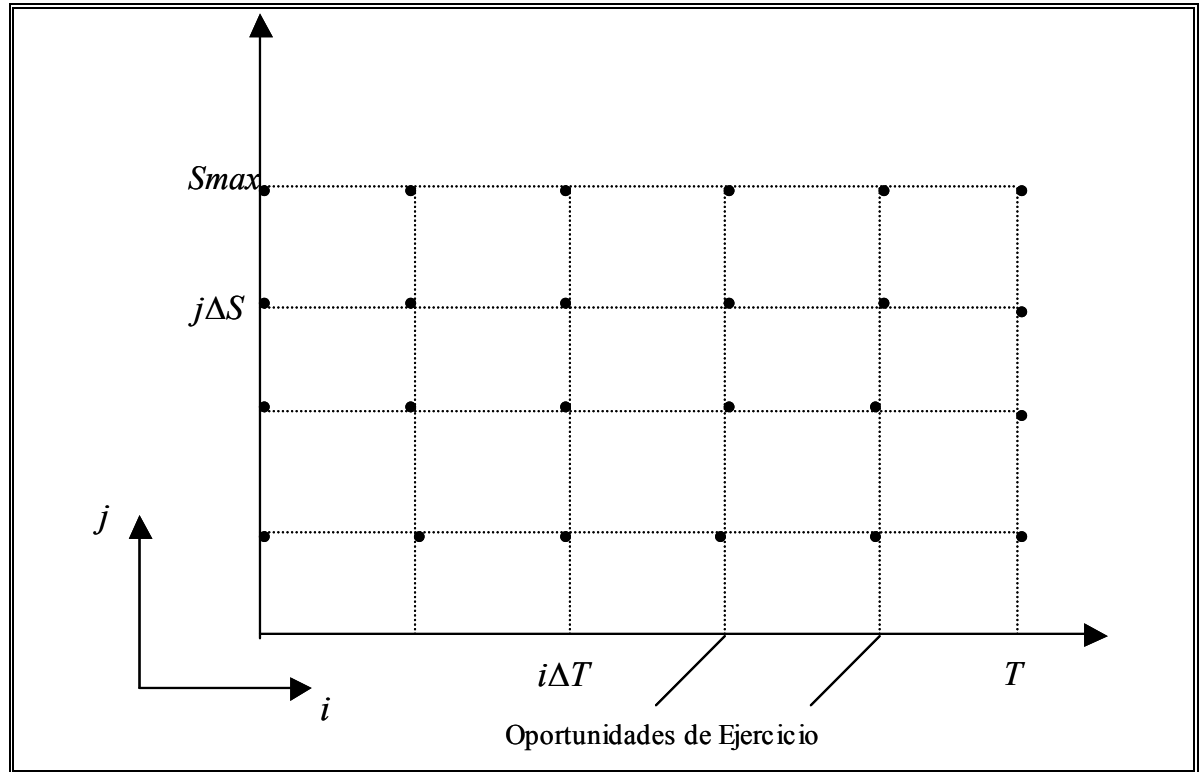


Figura 3-2: Definición del dominio de solución para una opción americana en diferencias finitas propuesto en Brennan y Schwartz (1977)

En la figura se muestra una discretización para resolver el valor de la opción. En cada punto de la malla i, j se define un valor de estado como el pago inmediato de la opción:

$$V_{i,j}^{estado} = f_{i,j} = \text{Max}(Z - j\Delta S) \quad (3.15)$$

De acuerdo al desarrollo en el Anexo A, la ecuación diferencial parcial que describe el valor de la opción de venta si el precio spot sigue un proceso browniano geométrico es:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0 \quad (3.16)$$

Para aproximar la solución de la ecuación anterior se deben emplear discretizaciones para las derivadas, de acuerdo a la partición realizada en la dimensión

temporal se definen el esquema implícito y explícito. Las discretizaciones en el caso explícito son:

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx [V_{i+1,j+1} - V_{i+1,j-1}] / 2\Delta S \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx [V_{i+1,j+1} - 2V_{i+1,j} + V_{i+1,j-1}] / \Delta S^2 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx [V_{i+1,j} - V_{i,j}] / \Delta t \quad (3.19)$$

Reemplazando la discretización en la ecuación diferencial se puede calcular el valor de transición para la opción americana:

$$V_{i,j}^{transicion} = a_j V_{i+1,j-1} + b_j V_{i+1,j} + c_j V_{i+1,j+1} \quad (3.20)$$

donde los coeficientes a_j , b_j , c_j se calculan de acuerdo a:

$$a_j = (-\frac{1}{2} rj\Delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t) / (1 + r\Delta t) \quad (3.21)$$

$$b_j = (1 - \sigma^2 j^2 \Delta t) / (1 + r\Delta t) \quad (3.22)$$

$$c_j = (\frac{1}{2} rj\Delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t) / (1 + r\Delta t) \quad (3.23)$$

La definición del valor de nodo $V_{i,j}$ contiene la decisión de ejercicio anticipado, comparando el valor de estado con el valor de transición:

$$V_{i,j} = \text{Max} \{ V_{i,j}^{estado}, V_{i,j}^{transicion} \} \quad (3.24)$$

La resolución de la opción mediante diferencias finitas empieza en la última oportunidad de ejercicio, calculando la condición de borde de acuerdo a la ecuación (3.15) y retrocede calculando los nodos de acuerdo a (3.24).

Brennan y Schwartz (1977) demuestran la convergencia de esta metodología al valor de la opción, a través de una analogía con la metodología de los árboles binomiales.

El valor de transición calculado en esta metodología, se basa en la aproximación del valor de la ecuación diferencial que describe el comportamiento de la opción. Este valor puede ser reinterpretado como un valor esperado bajo la distribución neutral al riesgo: la equivalencia estricta de la ecuación diferencial parcial con el valor esperado de los pagos de la opción, está garantizada por un resultado matemático conocido como el teorema de Feynman – Kac. Una discusión de dichos resultados puede encontrarse en Øksendal (1998).

3.3.3 Barraquand - Martineau

Barraquand y Martineau (1995) proponen una metodología de valorización de opciones americanas basada en simulación de Montecarlo. Los autores proponen colapsar la información de las trayectorias de precios, en una partición del espacio de pagos de la opción. Para calcular el valor de la opción, identifican probabilidades de transición entre los estados de pagos para tiempos consecutivos y utilizan programación dinámica de manera similar a los árboles binomiales para calcular el valor de la opción.

Esta metodología comienza dividiendo el espacio del pago de la opción en K bins, $k = 1, \dots, K$, definiendo d oportunidades de ejercicio.

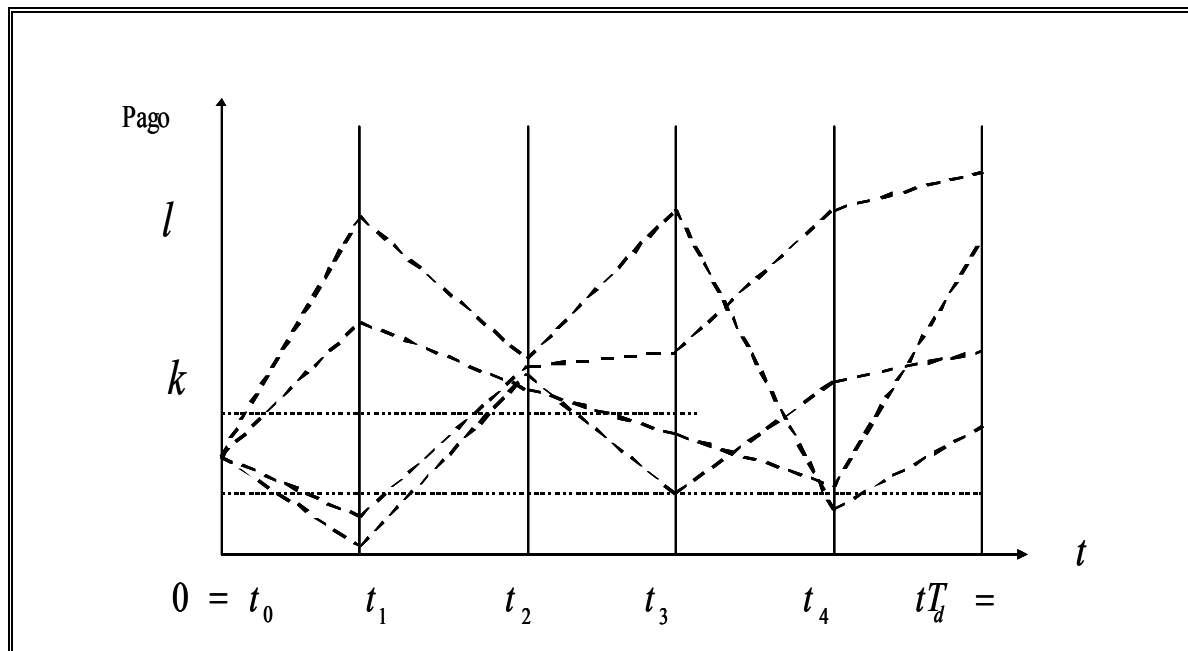


Figura 3-3: Definición del dominio de solución para una opción americana, en el esquema numérico de Barraquand y Martineau (1995)

Al realizar un primer set de simulaciones del precio spot la metodología permite definir el valor de estado de cada partición del espacio de pagos denominado “bin”. El valor estado de cada bin, se calcula como el promedio de los pagos de la opción entre las trayectorias que pertenecen a la agrupación:

$$V_{t,k}^{estado} = \frac{\sum \text{Max}(Z - S_i(\omega_k))}{a_t(k)} \quad (3.25)$$

donde k representa la agrupación, t la oportunidad de ejercicio y ω_k indica la trayectoria que pertenece al bin k , $a_t(k)$ representa el número de trayectorias que corresponden a la agrupación k en t .

El valor de transición se calcula como el valor esperado de los pagos descontados un intervalo de tiempo. Las probabilidades de transición entre bins se calculan empíricamente a partir de un segundo conjunto de simulaciones o simulación principal:

$$p_t(k,l) = b_t(k,l) / a_t(k) \quad (3.26)$$

Para cada par de bins k, l , en tiempos consecutivos t , y $t+1$, $b_t(k, l)$ corresponde a la cantidad de simulaciones que pertenecen al bin k en t , y que luego forman parte del bin l en $t+1$.

Utilizando las probabilidades empíricas en (3.26) el valor de transición de la opción en el nodo o bin es:

$$V_{k,t}^{transicion} = \left[\sum_{l=1}^K p_t(k, l) V_{l,t+1} \right] e^{-r\Delta t} \quad (3.27)$$

La expresión anterior requiere el conocimiento de los valores de la opción para el tiempo $t+1$, por lo que la resolución se efectúa retrocediendo en el tiempo de manera análoga a las metodologías anteriores.

El valor de la opción en cada bin es el resultado de comparar el valor esperado de continuar con el ejercicio inmediato:

$$\begin{aligned} V_{k,t} &= \max \left[\text{Max} \{ V_{k,t}^{estado}, V_{k,t}^{transicion} \} \right] \\ &= \max \left[\frac{\sum \text{Max}(Z - S_t(i))}{a_t(k)}, \left(\sum_{l=1}^K p_t(k, l) V_{l,t+1} \right) \right] e^{-r\Delta t} \end{aligned} \quad (3.28)$$

3.3.4 Algoritmo LSM

La descripción del algoritmo de Longstaff y Schwartz (2001) realizada en la sección 3.2, puede ser interpretada en términos de un valor de estado, un valor de transición y un valor de nodo.

La definición del dominio de resolución se realiza mediante simulación de montecarlo, considerando el valor de las variables de estado en las oportunidades de ejercicio. A diferencia del método de Barraquand y Martineau (1995) que define el dominio en agrupaciones de la función de pago, el método de LSM emplea el valor realizado de cada trayectoria ω en la resolución.

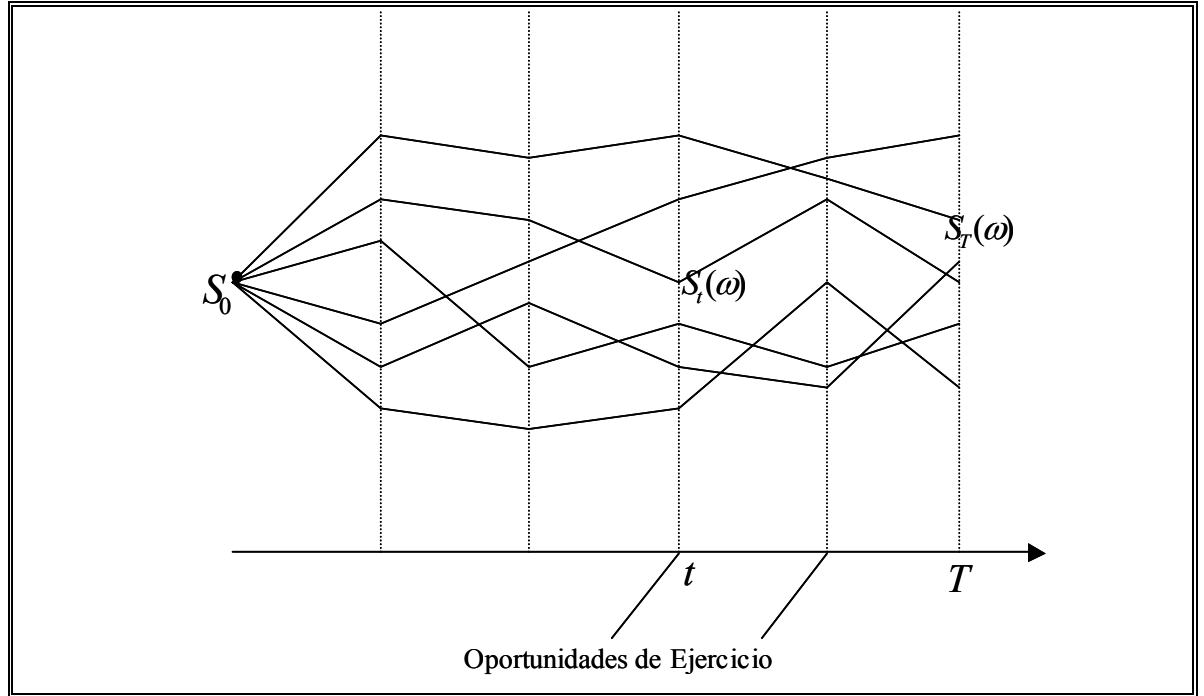


Figura 3-4: Definición del dominio de solución para una opción americana, en el esquema numérico de Longstaff y Schwartz (2001)

Si se identifican los instantes de ejercicio por t_k , el valor de estado de la trayectoria ω es el valor intrínseco de la opción:

$$V_{\omega, t_k}^{estado} = \text{Max}(Z - S_{t_k}(\omega), 0) \quad (3.29)$$

El valor de transición en el instante t_k sobre la trayectoria ω , está definido mediante la aproximación del valor esperado de continuar (ver ecuación (3.3)), condicional al valor de la variable de estado $S_{t_k}(\omega)$:

$$V_{\omega, t_k}^{transicion} = \hat{G}_M(S_{t_k}(\omega), t_k) \quad (3.30)$$

Si se define $G(\omega)$ como el flujo de caja descontado, registrado en algún instante posterior a t_k sobre la trayectoria ω , el valor de nodo se obtendrá de acuerdo a las siguientes condiciones:

$$V_{\omega, t_k}^{nodo} = \begin{cases} V_{\omega, t_k}^{estado} \\ G(\omega) \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{cases} V_{\omega, t_k}^{transicion} < V_{\omega, t_k}^{estado} \\ V_{\omega, t_k}^{transicion} > V_{\omega, t_k}^{estado} \end{cases} \quad (3.31)$$

De acuerdo al desarrollo expuesto el algoritmo LSM, también se puede expresar en términos de un valor de estado, valor de transición y valor de nodo final, la cual es una forma simple de entender a la gran mayoría de los algoritmos de valorización de opciones americanas.

En este capítulo se han revisado las metodologías de evaluación de opciones, con mayor énfasis en aquellos algoritmos para la resolución de opciones americanas. En particular se explicó en detalle el algoritmo LSM y su relación con tradicionales algoritmos.

En el próximo capítulo se señalan las características y evolución de los procesos de precios de commodities, utilizados en esta investigación para la aplicación del algoritmo LSM y se desarrolla la valorización de activos contingentes a través de futuros y opciones europeas escritos sobre commodities.

IV MODELOS DE PRECIOS DE COMMODITIES Y VALORIZACIÓN DE ACTIVOS CONTINGENTES

El capítulo anterior se concentró en la descripción de los métodos de evaluación de opciones americanas y su relación con el algoritmo LSM. En este capítulo se describen los procesos de precios de commodities utilizados en esta investigación y las expresiones analíticas para la valorización de contrato futuros y opciones empleadas en capítulos posteriores.

La modelación de la incertidumbre asociada a inversiones en recursos naturales está determinada por el planteamiento de procesos estocásticos para los precios. Al evaluar económicamente la explotación de un mineral de cobre o un yacimiento de petróleo se pueden suponer variadas especificaciones para la dinámica de los precios, alguna de las cuales se revisan en este capítulo.

La dinámica escogida para la modelación de los precios, debe recoger las principales características estadísticas de las series de tiempo, y simultáneamente proveer propiedades favorables para la valorización de instrumentos financieros y proyectos contingentes al valor del commodity. Para conseguir los objetivos anteriores, la literatura enfatiza en el correcto comportamiento de modelos multifactoriales de precios. Recientes investigaciones en modelos multifactoriales para el caso del petróleo como Cortazar y Schwartz (2003) y Cortazar y Naranjo (2003), entregan excelentes resultados de calibración en modelos de 3 y 4 factores estocásticos respectivamente, logrando ajustar la estructura temporal de precios de contratos futuros de petróleo y sus volatilidades históricas.

En el caso del cobre la evidencia del comportamiento multifactorial de los precios se encuentra en Cortazar y Schwartz (1994), que al realizar un estudio de componentes principales, demuestran que la varianza de los precios se explica mediante 3 factores estocásticos ortogonales.

Las siguientes figuras ilustran el comportamiento en serie de tiempo y corte transversal de los precios de contratos futuros de cobre. Una especificación adecuada del modelo de precios, debe ser capaz de emular correctamente ambos comportamientos.

En el siguiente gráfico se muestra la evolución estocástica del precio de dos contratos futuros de cobre. Los contratos son a un mes y dos años plazo.

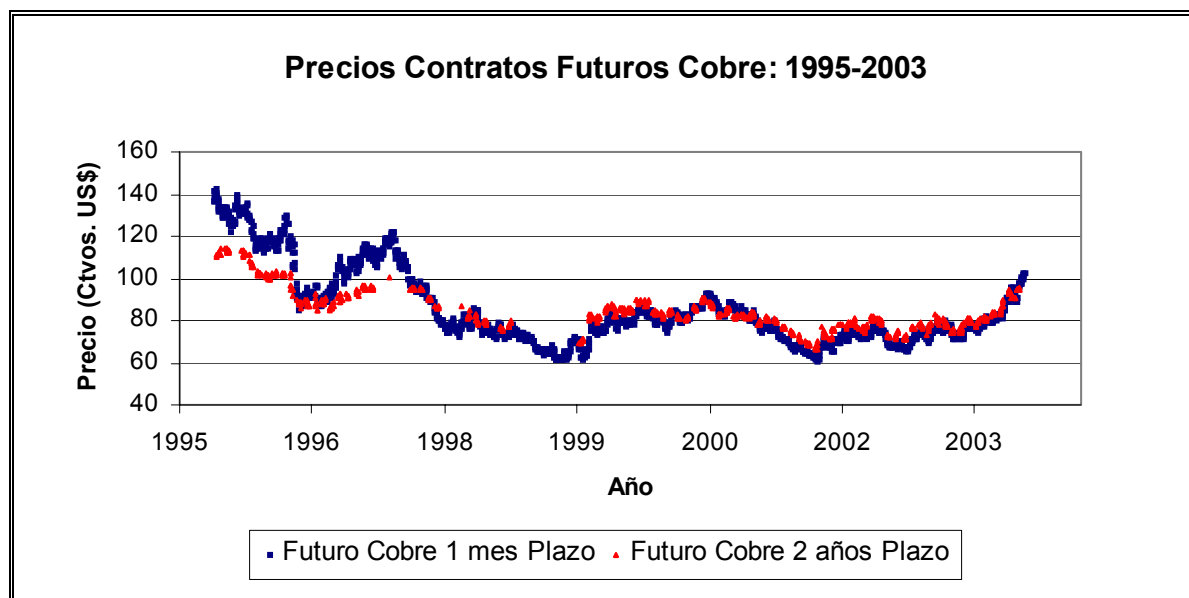


Figura 4-1: Series de precios de contratos futuros a un mes plazo y dos años plazo, para el periodo 1995-2003

Si se realizan cortes transversales y se observa la estructura temporal de precios. Se pueden identificar variadas formas de estructuras temporales, crecientes (contango), decrecientes (normal backwardation) y planas. En el siguiente gráfico se muestran algunos ejemplos de precios de transacciones en la bolsa NYMEX⁵

⁵ Sigla en inglés para New York Mercantile Exchange

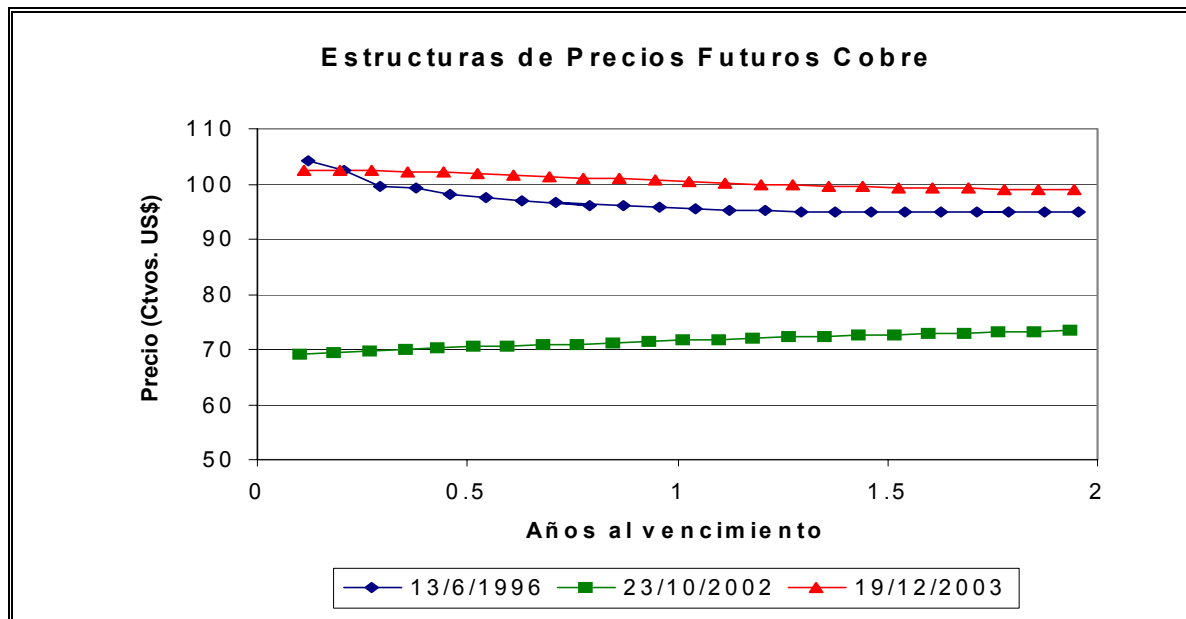


Figura 4-2: Ejemplos de estructuras temporales de precios de contratos futuros de cobre, creciente (contango), decreciente (normal backwardation) y plana.

En lo que sigue de este capítulo se introduce, el concepto de retorno por conveniencia de un commodity aspecto clave en la comprensión de la estructura temporal de precios de commodities (Brennan (1991)). Luego, se explica el rol de la dinámica ajustada por riesgo para la evaluación de derivados de un commodity. A continuación, se presentan distintas especificaciones de precios presentes en la literatura. En la sección siguiente, se indican los momentos analíticos de las variables de estado necesarios para deducir la valorización teórica de contratos futuros y opciones europeas y son la base para realizar la simulación en las implementaciones del algoritmo LSM. Finalmente, se presenta la valorización teórica de contratos futuros y opciones europeas sobre el precio de un commodity que se emplearán en capítulos posteriores.

4.1 Retorno por Conveniencia de un Commodity

Una característica recurrente en la modelación de los precios de commodities es la incorporación de la variable retorno por conveniencia o convenience yield. El retorno por conveniencia se define como el flujo de servicios o beneficios que recibe el dueño de

un inventario físico del commodity pero no el dueño de un contrato futuro escrito sobre el producto.

La existencia de este retorno se ha fundamentado en la reducción de costos de adquirir el inventario (transporte y tiempo de entrega físico) y por los potenciales beneficios de aprovechar una escasez local del commodity por la mantención de un proceso productivo o efectuando ventas del commodity a otros productores a un mayor precio. La teoría del almacenamiento ha sido tratada en Brennan (1991)

4.2 Dinámica Ajustada por Riesgo para Procesos de Precios Commodities

La teoría de valorización de instrumentos financieros establece que en equilibrio no deben existir oportunidades de arbitraje, por lo que cualquier activo que puede ser replicado con otros activos, debe tener un precio tal que no existan oportunidades de arbitraje.

La ausencia de oportunidades de arbitraje permite definir, a través de portafolios instantáneamente arbitrados, una transformación del proceso histórico que sigue el precio de un commodity u otras variables estocásticas que definen su dinámica. La modificación del proceso que sigue el precio spot se realiza considerando la diferencia entre la tasa de interés libre de riesgo y el dividendo o retorno por conveniencia del commodity. Este procedimiento de corrección se explica en el Anexo A1. En el caso de procesos de variables no transables de acuerdo a Cox et al. (1975) es necesario corregir la distribución histórica incorporando la variable denominada precio de mercado del riesgo. Este procedimiento de corrección se desarrolla en el Anexo A2.

Al realizar el ajuste por riesgo en los procesos estocásticos subyacentes modificando el drift o tendencia del proceso original o histórico, se define una nueva distribución de probabilidad para la variable denominada medida ajustada por riesgo, medida neutral al riesgo o medida de la martingala equivalente. La distribución ajustada resulta modificada en media con respecto a la distribución original quedando la varianza inalterada.

Un resultado teórico fundamental, es que el precio de un contrato futuro, es el valor esperado ajustado por riesgo del precio spot. Esto implica que al calibrar un modelo

de precios con contratos futuros, se encuentra la distribución neutral al riesgo del precio spot la que será utilizada para evaluar activos contingentes al precio.

El resultado anterior sustenta toda la investigación en instrumentos derivados y opciones reales y representa el pilar fundamental para la validación, desde la teoría, de los resultados empíricos del área.

4.3 Modelos Propuestos en la literatura para la dinámica del Precio de un Commodity

En esta sección se revisa la formulación de algunos procesos de precios de commodities relevantes para el desarrollo de esta investigación.

Los modelos han sido desarrollados en tiempo continuo siguiendo el planteamiento del seminal trabajo de Black y Scholes (1973). Todos los modelos de precios tratados en esta tesis suponen que la variación experimentada por el precio spot de un commodity, responde a las perturbaciones continuas e impredecibles de un mercado competitivo ante fluctuaciones del equilibrio de oferta y demanda, satisfaciendo los supuestos de los mercados eficientes.

Los primeros modelos planteados para el precio spot, como el de Brennan y Schwartz (1985), asumen procesos del tipo browniano geométrico. Sin embargo, la evidencia empírica expuesta en Schwartz (1997), indica que las perturbaciones de oferta y demanda en el mercado de algunos productos, como cobre y petróleo, provocan la inducción de procesos con reversión a la media, ya sea en el precio spot o en otras variables subyacentes como el retorno por conveniencia, como por ejemplo en el modelo de Gibson y Schwartz (1990).

4.3.1 Modelo de Brennan y Schwartz (1985)

Este modelo asume que el precio spot S_t de un commodity sigue un proceso browniano geométrico. La definición de este proceso corresponde a Black y Scholes (1973) para el proceso seguido por el precio de una acción:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dw_t(t) \quad (4.1)$$

La evolución del precio está definida por los parámetros μ , retorno neto del commodity, σ volatilidad instantánea de los retornos del precio spot. En este modelo dt representa la dimensión temporal y dw_t es un incremento de un proceso de Wiener.

El proceso ajustado por riesgo en este modelo es:

$$dS_t = (r - \delta)S_t dt + \sigma S_t dw_t(t) \quad (4.2)$$

En esta especificación del proceso r indica a la tasa de interés instantánea y δ es el retorno por conveniencia del commodity, dw_t^* representa un incremento al proceso de Wiener bajo la medida de la martingala equivalente.

4.3.2 Modelo 1 de Schwartz (1997)

Schwartz (1997) define un proceso con reversión a la media del tipo Ornstein-Uhlenbeck para el logaritmo del precio spot :

$$x_t = \log(S_t) \quad (4.3)$$

El parámetro κ es la velocidad de reversión a la media, al valor de largo plazo del logaritmo del precio spot α . El proceso ajustado por riesgo en este modelo es:

$$dx_t = \kappa(\alpha^* - x_t)dt + \sigma dw_t^*(t) \quad (4.4)$$

En este proceso $\alpha^* = \alpha - \lambda$ donde λ es el precio de mercado del riesgo asociado a x_t .

4.3.3 Modelo de Gibson y Schwartz (1990)

Gibson y Schwartz (1990) definen un proceso de precios de dos factores estocásticos, donde el precio spot S_t de un commodity sigue en proceso browniano geométrico y su retorno por conveniencia δ_t un proceso con reversión a la media del tipo Ornstein-Uhlenbeck. Las perturbaciones estocásticas de ambas variables de estado tienen correlación instantánea ρ . El proceso ajustado por riesgo en este modelo es:

$$dS_t = (r - \delta_t)S_t dt + \sigma_1 S_t dw_1^*(t) \quad (4.5)$$

$$d\delta_t = [\kappa(\alpha - \delta_t) - \lambda]dt + \sigma_2 dw_2^*(t) \quad (4.6)$$

donde $(dw_1^*)(dw_2^*) = \rho dt$.

4.3.4 Modelo 3 de Schwartz (1997)

El primer modelo para el precio spot de un commodity con 3 factores estocásticos es el que presenta Schwartz (1997) como su modelo 3. Este modelo extiende el de Gibson y Schwartz (1990) al considerar un proceso del tipo Ornstein-Uhlenbeck para la tasa de interés instantánea de forma equivalente a Vasicek (1977). El proceso ajustado por riesgo que propone el autor es:

$$dS_t = (r_t - \delta_t)S_t dt + \sigma_1 S_t dw_1^*(t) \quad (4.7)$$

$$d\delta_t = \kappa(\hat{\alpha} - \delta_t)dt + \sigma_2 dw_2^*(t) \quad (4.8)$$

$$dr_t = a(m^* - r_t)dt + \sigma_3 dw_3^*(t) \quad (4.9)$$

donde $(dw_1^*)(dw_2^*) = \rho_1 dt$, $(dw_2^*)(dw_3^*) = \rho_2 dt$ y $(dw_1^*)(dw_3^*) = \rho_3 dt$.

4.3.5 Modelo de Cortazar y Schwartz (2003)

La motivación económica de este modelo es que se espera que en una economía competitiva, el precio spot del commodity obtenga un retorno esperado instantáneo v_t que es estocástico, pero que a su vez esté afectado por perturbaciones de corto plazo que revierten a una media cero representadas por y_t . Se supone que el retorno instantáneo revierte a un retorno promedio de largo plazo dado por \bar{v} .

Este modelo, en su forma ajustada por riesgo, supone que el precio spot de un commodity, se puede representar por 3 factores estocásticos caracterizados por las siguientes ecuaciones⁶:

⁶ De acuerdo al autor de la presente tesis existe un error tipográfico en el artículo citado. La ecuación número 26 de Cortazar y Schwartz (2003) indica: $dv = a\left(\bar{v} - v - \lambda_3\right)dt + \sigma_3 dz_3^*(t)$. Para recuperar las expresiones para los contratos futuros en este modelo la ecuación debería expresar: $dv = \left(a(\bar{v} - v) - \lambda_3\right)dt + \sigma_3 dz_3^*(t)$

$$dS_t = (\nu_t - y_t - \lambda_1)S_t dt + \sigma_1 S_t dw_1^*(t) \quad (4.10)$$

$$dy_t = (-\kappa y_t - \lambda_2) dt + \sigma_2 dw_2^*(t) \quad (4.11)$$

$$d\nu_t = [a(\bar{\nu} - \nu_t) - \lambda_3] dt + \sigma_3 dw_3^*(t) \quad (4.12)$$

donde $(dw_1^*)(dw_2^*) = \rho_{12}dt$, $(dw_2^*)(dw_3^*) = \rho_{23}dt$ y $(dw_1^*)(dw_3^*) = \rho_{13}dt$.

4.4 Momentos de las variables de estado para procesos de precios de Commodities

Esta sección es la base para el desarrollo de dos aspectos de la presente investigación:

En primer lugar, la teoría de valorización de futuros y opciones exige conocer los momentos de las variables estocásticas subyacentes, bajo la medida ajustada por riesgo. Los resultados de la valorización teórica de futuros y opciones sobre commodities, serán utilizados en los capítulos cinco, seis y siete.

En segundo lugar, la simulación de montecarlo de los procesos de precios indicadas en los capítulos siguientes, se realiza en base a los momentos analíticos de los procesos de precios. Como se indica en el anexo D, la simulación de montecarlo permite emular la evolución de un proceso estocástico en el tiempo mediante la siguiente recursión:

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t} = E_t(\mathbf{x}_{t+\Delta t} | \mathbf{x}_t) + \Sigma_{\Delta t} \mathbf{z}_t \quad (4.13)$$

En la ecuación (4.13) $E_t(\bullet)$ es el operador esperanza, Δt es el intervalo temporal entre cada realización de las variables de estado, $\Sigma_{\Delta t}$ es la matriz de volatilidades del proceso en función del intervalo Δt , \mathbf{z}_t es un vector de variables aleatorias correlacionadas con media cero y matriz de varianza covarianza $\Omega_{\Delta t}$.

A continuación se presentan los momentos del logaritmo del precio spot para los modelos de la sección anterior. En estas expresiones T representa el instante en que se requiere conocer la distribución, t es el instante inicial, Q indica distribución ajustada por riesgo. El desarrollo completo de los valores esperados y matriz de varianza covarianza se presentan en el Anexo B.

En la siguiente tabla se presenta el valor esperado ajustado por riesgo del logaritmo del precio spot definido mediante $E_t^Q(x_T)$.

Modelo	$E_t^Q(x_T)$
Brennan y Schwartz (1985)	$x_t + (r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)$
Modelo 1 Schwartz (1997)	$e^{-\kappa(T-t)} x_t + (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \alpha^*$
Gibson y Schwartz (1990)	$x_t - \delta_t(1 - e^{-\kappa(T-t)}) / \kappa +$ $(r - \frac{1}{2}\sigma_1^2)(T - t) +$ $(1 - e^{-\kappa(T-t)} - \kappa(T - t))(\kappa\alpha - \lambda) / \kappa^2$
Cortazar y Schwartz (2003)	$x_t - y_t(1 - e^{-\kappa(T-t)}) / \kappa + v_t(1 - e^{-a(T-t)}) / a$ $+ (\bar{v} + \frac{\lambda_2}{\kappa} - \frac{\lambda_3}{a} - \lambda_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)(T - t)$ $+ (e^{-\kappa(T-t)} - 1) \frac{\lambda_2}{\kappa^2} + (e^{-a(T-t)} - 1)(a\bar{v} - \lambda_3) / a^2$

Tabla IV-1: Valor esperado del logaritmo del precio spot en modelos de commodities.

En la siguiente tabla se presenta la varianza del logaritmo del precio spot definida mediante $Var_t^Q(x_T)$.

Modelo	$Var_t^Q(x_T)$
Brennan y Schwartz (1985)	$\sigma^2(T-t)$
Modelo 1 Schwartz (1997)	$\sigma^2 \frac{1-e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa}$
Gibson y Schwartz (1990)	$(\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} - \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\kappa})(T-t)$ $+ \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^3}(1-e^{-2\kappa(T-t)})$ $+ \frac{2\sigma_2}{\kappa^2}(\sigma_1\rho - \frac{\sigma_2}{\kappa})(1-e^{-\kappa(T-t)})$
Cortazar y Schwartz (2003)	$\sigma_1^2(T-t) + \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} \left[(T-t) \frac{2}{\kappa} (1-e^{-\kappa(T-t)}) + \frac{1}{2\kappa} (1-e^{-2\kappa(T-t)}) \right]$ $+ \frac{\sigma_3^2}{a^2} \left[(T-t) \frac{2}{a} (1-e^{-a(T-t)}) + \frac{1}{2a} (1-e^{-2a(T-t)}) \right]$ $- \frac{2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\kappa} \left[(T-t) \frac{1}{\kappa} (1-e^{-\kappa(T-t)}) \right]$ $+ \frac{2\rho_{13}\sigma_1\sigma_3}{a} \left[(T-t) \frac{1}{a} (1-e^{-a(T-t)}) \right]$ $- \frac{2\rho_{23}\sigma_2\sigma_3}{a\kappa} \left[(T-t) \frac{1}{\kappa} (1-e^{-\kappa(T-t)}) - \frac{1}{a} (1-e^{-a(T-t)}) + \frac{1}{a+\kappa} (1-e^{-(a+\kappa)(T-t)}) \right]$

Tabla IV-2: Varianza del logaritmo del precio spot en modelos de commodities.

La definición de los momentos en el modelo 3 de Schwartz (1997) se pueden obtener de los momentos del modelo de Cortazar y Schwartz (2003) por esto se omiten en la tablas de resumen. Las transformaciones necesarias para obtener los momentos se presenta en el Anexo B.

4.5 Valorización de Contratos Futuros sobre el precio de un Commodity

Un contrato futuro escrito sobre un commodity, establece la obligación de comprar o vender cierta cantidad del producto en una fecha determinada a un precio establecido al inicio del contrato. Cada contrato futuro define las condiciones de entrega, sin embargo una proporción baja de estos contratos terminan en el despacho físico del producto, realizándose solamente una compensación por la diferencia de precio entre el precio spot y el precio del contrato.

Definiendo como $F(\mathbf{x}_t, t, T)$ el precio de un contrato futuro en la fecha t , con vencimiento en la fecha T y el vector \mathbf{x}_t de dimensión variable contiene todas las variables de estado que definen la dinámica del precio spot.

El precio de un contrato futuro escrito sobre un commodity con precio spot S_t , se define como el valor esperado bajo la medida ajustada por riesgo, del precio spot en el instante del vencimiento Cox et al. (1981).

De acuerdo a la definición anterior:

$$F(\mathbf{x}_t, t, T) = E_t^Q(S_T) \quad (4.14)$$

donde $E_t^Q(\cdot)$ representa el valor esperado bajo la probabilidad ajustada por riesgo Q

Un análisis alternativo para determinar la valorización de un contrato futuro, se puede realizar mediante la definición de una ecuación diferencial parcial como las que se indican en el Anexo A.

Una característica común a los modelos de precios de commodities presentados en este capítulo es que el precio spot S_t distribuye lognormal, bajo la medida ajustada por riesgo.

Una propiedad útil de la distribución lognormal, para la deducción de las fórmulas de valorización, es que el valor esperado de la variable z se expresa en función de los momentos de su logaritmo mediante la siguiente igualdad:

$$E(z) = e^{(E[\log(z)] + \frac{1}{2}Var[\log(z)])} \quad (4.15)$$

Por lo tanto para encontrar el precio teórico de un contrato futuro, basta reemplazar los momentos para el logaritmo del precio spot de acuerdo a la siguiente igualdad:

$$F(\mathbf{x}_t, t, T) = E_t^Q(S_T) = e^{E_t^Q(x_T) + \frac{1}{2}Var_t^Q(x_T)} \quad (4.16)$$

La expresión en (4.16) es bastante sencilla y permite valorizar contratos futuros sin resolver una ecuación diferencial parcial que en casos multifactoriales puede ser extenso.

4.6 Valorización de Opciones Europeas sobre el precio Spot de un Commodity

Las expresiones indicadas en esta sección, para la valorización de opciones europeas serán empleadas en el capítulo 5 en el estudio de bases de regresión para el algoritmo LSM.

Una opción europea es un instrumento financiero que entrega a su dueño la posibilidad comprar o vender el activo subyacente, en una fecha determinada a un precio denominado precio de ejercicio.

El perfil de pagos de una opción es convexo y estrictamente mayor a cero si es ejercitada, lo que implica una fuerte no linealidad en su valorización teórica.

Se indicará a $C(\mathbf{x}_t, K, t, T)$ como el precio de una opción de compra de un commodity, con precio de ejercicio K , fecha de valorización t , fecha de vencimiento T y el vector \mathbf{x}_t que contiene las variables de estado que definen el nivel del precio spot S_t en t y su dinámica.

El precio teórico de una opción europea es el valor esperado de sus pagos al vencimiento, bajo la medida ajustada por riesgo, descontados a la tasa libre de riesgo, la expresión para la valorización de la opción europea es:

$$C(\mathbf{x}_t, K, t, T) = E_t^Q [\text{Max}(S_T - K, 0)] e^{-r(T-t)} \quad (4.17)$$

La expresión en (4.17) es válida si se supone que la tasa de interés es constante e igual a r , en el periodo de tiempo $T - t$.

De acuerdo al desarrollo indicado en el Anexo C el precio de una opción europea escrita sobre el precio spot de un commodity se puede expresar en términos del precio de un contrato futuro del commodity con igual vencimiento que la opción y la varianza del logaritmo del precio spot en T :

$$C(\mathbf{x}_t, K, t, T) = [F(\mathbf{x}_t, t, T) N(d_1) - K N(d_2)] e^{-r(T-t)} \quad (4.18)$$

$$d_1 = \frac{\log(F(\mathbf{x}_t, t, T) / K) + \frac{1}{2} \text{Var}_t^Q(x_T)}{\sqrt{\text{Var}_t^Q(x_T)}} \quad (4.19)$$

$$d_2 = \frac{\log(F(\mathbf{x}_t, t, T) / K) - \frac{1}{2} \text{Var}_t^Q(x_T)}{\sqrt{\text{Var}_t^Q(x_T)}} \quad (4.20)$$

donde la función $N(z)$ representa la función normal estándar acumulada.

En el próximo capítulo se utilizan los resultados de futuros y opciones europeas para evaluar distintas especificaciones de funciones de regresión en el algoritmo LSM.

V ANÁLISIS DE BASES DE REGRESIÓN PARA PROCESOS DE PRECIOS DE COMMODITIES EN ALGORITMO LSM

En el capítulo tres se indicó que el algoritmo LSM para la valorización de opciones americanas puede ser visto como una extensión a técnicas de resolución anteriores. Sin embargo el principal obstáculo para una aplicación exitosa del algoritmo, es la identificación correcta de la función de transición o valor esperado de continuar con la opción.

En este capítulo se realiza un estudio de distintos aspectos de las funciones de transición de una opción americana y su estimación en el algoritmo LSM. En primer lugar, se indican las discusiones de la literatura en recientes investigaciones relativas a las funciones de regresión y se exponen las dificultades para la implementación del algoritmo en modelos multifactoriales. En segundo lugar, se analiza el ajuste del algoritmo LSM a la solución analítica de opciones europeas siendo implementado para modelos de precios de commodities en 1, 2 y 3 factores. En base a los resultados obtenidos se propone una función de regresión basada en contratos futuros que presenta niveles de ajuste equivalentes a especificaciones con mayores términos.

5.1 Bases de Regresión en algoritmo LSM: Especificaciones y Notación

En el artículo de Longstaff y Schwartz (2001) los autores no entregan pautas claras para realizar la búsqueda de funciones de regresión, más aún proponen que la convergencia del algoritmo se puede asegurar al tomar un elevado número de formas funcionales básicas que pertenezcan al espacio de Hilbert. La estrategia propuesta en Longstaff y Schwartz (2001) para especificar las funciones de regresión consiste en tomar una familia de funciones, como por ejemplo los polinomios de Chebyshev o potencias simples de las variables de estado simuladas, e ir agregando funciones de mayor orden a la especificación de modo que la valorización converja. Como se verá más adelante, el procedimiento para escalar las funciones de regresión puede significar un crecimiento exponencial en el número de términos que forman la base sobretodo si se consideran opciones con múltiples variables de estado.

Recientes investigaciones indican que el número de variables de estado o dimensiones subyacentes a la opción americana influyen en la robustez del algoritmo LSM. Stentoft (2001) y Moreno y Navas (2003) concluyen que en opciones de una

variable de estado la elección de las funciones base de regresión tiene un impacto despreciable en la valorización lo que coincide con lo expuesto en Longstaff y Schwartz (2001), lo anterior es válido para una función de regresión compuesta a lo menos por tres funciones básicas. Sin embargo, como indican Moreno y Navas (2003) al valorizar opciones con dos o más variables de estado al aumentar la especificación de las funciones de regresión se puede producir inestabilidad numérica generando algunas diferencias de valorización.

Según lo anterior la elección de bases de regresión debe presentar un balance en la especificación: si se considera un número de términos reducidos, por ejemplo 1 o 2, el ajuste a la función de transición o valor esperado de continuar será insuficiente. Por otra parte, al considerar un número elevado de funciones base pueden presentarse problemas de inestabilidad numérica en la resolución del problema de mínimos cuadrados.

Junto a los problemas de inestabilidad numérica al incrementar el número de funciones base, se encuentran dificultades prácticas en términos de la implementación y velocidad de resolución del algoritmo.

En el siguiente gráfico se presenta la evolución del número de funciones básicas versus el número de variables de estado de la opción si se siguiera la recomendación en Longstaff y Schwartz (2001): para cada variable de estado evaluar funciones básicas de orden n y agregar todos los productos cruzados de orden n a la especificación.

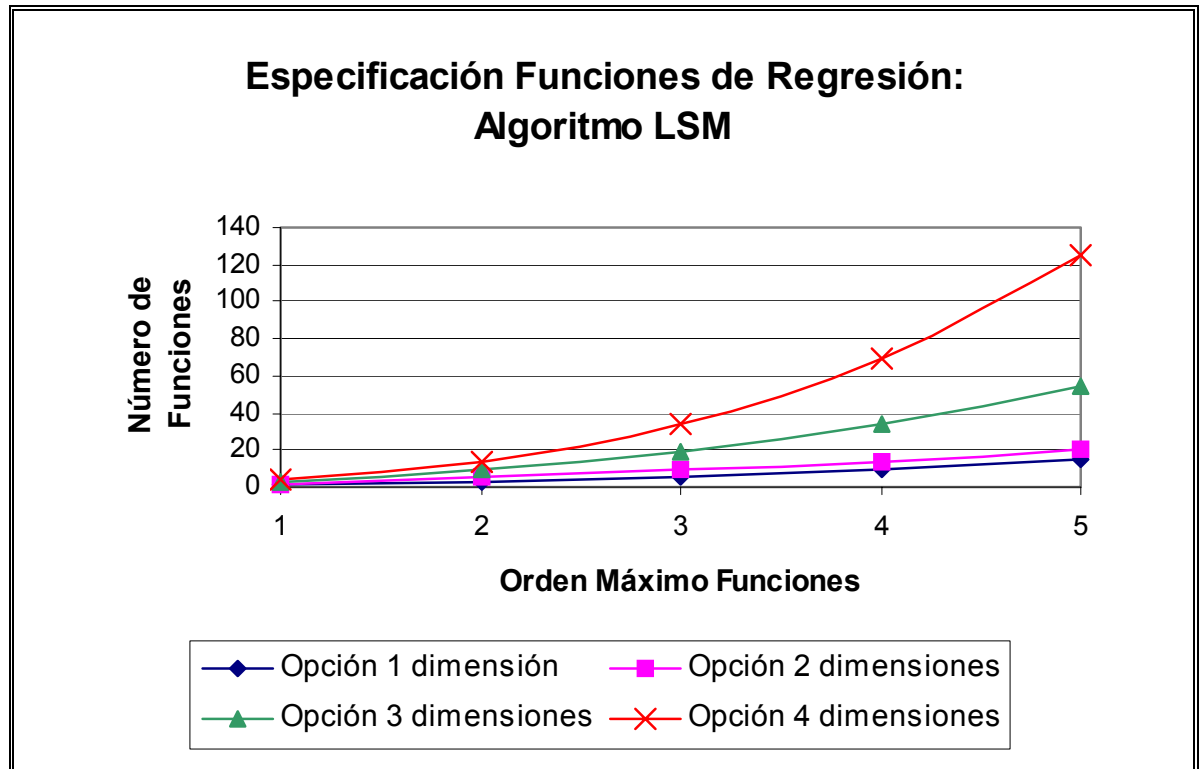


Figura 5-1: Crecimiento número de funciones de regresión en función del orden máximo de la base y las dimensiones subyacentes de la opción en propuesta original algoritmo LSM.

El gráfico anterior presenta el crecimiento en las funciones de regresión al aumentar las dimensiones de la opción e incrementar el orden de su especificación.

Una alternativa utilizada en el artículo Longstaff y Schwartz (2001) para la especificación de funciones de regresión es considerar una función de las variables de estado más simple, que sea consistente con el modelo y el tipo de opción valorizada. Con lo anterior, se logra reducir la complejidad de la solución conservando el poder explicativo de las función de regresión. Por ejemplo, al valorizar un swap con opción de cancelación en un modelo de dos dimensiones Longstaff y Schwartz (2001) agregan a la especificación las primeras tres potencias del valor del swap subyacente.

La reducción de dimensiones en la valorización de opciones americanas multifactoriales es un tema recurrente en la literatura. Por ejemplo, Barraquand y Martineau (1995) proponen colapsar las dimensiones de una opción americana de acuerdo a su función de pagos, con lo que independiente de las dimensiones del problema su solución quedará determinada por un problema unidimensional.

En esta investigación se propone colapsar las dimensiones de cualquier proceso de precios de commodities en torno a una función compuesta por potencias simples de contratos futuros. La especificación de la función de regresión con contratos futuros tiene ventajas teóricas y prácticas. En el aspecto teórico el contrato futuro representa el valor esperado del precio spot ajustado por riesgo, por lo que es razonable expresar la función de continuación o valor esperado de continuar de una opción americana en función del precio esperado o el contrato futuro. En el aspecto práctico, una especificación con contratos futuros acota el número de funciones bases y no se ve alterada al aumentar el número de factores estocásticos para la dinámica del precio spot logrando mantener constante las dimensiones de la función de regresión.

Siguiendo la notación introducida en el capítulo tres, la aproximación de la función de esperanza condicional o valor esperado de continuar está dada por:

$$\hat{G}_M(\omega, t_k) = \sum_{j=1}^M \hat{a}_j L_j(\mathbf{x}_{t_k}(\omega)) \quad (5.1)$$

Donde existen M funciones base L_j de las variables de estado $\mathbf{x}_{t_k}(\omega)$, en el instante t_k sobre la trayectoria ω .

Los coeficientes \hat{a}_j son estimados mediante un problema de mínimos cuadrados en cada oportunidad de ejercicio t_k . La regresión de mínimos cuadrados se especifica con los pagos de la opción descontados al instante t_k como variables dependiente (\mathbf{G}) y las M funciones base evaluadas en las variables de estado \mathbf{x}_{t_k} en todo el conjunto de trayectorias simuladas $\{\omega_i\}$ como regresores (\mathbf{L}). El problema de mínimos cuadrados tiene una solución conocida, para matrices no singulares:

$$\hat{\mathbf{a}} = [\mathbf{L}^T \mathbf{L}]^{-1} \mathbf{L}^T \mathbf{G} \quad (5.2)$$

La proposición en Longstaff y Schwartz (2001) consiste en tomar un gran número de funciones base ($M \rightarrow \infty$) así como de trayectorias simuladas, de forma que la función de esperanza condicional converja.

En las siguientes secciones se comparará el ajuste de distintas especificaciones de las funciones base en (5.1), incluyendo aquellas formadas por contratos futuros, a las funciones analíticas de opciones europeas sobre el precio spot de un commodity.

5.2 Opciones Europeas y Valor Esperado de Continuar

Si se define $C(\mathbf{x}_t, K, t, T)$ como el precio de una opción de compra de un commodity, con precio de ejercicio K , fecha de valorización t , fecha de vencimiento T y el vector \mathbf{x}_t que contiene las variables de estado que definen el nivel y dinámica del precio spot S_t en t , la expresión para la valorización de la opción europea es:

$$C(\mathbf{x}_t, K, t, T) = E_t^Q [Max(S_T - K, 0)] e^{-r(T-t)} \quad (5.3)$$

La expresión en (5.3) es válida si se supone que la tasa de interés es constante e igual a r e indica que el valor teórico de una opción de compra es el valor esperado de los flujos de caja al vencimiento, bajo la medida de probabilidad Q , descontados a la tasa libre de riesgo.

Una forma alternativa de interpretar la ecuación en (5.3), es que el valor de la opción es el valor esperado de continuar con la opción (sin ejercicios intermedios) entre t y T .

Recordando que el dueño de una opción americana en el instante t y próxima oportunidad de ejercicio en T , realiza de manera óptima la comparación entre el pago inmediato $VI_t(\omega, t)$ y el valor esperado de continuar $\hat{G}_M(\omega, t)$ sobre cada trayectoria ω . Es inmediato que si la próxima oportunidad de ejercicio T coincide con el vencimiento de la opción americana, el valor esperado de continuar $\hat{G}_M(\omega, t)$ en la penúltima oportunidad de ejercicio es por definición el valor de la opción europea en el instante t sobre la trayectoria ω y vencimiento en T .

La relación entre el valor de la opción europea descrita y el valor esperado de continuar se resume en la siguiente igualdad:

$$G(\omega, t) = C(\mathbf{x}_t(\omega), K, t, T) \quad (5.4)$$

Nótese que se ha eliminado el circunflejo indicador de estimación en la igualdad (5.4), ya que la función valor esperado de continuar se conoce con certeza en la penúltima oportunidad de ejercicio y corresponde al valor teórico de una opción europea.

Bajo el supuesto que la forma funcional $G(\omega, t)$ evolucionará de manera continua a través de las oportunidades de ejercicio presentes en una opción americana, se

puede concluir que la habilidad de las funciones de regresión para aproximar la función de esperanza condicional, se puede medir en un corte del dominio temporal de resolución, específicamente en la penúltima oportunidad de ejercicio, con respecto a la función de valorización de una opción europea.

5.3 Descripción Función Esperanza Condicional

En la sección anterior se estableció la equivalencia entre la función esperanza condicional (a no ser ejercida en la oportunidad de ejercicio) de una opción americana en la penúltima oportunidad de ejercicio y una opción europea. Si la función de continuación presenta un comportamiento “suave” a través de las oportunidades de ejercicio de una opción americana, será posible evaluar el ajuste de la función de regresión no sólo en un punto sino extenderlo a todo el dominio temporal de resolución.

De acuerdo al desarrollo del capítulo 3 las características de la función de continuación define globalmente la valorización de la opción. En el caso del algoritmo diferencias finitas la función de continuación es obtenida mediante la discretización directa de la ecuación diferencial que satisface el valor de la opción ,por lo tanto la aproximación del valor esperado de continuar es precisa.

En el caso del algoritmo LSM la aproximación de la función de continuación se realiza a partir de la regresión entre funciones de las variables de estado de la simulación de montecarlo y los pagos descontados de las trayectorias. Debido a la volatilidad propia de los métodos de montecarlo y a elección de las funciones de regresión la estimación de las funciones de continuación es menos precisa que en el método de diferencias finitas.

Para realizar la descripción de las funciones de esperanza condicional y comparar sus características se implementó la solución de una opción americana en 1 factor mediante diferencias finitas implícitas y mediante el algoritmo LSM, obteniendo las funciones de transición o esperanza condicional de la opción en distintos instantes del dominio de resolución.

Las siguientes figuras grafican las funciones de continuación en tres instantes de tiempo para una opción americana de compra sobre el precio spot del cobre con precio de ejercicio $K = 0,4$ dólares por libra. El proceso del precio spot contempla 1 factor estocástico y corresponde al indicado en Brennan y Schwartz (1985), con una tasa libre de

riesgo anual $r = 2\%$, retorno por conveniencia anual $\delta = 1\%$ y volatilidad de los retornos $\sigma = 24\%$.

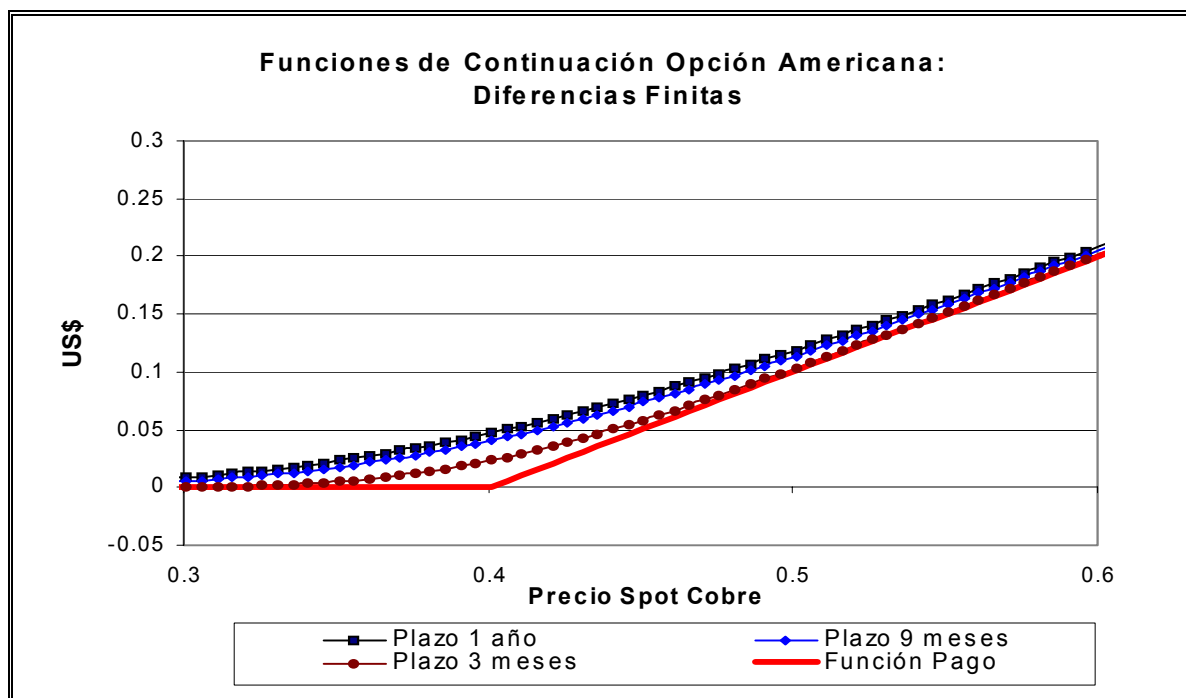


Figura 5-2: Funciones de Continuación en resolución opción americana sobre el precio spot 1 factor estocástico modelo Brennan y Schwartz (1985) mediante diferencias finitas implícitas. Plazo de la opción al vencimiento 1 año y precio de ejercicio 0,4 dólares. Parámetros proceso de precios $r = 2\%$, $\delta = 1\%$ y $\sigma = 24\%$.

Al valorizar la opción mediante diferencias finitas implícitas en un precio spot de 0.5 dólares por libra ésta tiene un valor 0.118 dólares. La malla utilizada en la resolución de la opción contempla 4000 pasos en la dirección temporal y 1000 en la dirección del precio spot.

La figura anterior establece la suavidad en las transiciones de las funciones de continuación o valor esperado de continuar en el método de diferencias finitas que aproxima directamente el valor de la función a través de la ecuación diferencial de valorización (ver Anexo A).

En la siguiente figura se grafican las funciones de continuación obtenidas con el algoritmo LSM a los plazos aproximados de 3 meses, 9 meses y 1 año a través de regresiones de mínimos cuadrados entre los pagos descontados de la opción y la función de regresión del vector de precios en las trayectorias con pago inmediato mayor que cero (in the money). De acuerdo al planteamiento original de Longstaff y Schwartz (2001) la elección de las trayectorias “in the money” busca ajustar de mejor manera aquellas observaciones que aportan información para la función de continuación. La función de regresión de este ejemplo contempla una constante, y las primeras tres potencias del precio spot, es decir:

$$g_{\omega} = a_0 + a_1 S_{\omega} + a_2 S_{\omega}^2 + a_3 S_{\omega}^3 \quad (5.5)$$

Los coeficientes a_i son estimados mediante la regresión de mínimos cuadrados.

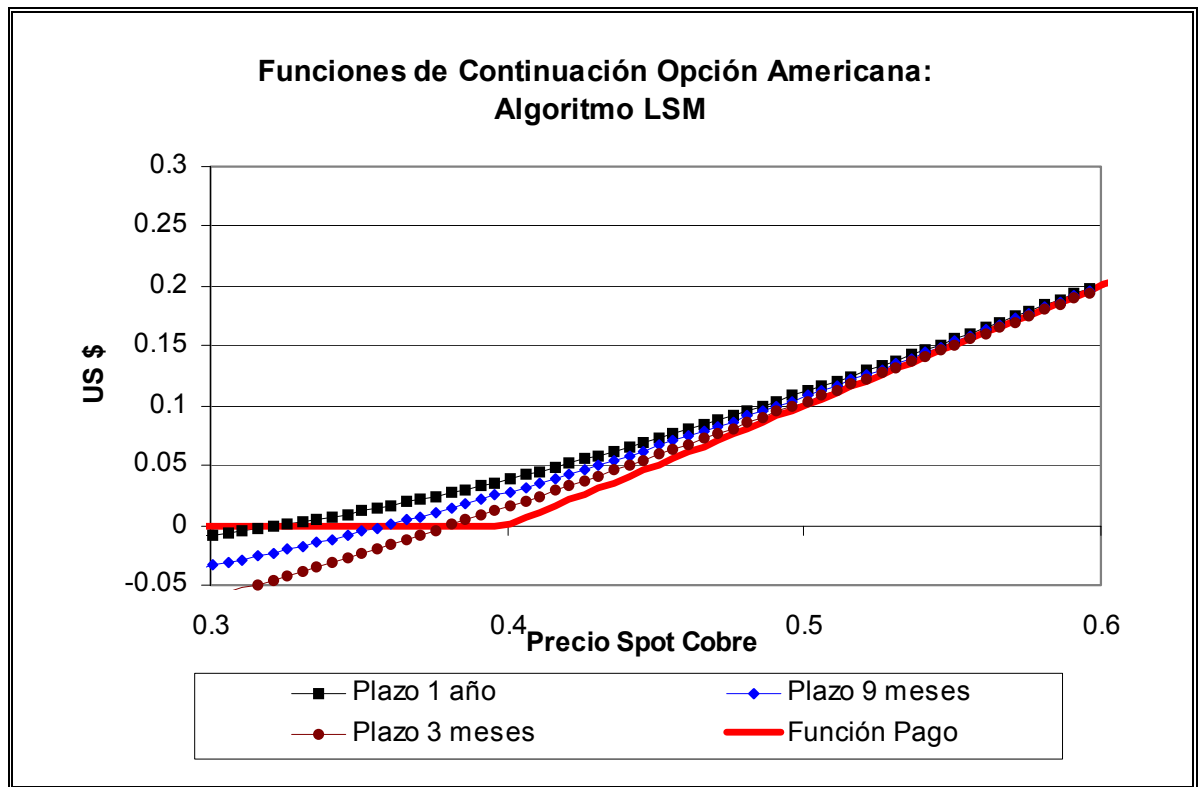


Figura 5-3: Funciones de Continuación mínimos cuadrados en resolución opción americana sobre el precio modelo Brennan y Schwartz (1985) mediante algoritmo LSM. Precio de ejercicio 0,4 dólares. Parámetros proceso de precios $r = 2\%$, $\delta = 1\%$ y $\sigma = 24\%$.

La figura indica un comportamiento típico de las funciones de continuación en el algoritmo LSM: para precios menores al precio de ejercicio de 0.4 dólares la función de continuación pierde validez debido a que ésta es utilizada sólo para precios mayores al precio de ejercicio al comparar el pago inmediato de la opción con la función de continuación. Es importante destacar que la regresión de mínimos cuadrados tampoco puede ajustar correctamente en precios menores al precio de ejercicio ya que en estos niveles de precios no tiene pares (g_{ω}, S_{ω}) para incorporar al problema de optimización ya que el algoritmo escoge solo trayectorias in the money.

Al valorizar la opción mediante el algoritmo LSM en un precio spot de 0.5 dólares por libra esta tiene un valor 0.117 dólares prácticamente idéntico al obtenido con diferencias finitas. El algoritmo LSM se implementó considerando 26 oportunidades de ejercicio, 80.000 simulaciones del precio spot (40.000 más 40.000 antitéticas).

En las figuras anteriores se puede observar el crecimiento progresivo de las funciones de transición en forma paralela al aumentar el plazo al vencimiento. Lo anterior permite establecer que las funciones de continuación o valor esperado de continuar evolucionan de manera “suave” a través de las oportunidades de ejercicio. Por lo tanto si se tiene una medida de ajuste en una oportunidad de ejercicio ésta permite evaluar la calidad de las funciones de regresión en todo el dominio temporal.

En la próxima sección se explica el procedimiento para determinar el nivel de ajuste de distintas funciones de regresión en la penúltima oportunidad de ejercicio con respecto a la función de valorización de una opción europea sobre el precio spot del cobre.

5.4 Ajuste de Funciones de Regresión a Opciones Europeas: Procedimiento

Como se ha establecido en secciones anteriores el algoritmo planteado en Longstaff y Schwartz (2001) requiere la especificación de una base de regresión o función de regresión para estimar la función valor esperado de continuar.

El problema de identificación se agudiza al aumentar el número de variables de estado estocásticas subyacentes al valor de una opción, ya que se deben considerar todas las combinaciones de funciones del espacio, en todas las variables de estado y en forma simultánea.

De acuerdo al desarrollo expuesto en la sección anterior la fórmula de valorización para una opción europea es exactamente la función valor esperado de continuar en la penúltima oportunidad de ejercicio. Como se indicó en la sección anterior dado que las funciones de continuación evolucionan de manera suave a través de las oportunidades de ejercicio se puede concluir que la habilidad de las funciones de regresión para aproximar el valor esperado de continuar se puede medir con respecto a la función de valorización de una opción europea.

Las etapas del procedimiento propuesto se inician con la realización de una simulación de Montecarlo para el proceso de precios obteniendo las matrices \mathbf{X}_t y \mathbf{X}_T . En segundo lugar se define un vector de pagos descontados \mathbf{G}_T de una opción de compra de precio de ejercicio K de dimensión igual al número de simulaciones realizadas (s), es decir:

$$\mathbf{G}_T = \text{Max}(S_T(\omega) - K, 0)e^{-r(T-t)} \quad (5.6)$$

donde r representa la tasa de interés en el período $T - t$.

Posteriormente se define la función de regresión mediante M funciones básicas \mathbf{L} , evaluadas en las variables de estado simuladas \mathbf{X}_t .

La regresión lineal indicada en el algoritmo LSM entre \mathbf{Y}_T y la función de regresión se especifica de la siguiente manera:

$$\mathbf{G}_T = \mathbf{L}(\mathbf{X}_t)\mathbf{a} + \mathbf{e} \quad (5.7)$$

En la ecuación (5.7) existen s ecuaciones, una para cada trayectoria ω :

$$g_t(\omega) = \mathbf{L}(\mathbf{x}_t(\omega))\mathbf{a} + e \quad (5.8)$$

El valor ajustado de la regresión se calcula como:

$$\hat{g}(\omega) = \hat{\mathbf{L}}(\mathbf{x}_t(\omega))\mathbf{a} = \sum_{j=1}^M \hat{a}_j L_j(\mathbf{x}_t(\omega)) \quad (5.9)$$

donde los coeficientes ajustados de la regresión son \hat{a}_j .

Finalmente el valor ajustado sobre la trayectoria ω , $\hat{g}(\omega)$ se compara directamente con el valor teórico de una opción europea en la trayectoria $C(\mathbf{x}_t(\omega), K, t, T)$

a través del error cuadrático medio (RMSE) obteniendo un indicador del nivel de ajuste de la función de continuación a la función de esperanza condicional analítica equivalente al precio de la opción europea.

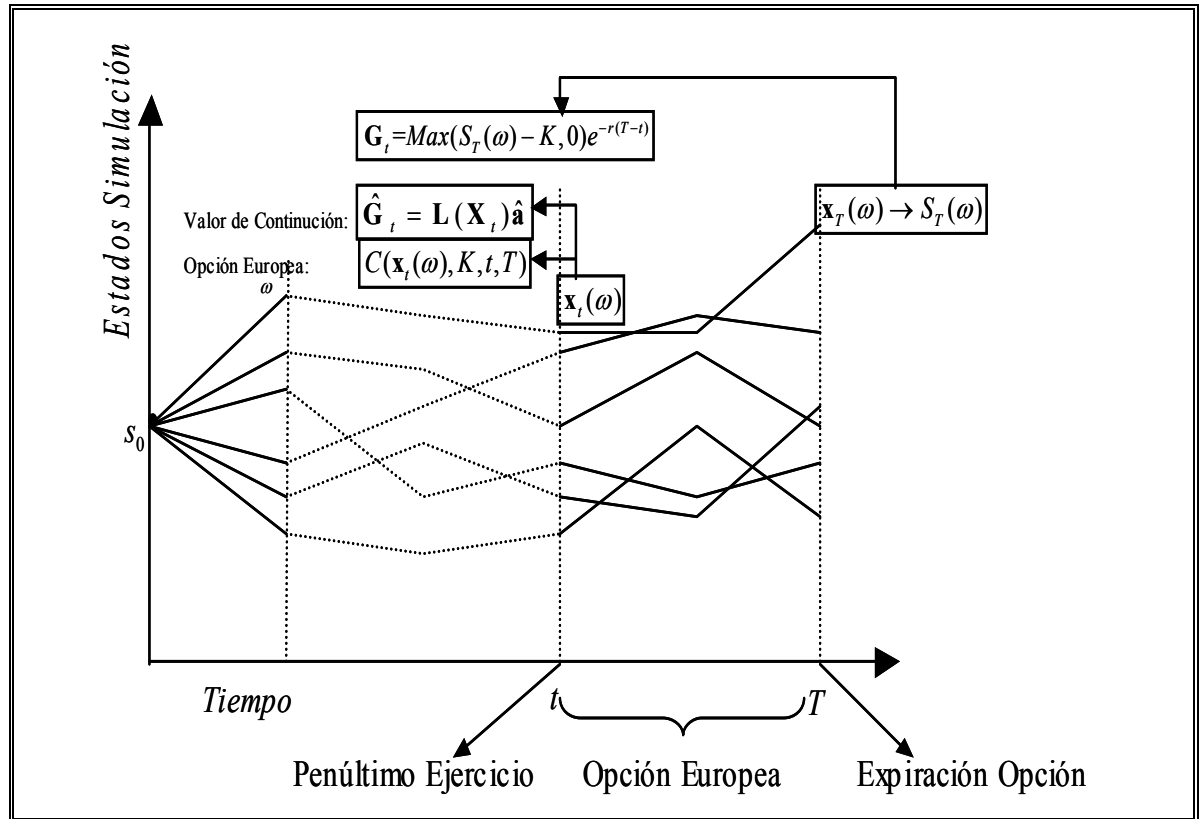


Figura 5-4: Esquema gráfico del procedimiento de ajuste funciones de continuación en algoritmo LSM a opciones europeas.

Es importante destacar que en el procedimiento descrito se consideran todas las trayectorias simuladas y no las “in the money”, ya que interesa el ajuste de la función de regresión en todo el dominio de pagos incluyendo aquellas trayectorias en que el pago inmediato es menor que cero. En la siguiente figura se muestra los vectores calculados por este procedimiento en el plano tiempo y espacio de simulación.

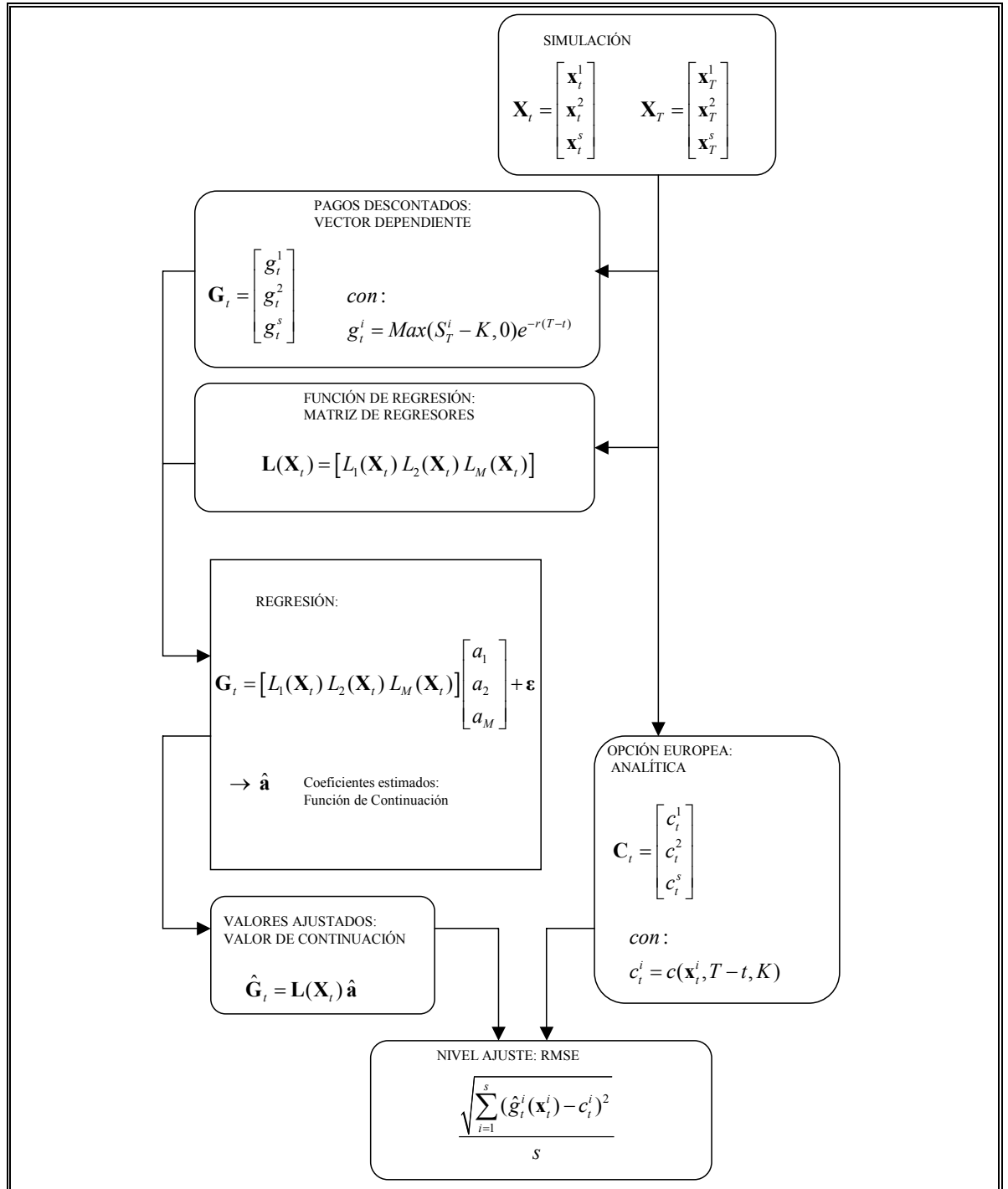


Figura 5-5: Esquema cálculo ajuste función de transición a opciones europeas.

Es posible identificar dos líneas principales del procedimiento: en la primera se realiza la regresión de mínimos cuadrados obteniendo la función de continuación. En la segunda se evalúa la expresión analítica de opciones europeas en las variables de estado del instante t , vencimiento en $T-t$ y precio de ejercicio K . Las dos líneas antes descritas terminan al realizar el cálculo del error cuadrático medio

De acuerdo a las figuras 5-4 y 5-4 para implementar el procedimiento de ajuste propuesto es necesario definir el horizonte de la simulación T , el instante de evaluación de la opción europea t y su precio de ejercicio K . Por otra parte, deben definirse las funciones de regresión $L(\mathbf{X}_t)$ en que se medirá el ajuste a la función de continuación. El conjunto de funciones utilizada en la implementación cuenta con 6 familias distintas de funciones base de las variables de estado. Las primeras cinco especificaciones corresponden a potencias ($P_n(x)$), polinomios de Legendre ($Le_n(x)$), Laguerre ($La_n(x)$), Hermite ($H_n(x)$) y Chebyshev ($C_n(x)$). El último caso analizado corresponde a potencias de contratos futuros identificados como ($F_n(x, \Delta t)$). En el Anexo E se pueden encontrar las expresiones para cada familia de bases de regresión.

5.5 Resultados Ajuste Funciones de Regresión

A continuación se muestran los resultados del procedimiento para medir el ajuste de funciones de regresión en el algoritmo LSM para procesos de precios de 1, 2 y 3 factores estocásticos. En particular, se presenta la implementación para los modelos del precio spot en Brennan y Schwartz (1985), Gibson y Schwartz (1990) y Cortazar y Schwartz (2003) utilizando distintas formas funcionales para las funciones de regresión y comparando su ajuste con una base de regresión compuesta por potencias simples de contratos futuros.

Las pruebas de bases se realizan de manera progresiva e incluyente. Lo anterior significa que el aumento de términos en la especificación, se realiza de manera incremental conservando la especificación anterior.

La evaluación se realiza en base a un plazo de simulación de 2 años ($T=2$) y el plazo de evaluación de la opción europea es de 6 meses ($t=0,5$). El número de simulaciones se fijó en 100.000 incluyendo el uso de variables antitéticas asegurando que el nivel del error de ajuste no se modifique con mayores simulaciones.

5.5.1 Ajuste Funciones de Regresión en Modelo de Brennan y Schwartz (1985)

Para realizar la comparación de desempeño de distintas bases de regresión, en la función de esperanza condicional se tomaron los siguientes parámetros del proceso de precios del cobre publicados en el artículo Brennan y Schwartz (1985):

Parámetro	Brennan y Schwartz (1985)
r	2%
δ	1%
σ	28%

Tabla V-1: Parámetros utilizados en el análisis de bases en modelo de Brennan y Schwartz (1985).

El precio spot inicial considerado es 0,65 dólares por libra de cobre, el precio de ejercicio de la opción a evaluar es de 0,5 dólares por libra de cobre y el plazo al vencimiento es de seis meses. Con lo anterior utilizando la expresión (4.18) el precio inicial de la opción europea a 6 meses es de 0,1564 dólares por libra de cobre.

El conjunto de funciones donde se mide el ajuste descrito en la sección anterior incluye los polinomios del precio spot inclusive el de orden n . Lo anterior se resumir en la siguiente expresión:

$$\hat{g}(S) = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^N \hat{a}_i f_i(S) \quad (5.10)$$

En la expresión (5.10) f_i representa el tipo de polinomio que conforma la función de regresión e i representa su orden. En el caso de los contratos futuros su plazo es de 6 meses equivalente al de la opción europea.

Se repitieron las regresiones para cada base utilizando sucesivamente especificaciones de mayor orden hasta el orden quinto.

En el siguiente gráfico se muestran los errores porcentuales de ajuste para las distintas bases polinomiales del precio spot:

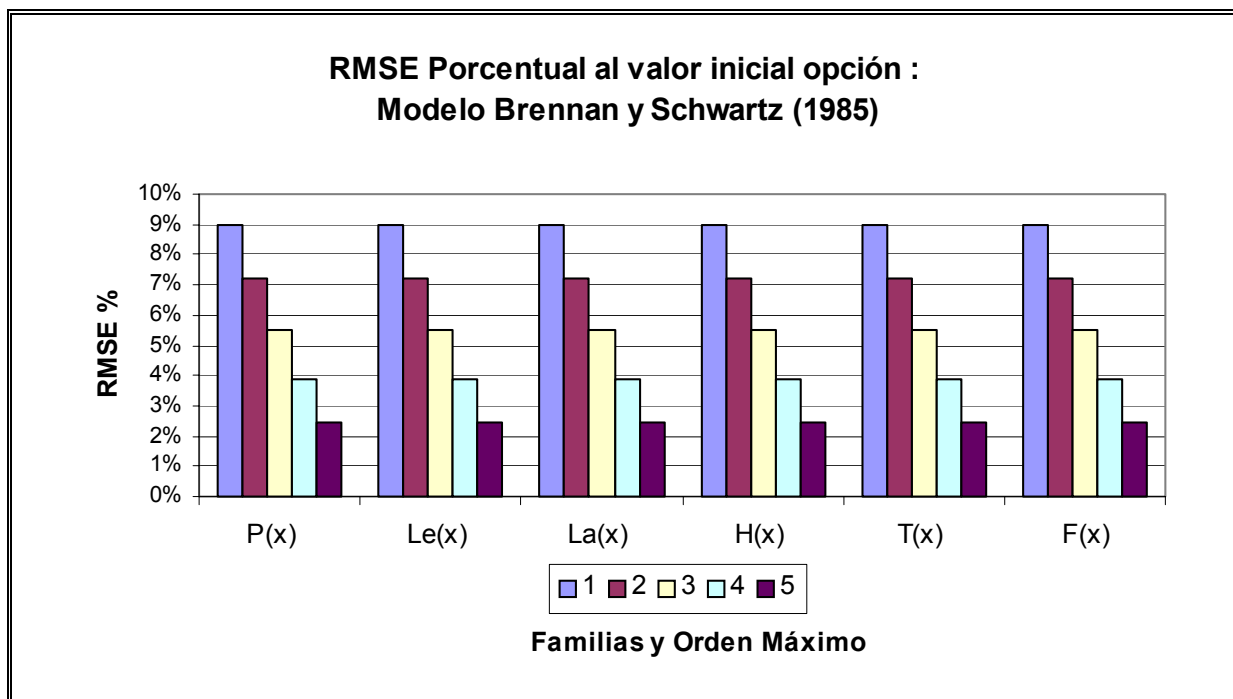


Figura 5-6: Comparación error de ajuste función de continuación en modelo de 1 factor Brennan y Schwartz (1985) en función del orden máximo de la base para las funciones potencias ($P_n(x)$), Legendre ($Le_n(x)$), Laguerre ($La_n(x)$), Hermite ($H_n(x)$), Chebyshev ($C_n(x)$) y contratos futuros ($F_n(x, \Delta t)$).

Los resultados indican la clara equivalencia entre las distintas familias de polinomios para lograr una representación adecuada de la función de continuación. Las diferencias en el ajuste entre cada familia de funciones son numéricamente despreciables lo que es esperable debido a que las bases generan un espacio funcional equivalente. Como el precio de un contrato futuro en este modelo de precios es el precio spot por una constante la implementación es equivalente, en sentido econométrico, a aquella realizada para potencias simples del precio spot.

Los resultados del gráfico anterior confirman la evidencia presentada en Longstaff y Schwartz (2001), Stentoft (2001) y Moreno y Navas (2003) que plantean que al valorizar derivados con el algoritmo LSM en un factor estocástico, la elección de la función de regresión no es significativa si se considera una especificación con orden máximo mayor o igual a 3.

5.5.2 Ajuste Funciones de Regresión en Modelo Gibson y Schwartz (1990)

Los resultados de ajuste en este modelo de dos factores estocásticos se obtienen utilizando los siguientes parámetros del proceso de precios del cobre publicados en el artículo Schwartz (1997):

Parámetro	Schwartz (1997)
r	0.06
κ	1.156
α	0.248
λ	0.256
σ_1	0.274
σ_2	0.280
ρ	0.818

Tabla V-2: Parámetros utilizados en el análisis de bases en modelo de Gibson y Schwartz (1990).

S_o	0,65
δ_o	0,1

Tabla V-3: Variables de estado utilizadas en el análisis de bases en modelo de Gibson y Schwartz (1990).

El precio de ejercicio de la opción europea es de 0,5 dólares por libra de cobre y una madurez de seis meses. Dados los valores de las variables de estado y utilizando la expresión (4.18) el valor de esta opción sobre el precio spot es de 0,1355 dólares por libra de cobre.

La especificación de bases de regresión en este modelo es más compleja que en el caso anterior, ya que además de evaluar los polinomios en dos dimensiones S y δ deben considerarse los productos cruzados entre los polinomios (Longstaff y Schwartz (2001)).

Para describir el ajuste de la función de continuación se tomaron las mismas familias de funciones que en el caso de 1 factor y corresponden a potencias, polinomios de Legendre, Laguerre, Hermite, Chebyshev y potencias de contratos futuros.

En el caso de las familias polinomiales se compara el efecto en el nivel de error de la incorporación de los productos cruzados en la especificación de las funciones de regresión. En el caso que no se consideran los productos cruzados la función de regresión se resume en:

$$\hat{g}_N(S, \delta) = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^N \hat{a}_i f_i(S) + \sum_{k=1}^N \hat{a}_k f_k(\delta) \quad (5.11)$$

En el caso en que se incorporan los productos cruzados se toman los productos tal que la suma de los ordenes de las funciones en S y δ sea igual menor o igual al orden máximo considerado. Por ejemplo, si el orden máximo de la base es dos la función de regresión se escribe de la siguiente forma:

$$\hat{g}_2(S, \delta) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 f_1(S) + \hat{a}_2 f_2(S) + \hat{a}_3 f_1(\delta) + \hat{a}_4 f_2(\delta) + \hat{a}_5 f_1(S) f_1(\delta) \quad (5.12)$$

Una expresión que resume lo anterior es:

$$\hat{g}_N(S, \delta) = \hat{a}_0 + \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^k \hat{a}_{ik} f_i(S) f_{k-i}(\delta) \quad (5.13)$$

En el caso de las funciones de regresión basadas en contratos futuros la expresión del valor esperado de continuar se escribe:

$$\hat{g}_N(S, \delta) = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^N \hat{a}_i F(S, \delta, \Delta t)^i \quad (5.14)$$

El siguiente gráfico compara las especificaciones de la función de regresión polinomiales con y sin productos cruzados en términos porcentuales al valor inicial de la opción en el modelo de dos factores, considerando polinomios hasta orden máximo cinco:

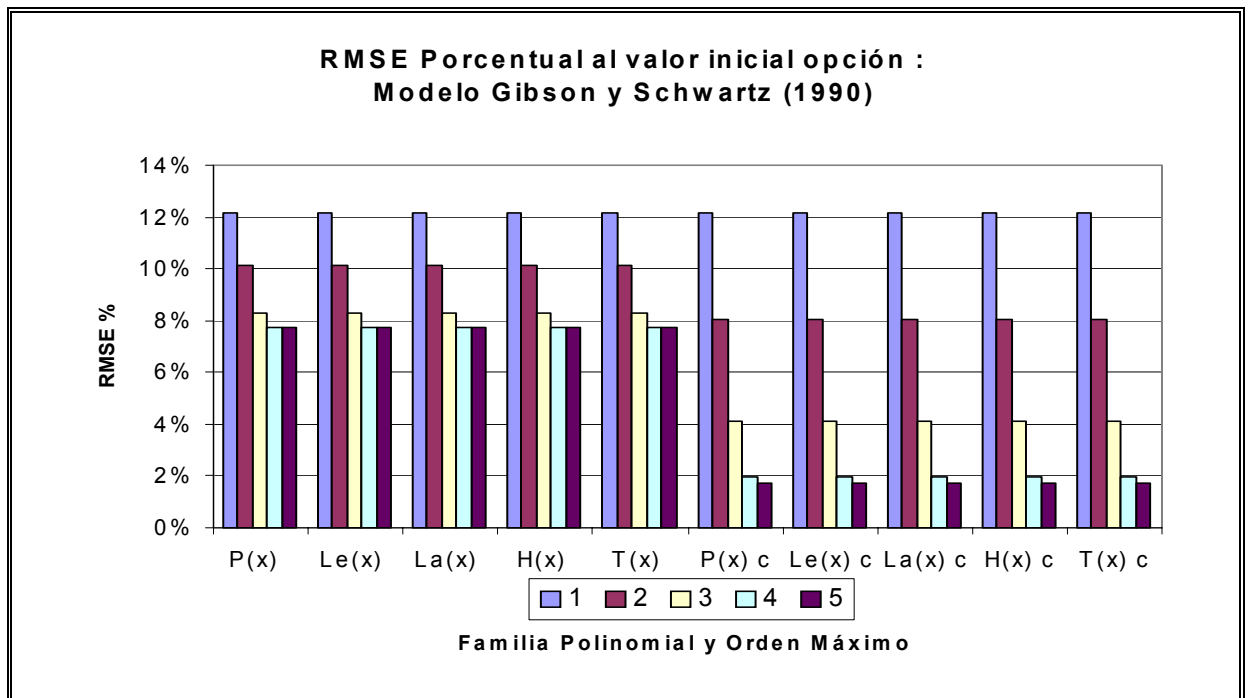


Figura 5-7: Comparación error de ajuste función de continuación en modelo de 2 factores Gibson y Schwartz (1990) en función del orden máximo de la base para las funciones

potencias, Legendre, Laguerre, Hermite, Chebyshev. El incluir productos cruzados se indica por la letra c.

De la figura anterior se confirma la recomendación hecha por Longstaff y Schwartz (2001) respecto de la necesidad de incluir términos cruzados en la especificación de la base de regresión en presencia de procesos multifactoriales. Lo anterior es comprobado por Gravel (2003) que incluye el producto cruzado $S\delta$ al resolver la evaluación de un pozo de petróleo presentado en Cortazar y Schwartz (1998) mediante el algoritmo LSM.

La siguiente figura compara el desempeño de la función de regresión formada por polinomios de Chebyshev incluyendo los productos cruzados con aquella formada por potencias de contratos futuros en el modelo de 2 factores:

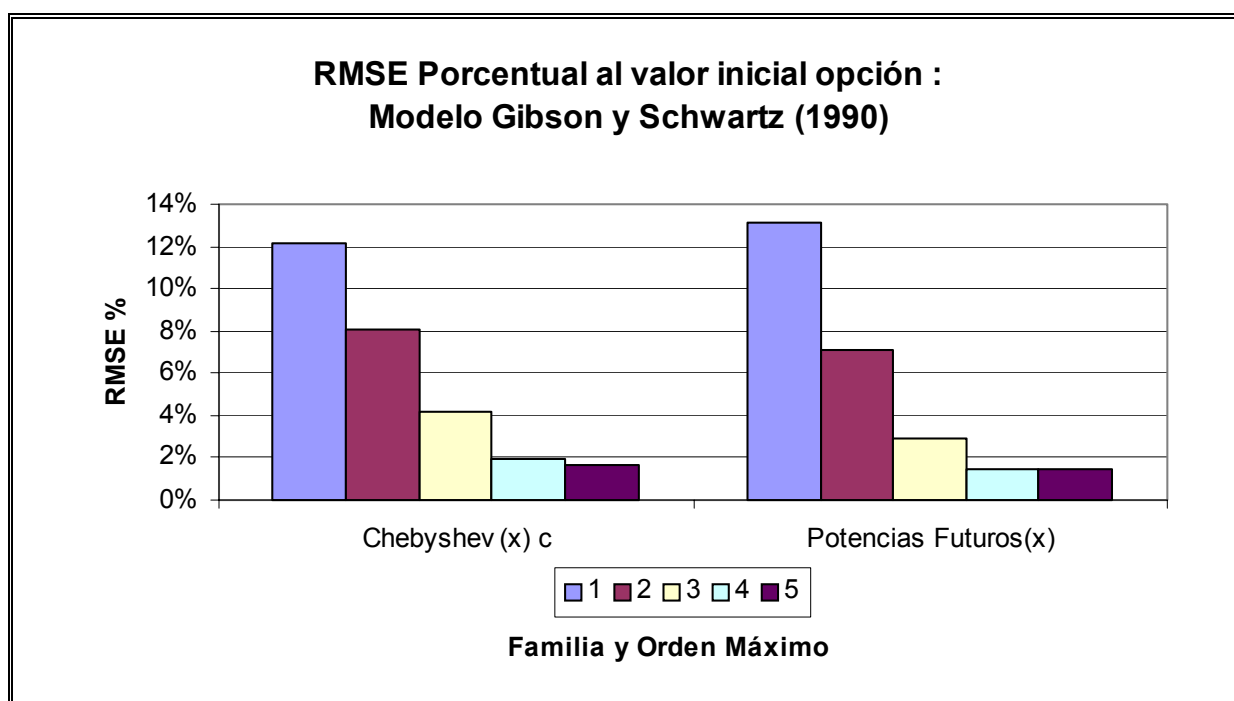


Figura 5-8: Comparación error de ajuste función de continuación en modelo de 2 factores Gibson y Schwartz (1990) en función del orden máximo de la base para polinomios de Chebyshev con productos cruzados y potencias de contratos futuros teóricos.

De la figura se desprende que las potencias de contratos futuros son una buena representación de la función de continuación para un modelo de 2 variables de estado y permiten una función de regresión con menos términos para un nivel de error similar o inferior. En la siguiente figura se grafica el nivel de ajuste versus el número de términos en la función de regresión:

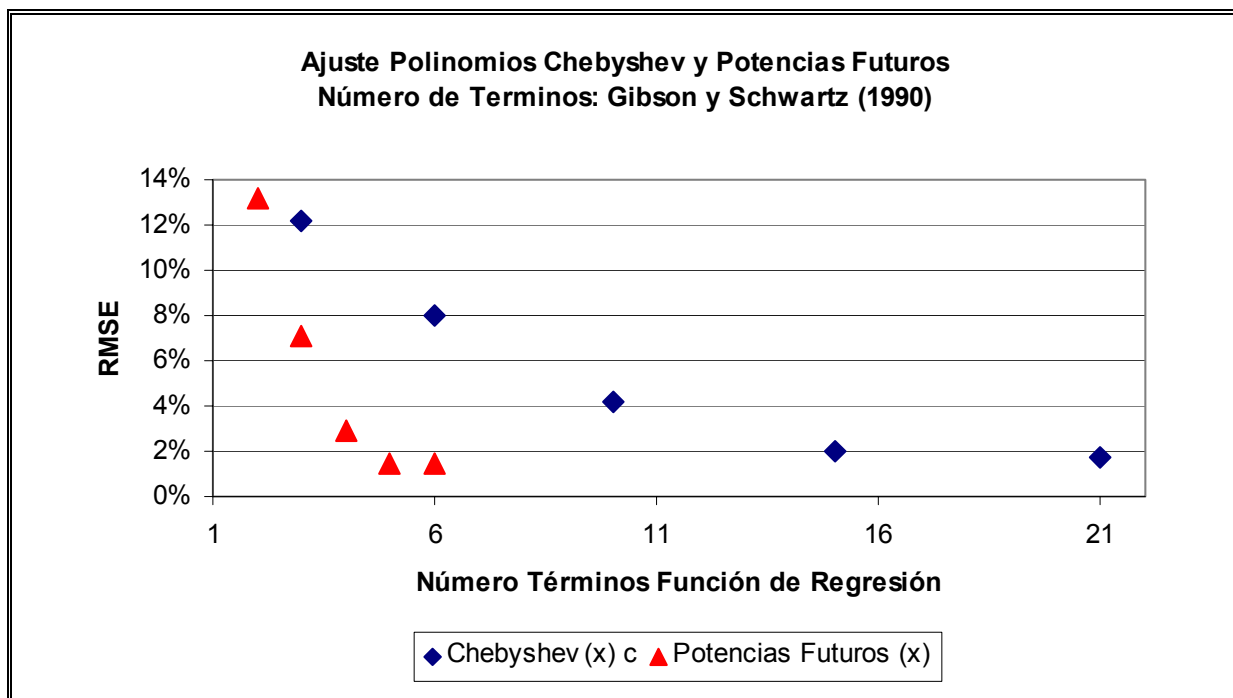


Figura 5-9: Comparación error de ajuste función de continuación en modelo de 2 factores Gibson y Schwartz (1990) en función del número de regresores presentes en la base para las funciones Chebyshev (con productos cruzados) y potencias de contratos futuros.

De la figura anterior se puede apreciar el buen desempeño de una base formada con potencias de contratos futuros facilitando la implementación y la velocidad de las regresiones.

En la siguiente sección se muestran los resultados de ajuste para el modelo Cortazar y Schwartz (2003) de 3 factores estocásticos.

5.5.3 Ajuste Funciones de Regresión en Modelo de Cortazar y Schwartz (2003)

Para realizar la implementación del estudio de bases en este modelo se utilizaron los siguientes parámetros estimados para el caso del cobre:

Parámetros en Cortazar y Schwartz 2003	Valor
λ_1	-0,032
λ_2	-0,392
λ_3	- 0,193
a	1,379
κ	2,85
\bar{v}	-0,007
σ_1	0,257
σ_2	0,906
σ_3	0,498
ρ_{12}	0,215
ρ_{23}	0,841
ρ_{13}	-0,229

Tabla V-4: Parámetros utilizados en el análisis de bases en modelo de Cortazar y Schwartz (2003).

Las variables de estado⁷ iniciales del proceso de precios son las siguientes:

S_o	0,65
y_o	0,47
v_o	0,42

Tabla V-5: Variables de estado utilizadas en el análisis de bases en modelo de Cortazar y Schwartz (2003).

La opción que se definió para realizar la comparación contempla un precio de ejercicio de 0,5 dólares por libra de cobre y una madurez de seis meses. El valor de la opción europea utilizando la expresión (4.18) considerando las variables de estado iniciales es de 0,1652 dólares por libra de cobre.

El conjunto de funciones definido para medir el nivel de ajuste es análogo al caso de 2 factores pero en una dimensión adicional. Se utilizan las familias de funciones correspondientes a potencias, polinomios de Legendre, Laguerre, Hermite, Chebyshev y potencias de contratos futuros. En el caso de las familias polinomiales se compara el efecto en el nivel de error de la incorporación de los productos cruzados en la especificación de las funciones de regresión.

En el caso que no se consideran los productos cruzados la función de regresión se resume en:

⁷ La estimación de parámetros y variables de estado fueron realizadas por Lorenzo Naranjo en el proyecto FONDEF I102400 con los que se estiman diariamente estructuras de precios de contratos futuros en el sitio web www.riskAmerica.com

$$\hat{g}_N(S, y, \nu) = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^N \hat{a}_i f_i(S) + \sum_{k=1}^N \hat{a}_k f_k(y) + \sum_{l=1}^N \hat{a}_l f_l(\nu) \quad (5.15)$$

En el caso en que se incorporan los productos cruzados se toman los productos tal que la suma de los ordenes de las funciones en S , δ y ν sea igual o menor o igual al orden máximo considerado. En general la función de regresión se puede escribir como:

$$\hat{g}_N(S, y, \nu) = \hat{a}_0 + \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{k-j} \hat{a}_{ijk} f_i(S) f_j(y) f_{k-i-j}(\nu) \quad (5.16)$$

En el caso de las funciones de regresión basadas en contratos futuros la expresión del valor esperado de continuar se escribe:

$$\hat{g}_N(S, y, \nu) = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^N \hat{a}_i F(S, y, \nu, \Delta t)^i \quad (5.17)$$

El siguiente gráfico compara las especificaciones de la función de regresión polinomiales con y sin productos cruzados en términos porcentuales al valor inicial de la opción en el modelo de dos factores, considerando polinomios hasta orden máximo cinco:

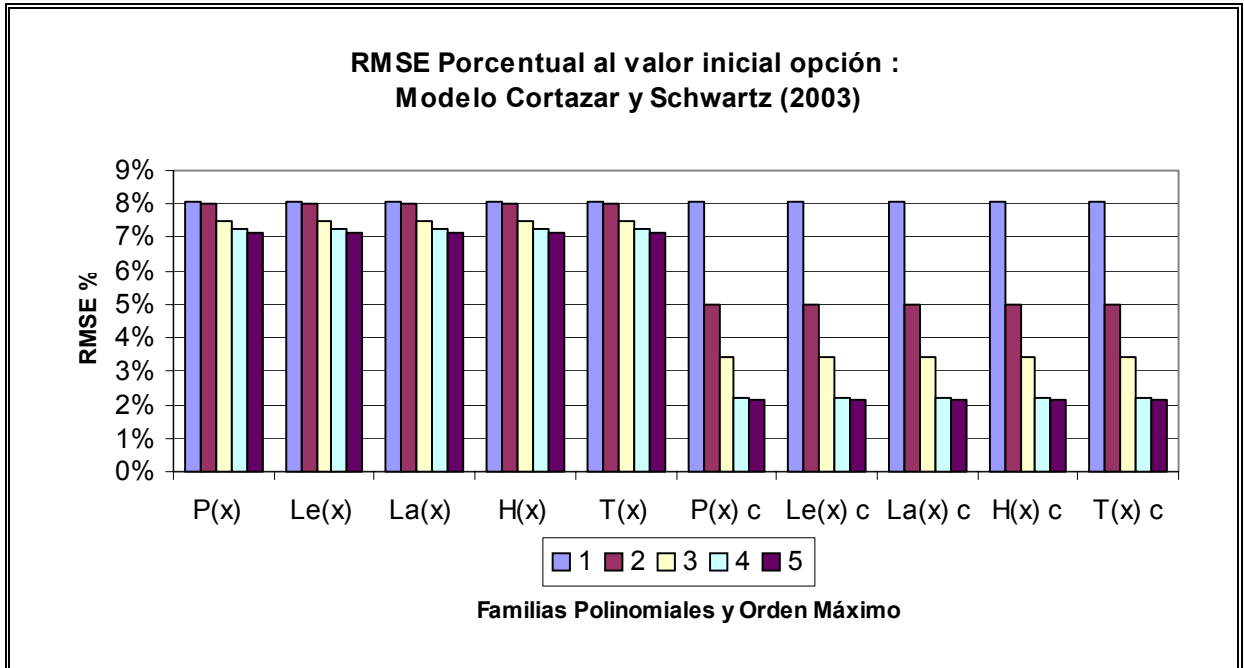


Figura 5-10: Comparación error de ajuste función de continuación en modelo de 3 factores Cortazar y Schwartz (2003) en función del orden máximo de la base para las funciones potencias, Legendre, Laguerre, Hermite, Chebyshev. El incluir productos cruzados se indica por la letra c.

En forma equivalente a los resultados de dos factores, en la figura se aprecia que no hay diferencias entre las familias polinomiales. Sin embargo, existe un pronunciado descenso en el error de ajuste al incluir los productos cruzados en la especificación.

La siguiente figura compara los ajustes de la función de regresión formada por polinomios de Chebyshev incluyendo los productos cruzados con aquella formada por potencias de contratos futuros en el modelo de 3 factores:

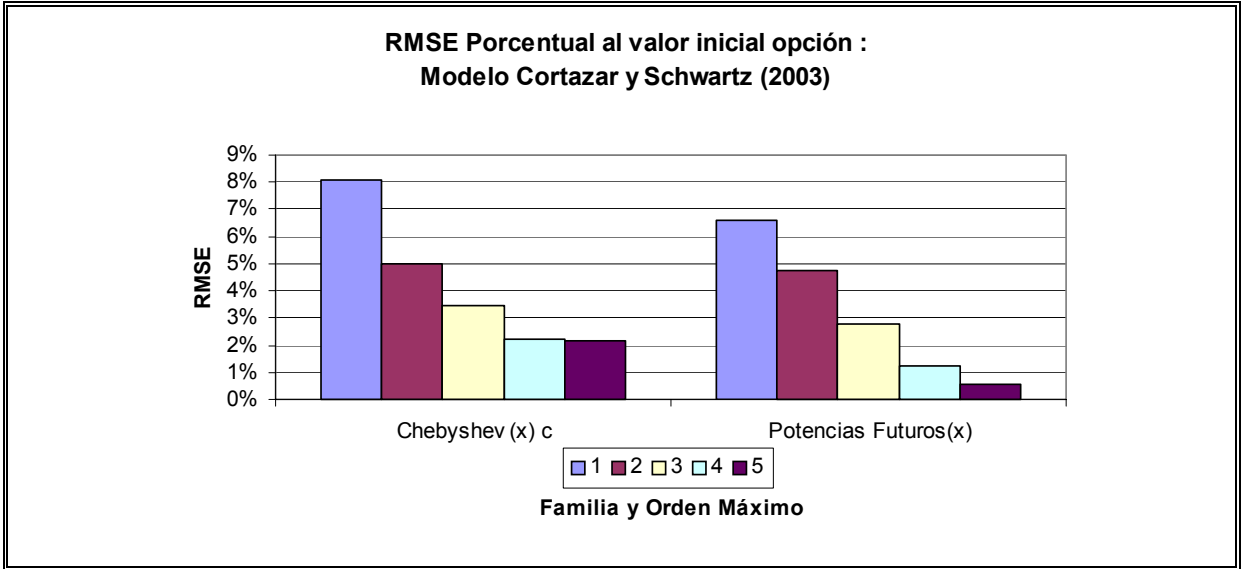


Figura 5-11: Comparación error de ajuste función de continuación en modelo de 3 factores Cortazar y Schwartz (2003) en función del orden máximo de la base para los polinomios de Chebyshev con productos cruzados y potencias de contratos futuros evaluados en cada trayectoria.

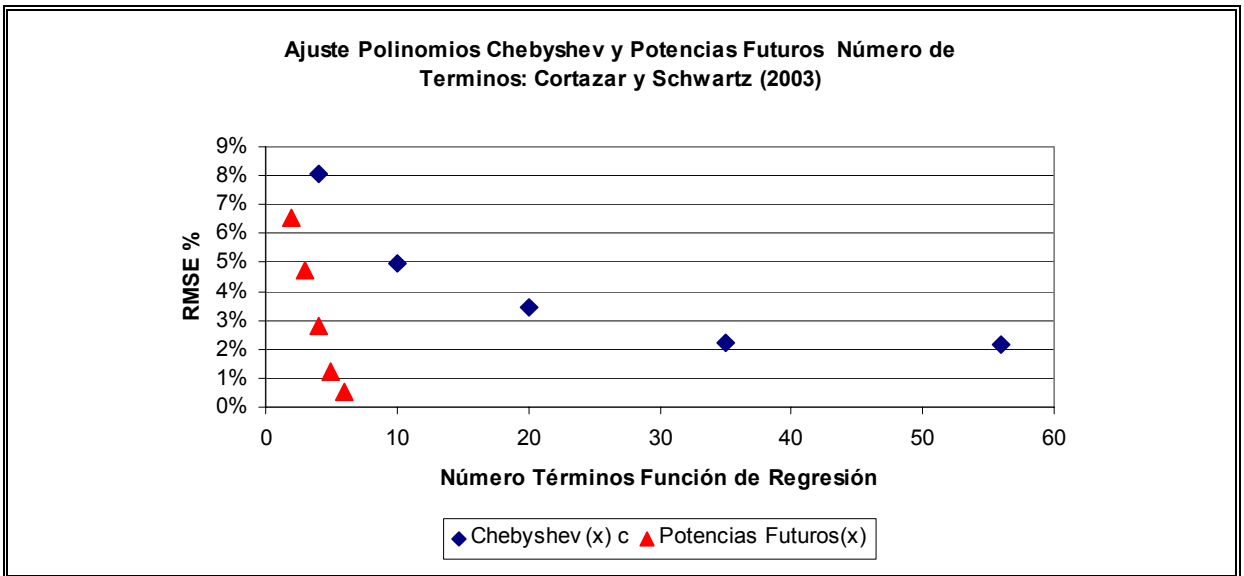


Figura 5-12: Comparación error de ajuste función de continuación en modelo de 3 factores Cortazar y Schwartz (2003) en función del número de regresores presentes en la base para las funciones Chebyshev (con productos cruzados) y potencias de contratos futuros.

De la figura se aprecia la diferencia en número de términos de las funciones de regresión para niveles de precisión equivalentes de error. Destaca el rápido crecimiento del número de regresores al aumentar el orden de especificación lo que hace poco recomendable la indicación de Longstaff y Schwartz (2001) para postular las funciones de continuación en procesos multifactoriales.

En este capítulo se estudiaron las características de la función de continuación de una opción americana y el enfoque del algoritmo LSM para su aproximación por medio de una regresión de mínimos cuadrados. Se propuso medir el ajuste de la función de regresión en la penúltima oportunidad de ejercicio a través de la expresión analítica de una opción europea. Finalmente, se estableció la necesidad de contar con funciones de regresión (bases) en el algoritmo LSM que permitan acotar el número de regresores por el crecimiento exponencial que presentan las bases en procesos multifactoriales. Los resultados demuestran que en el caso de modelos multifactoriales de precios de commodities las potencias de contratos futuros son una buena alternativa en términos del error de ajuste para ser usada como función de regresión.

En el próximo capítulo se evalúa una opción de inversión descrita en Schwartz (1997) mediante Opciones Reales y el algoritmo LSM. Las evaluaciones serán comparadas con las soluciones analíticas y de diferencias finitas presentadas en el artículo y se utilizarán las funciones de regresión del algoritmo LSM basadas en contratos futuros.

VI RESOLUCION DE LA OPCION DE INVERSION EN SCHWARTZ (1997) MEDIANTE LSM

En este capítulo se expone la resolución mediante el algoritmo LSM de una opción de inversión en recursos naturales. El objetivo de este capítulo es validar la estrategia de resolución basada en el algoritmo LSM utilizando una función de regresión formada por potencias de contratos futuros comparándola con la solución mediante diferencias finitas presentada en el artículo Schwartz (1997). El proyecto evaluado asume que la firma es dueña de la concesión de explotación de un yacimiento por un periodo fijo de años, considerando que la administración del yacimiento puede iniciar su explotación en cualquier instante y una vez hecha la inversión producir continuamente hasta agotar el recurso.

6.1 Descripción Opción de Inversión en Schwartz (1997)

En esta sección se plantea el proyecto evaluado en Schwartz (1997), el cual consiste en una mina de cobre simplificada. La mina puede producir una onza de cobre al final de cada año durante N años consecutivos. La inversión inicial requerida para la puesta en marcha de la explotación es K y el costo unitario de producción por onza de cobre es C .

La opción de inversión define que el dueño del yacimiento puede comenzar la producción en cualquier momento. Sin embargo, una vez iniciada la producción no puede disminuirla o detenerla durante N años.

Dado que la producción puede iniciarse en cualquier instante, la opción de inversión es de tipo americano.

Para evaluar este activo debe definirse el valor presente de la inversión. Considerando la existencia de un mercado de futuros de cobre, el valor presente de la inversión en un instante t puede obtenerse utilizando esta información:

$$VP_t = \sum_{\bar{T}=t}^{N+t} P(r, \bar{T}, \mathbf{x}_t) - C \sum_{\bar{T}=t}^{N+t} B(r, \bar{T}) - K \quad (6.1)$$

donde $P(r, \bar{T}, \mathbf{x}_t)$ representa el valor presente de la venta de una unidad del commodity en el año \bar{T} , sabiendo que el nivel de la tasa de interés es r y \mathbf{x}_t representa el

vector de estados que define los valores en instante t del modelo de precios escogido para la dinámica del commodity. Si el precio de un contrato futuro del commodity es $F(\mathbf{x}_t, t, T)$ se cumple:

$$P(r, \bar{T}, \mathbf{x}_t) = F(\mathbf{x}_t, t, \bar{T})B(r, \bar{T}) \quad (6.2)$$

$B(r, \bar{T})$ es el factor de descuento al plazo \bar{T} bajo la tasa libre de riesgo. En el caso en que la tasa es constante se cumple:

$$B(r, \bar{T}) = e^{-r\bar{T}} \quad (6.3)$$

Si el dueño del yacimiento minero decide llevar a cabo la explotación en el instante t la ecuación (6.1) entrega el valor presente neto de esta decisión. El problema a resolver consiste en determinar la estrategia óptima de ejercicio, es decir cuál es el nivel óptimo de las variables de estado \mathbf{x}_t^* tal que se maximice el valor de la explotación. Si por ejemplo se considera el modelo de precios de Brennan y Schwartz (1985) en la ecuación (4.1) la estrategia óptima quedará determinada por un precio crítico para cada oportunidad de ejercicio i definido como S_i^* .

La solución de la opción de inversión contemplada en Schwartz (1997) se obtiene planteando la ecuación diferencial parcial para el valor de la opción. Como se indica en el anexo A siempre es posible determinar la ecuación diferencial por argumentos de arbitraje o equilibrio. La formulación de la ecuación diferencial y la condición de borde en (6.1) dependen del modelo de precios utilizado, las dimensiones del problema resultante serán las variables de estado que definen el precio del commodity y el tiempo.

Si por ejemplo se considera el modelo de precios en Cortazar y Schwartz (2003) y definiendo el valor del proyecto con la opción de inversión como V la ecuación diferencial parcial que establece su solución es:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sigma_1^2 S^2 V_{SS} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 V_{yy} + \frac{1}{2}\sigma_3^2 V_{vv} + \sigma_1\sigma_2\rho_{12}SV_{Sy} + \sigma_1\sigma_3\rho_{13}V_{Sv} + \sigma_2\sigma_3\rho_{23}V_{yv} + \\ & (v-y-\lambda_1)SV_S + (-\kappa y - \lambda_2)V_y + (a(\bar{v}-v) - \lambda_3)V_v - V_T = rV \end{aligned} \quad (6.4)$$

sujeta a la condición de borde:

$$V = \text{Max}(VP_T, 0) \quad (6.5)$$

Los parámetros y variables de estado se definen en las ecuaciones (4.10) a la (4.12) y r es la tasa de interés libre de riesgo. La condición de borde en (6.5) se obtiene utilizando la expresión (6.1).

La opción de inversión descrita en Schwartz (1997) es un ejemplo estilizado de una mina de cobre. Se asume que la mina puede producir una libra de cobre a fin de cada año y que sus reservas se agotan al cabo de diez años de producción (N). El costo de producción anual (C) es de 0,4 dólares y la inversión inicial (K) requerida es de dos dólares.

6.2 Resolución General de la Opción de Inversión en Schwartz (1997) mediante LSM

A continuación se describe la implementación del algoritmo LSM a la valorización del proyecto de inversión propuesto por Schwartz (1997).

El primer paso en el algoritmo es la simulación de montecarlo del proceso de precios escogido. Para definir la simulación es necesario precisar el intervalo de tiempo (Δt) entre oportunidades de ejercicio de la opción de inversión y el horizonte total a simular T . Como se indica en el anexo D, la simulación de montecarlo permite emular la evolución de un proceso estocástico en el tiempo mediante la siguiente recursión:

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t} = E_t(\mathbf{x}_{t+\Delta t} | \mathbf{x}_t) + \Sigma_{\Delta t} \mathbf{z}_t \quad (6.6)$$

En la ecuación (6.6) $E_t(\bullet)$ es el operador esperanza, Δt es el intervalo temporal entre cada realización de las variables de estado, $\Sigma_{\Delta t}$ es la matriz de volatilidades del proceso en función del intervalo Δt , \mathbf{z}_t es un vector de variables aleatorias correlacionadas con media cero y matriz de varianzas covarianzas $\Omega_{\Delta t}$.

6.2.1 Implementación del Algoritmo: Resolución Backward

Una vez realizada la simulación, esta concesión se valoriza mediante la resolución del problema “hacia atrás” en el tiempo, identificando un valor de estado, un valor de transición y un valor de nodo.

El valor de estado, en la oportunidad de ejercicio t_K sobre la trayectoria ω que contiene el vector de variables de estado $\mathbf{x}_{t_K}(\omega)$, está definido por el valor presente de la explotación si se decidiera realizar la inversión en el instante t_K :

$$V_{\omega, t_K}^{estado} = VP_t(\mathbf{x}_{t_K}(\omega)) = \sum_{\bar{T}=1}^N P(r_{t_K}(\omega), \bar{T}, \mathbf{x}_{t_K}(\omega)) - C \sum_{\bar{T}=1}^N B(r_{t_K}(\omega), \bar{T}) \quad (6.7)$$

La función $P(\bullet)$ es el valor presente de una unidad del commodity entregado en \bar{T} . La función $B(\bullet)$ es el factor de descuento a \bar{T} . C representa el costo de extracción anual del mineral.

La opción de inversión puede definirse considerando que el dueño de la concesión realiza una inversión inicial de monto K y obtiene el valor presente de las ventas menos los costos de producción. La estructura de pagos descrita es idéntica a una opción de compra con precio de ejercicio K , escrita sobre el valor presente de las ventas menos los costos del yacimiento.

Para la fecha de expiración del contrato (la cual se denota por T) el valor del proyecto se conoce con certeza para cualquier trayectoria simulada. Este valor corresponde al valor de nodo y se define mediante la siguiente ecuación:

$$V_{\omega, T}^{nodo} = \text{Max}(VP_T(\mathbf{x}_{t_K}(\omega)) - K, 0) \quad (6.8)$$

Donde K simboliza la inversión de desarrollo necesaria para explotar durante N años el yacimiento.

Para el tiempo $t = T - 1$ debe estimarse el valor esperado de continuar ($V_{\omega, t_K}^{transicion}$) sólo para aquellas trayectorias en las cuales el valor intrínseco de la opción es positivo ($VP_t(\mathbf{x}_{t_K}(\omega)) > K$), ya que es para estas simulaciones donde existe la verdadera disyuntiva del ejercicio de la opción. Para las demás trayectorias la elección de continuar resulta trivial, debido a que el ejercicio de la opción implicaría la realización de un proyecto con VAN negativo.

El valor de transición se obtiene mediante el valor ajustado de la regresión en el algoritmo LSM. La regresión se especifica mediante el vector \mathbf{G} como variable dependiente de la regresión que contiene los valores presentes (valores de nodo) en el

instante t_k (provenientes de oportunidades de ejercicio más lejanas). Las variables independientes se obtienen evaluando las M funciones base en las variables de estado \mathbf{x}_{t_k} en las trayectorias simuladas $\{\omega_i\}$ y se representan mediante la matriz de regresores \mathbf{L} . Los valores de transición están dados por el valor ajustado de la regresión, en cada trayectoria considerada:

$$\hat{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{L}}(\mathbf{X}_t) \quad (6.9)$$

La ecuación (6.9) indica un valor de transición para cada trayectoria simulada:

$$V_{\omega, t_k}^{transicion} = \hat{g}(\omega) = \hat{\mathbf{L}}(\mathbf{x}_t(\omega)) \quad (6.10)$$

Como se determinó en el capítulo anterior una base conveniente para efectuar la regresión de mínimos cuadrados en (6.9), es aquella formada por potencias simples de las fórmulas de valorización teóricas de contratos futuros.

La actualización de los valores de nodo de cada trayectoria se realiza mediante la comparación óptima entre: iniciar el proyecto de explotación hoy o elegir continuar con la opción de inversión al próximo periodo. Si el valor de desarrollo inmediato o valor de estado es mayor que el valor de transición entonces el dueño de la concesión inicia las actividades, en caso contrario el valor de nodo en esa trayectoria es simplemente el valor presente de un desarrollo realizado en tiempos posteriores $g(\omega)$:

$$V_{\omega, t_k}^{nodo} = \begin{cases} V_{\omega, t_k}^{estado} \\ g(\omega) \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{cases} V_{\omega, t_k}^{transicion} < V_{\omega, t_k}^{estado} \\ V_{\omega, t_k}^{transicion} > V_{\omega, t_k}^{estado} \end{cases} \quad (6.11)$$

El siguiente paso de la resolución es descontar los valores de nodo obteniendo un nuevo vector \mathbf{G} . Los pasos anteriores se repetirán hasta el tiempo inicial $t = 1$.

Para determinar el valor del proyecto, se promedian los valores de nodo obtenidos en $t = 1$, en las s trayectorias y se descuentan al periodo inicial. El valor de nodo promedio descontado en $t = 0$, se compara con el valor de desarrollo inmediato:

$$V_0(\mathbf{x}_0) = \text{Max}\left(\frac{1}{S} \sum_{\omega=1}^S g(\omega)e^{-r\Delta t}, VP_0(\mathbf{x}_0) - K\right) \quad (6.12)$$

En la ecuación (6.12), la expresión: $VP_0(\mathbf{x}_0) - K$ corresponde al valor del yacimiento sin considerar la opción de posponer la inversión, en cambio, $\frac{1}{S} \sum_{\omega=1}^S g(\omega) e^{-r\Delta t}$ representa el valor del proyecto que incluye esta opción.

6.2.2 Implementación del Algoritmo: Resolución Forward

La evaluación de este proyecto de inversión puede ser realizada avanzando en el tiempo a través de las trayectorias simuladas. La información requerida para una evaluación Forward, es aquella que entrega la política óptima de inversión en cada oportunidad de ejercicio.

La política de ejercicio óptimo en este problema, puede ser especificada en base a las funciones de transición (valor esperado de continuar) o en base a un conjunto de variables críticas de ejercicio. Ambos enfoques requieren de los resultados de las regresiones lineales provenientes de la resolución backward.

El algoritmo de resolución avanza por cada trayectoria hasta la oportunidad de ejercicio final comparando el valor de realización inmediato con el valor de continuar. Si se decide realizar la inversión el valor presente de realización es descontado al instante inicial. Si el proyecto no ha sido ejecutado en instantes antes de la última oportunidad de ejercicio, este se ejecuta si el valor presente es positivo.

Los valores presentes obtenidos en todas las trayectorias son descontados al instante inicial y se promedian para tener un estimador del valor del proyecto.

El enfoque de resolución hacia adelante en el tiempo, permite validar los resultados obtenidos en la etapa inicial hacia atrás. Además, con la resolución hacia adelante es posible calcular de manera simple indicadores de la valorización como por ejemplo, tiempo de vida media de la opción, proporción de trayectorias con instante de ejercicio menor o mayor a cierto plazo y las distribuciones del valor del proyecto en distintas oportunidades de ejercicio.

6.3 Opción de Inversión Perpetua: Evaluación Analítica en Modelo de Brennan y Schwartz (1985) y algoritmo LSM.

La opción de inversión descrita en Schwartz (1997) puede ser resuelta de manera analítica considerando un horizonte de tiempo infinito y el modelo de precios de Brennan y Schwartz (1985).

En este caso el valor presente del proyecto desarrollado, se obtiene considerando el precio de un contrato futuro dado por la expresión en (4.16):

$$VP(S) = S \sum_{T=1}^N e^{-\delta T} - C \sum_{T=1}^N e^{-rT} - K = S\beta_1 - \beta_2 \quad (6.13)$$

Si $V(S)$ representa el valor del proyecto que incluye la opción de posponerlo, es posible deducir siguiendo el procedimiento descrito en el anexo A.1 la ecuación diferencial ordinaria que satisface:

$$\frac{1}{2} V_{ss} \sigma^2 S^2 + V_s S(r - \delta) - rV = 0 \quad (6.14)$$

sujeta a la condición de borde:

$$V(S) \geq \text{Max}(S\beta_1 - \beta_2; 0) \quad (6.15)$$

El problema anterior tiene una solución analítica dada por las siguientes expresiones:

$$V(S) = (S^* \beta_1 - \beta_2) \left(\frac{S}{S^*} \right)^d \quad (6.16)$$

donde

$$S^* = \frac{\beta_2 d}{\beta_1 (d - 1)} \quad (6.17)$$

$$d = \frac{1}{2} - \frac{r - \delta}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{r - \delta}{\sigma^2} \right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \quad (6.18)$$

S^* representa el precio crítico de inversión.

Los parámetros utilizados en Schwartz (1997) para evaluar la opción consideran un retorno por conveniencia (δ) igual a 0,118, una volatilidad de los retornos del precio (σ) igual a 0.266 y una tasa de interés continua (r) de 6%.

La solución del valor del proyecto $V(S)$, junto al valor presente neto sin opción de postergación se presentan en la siguiente figura:

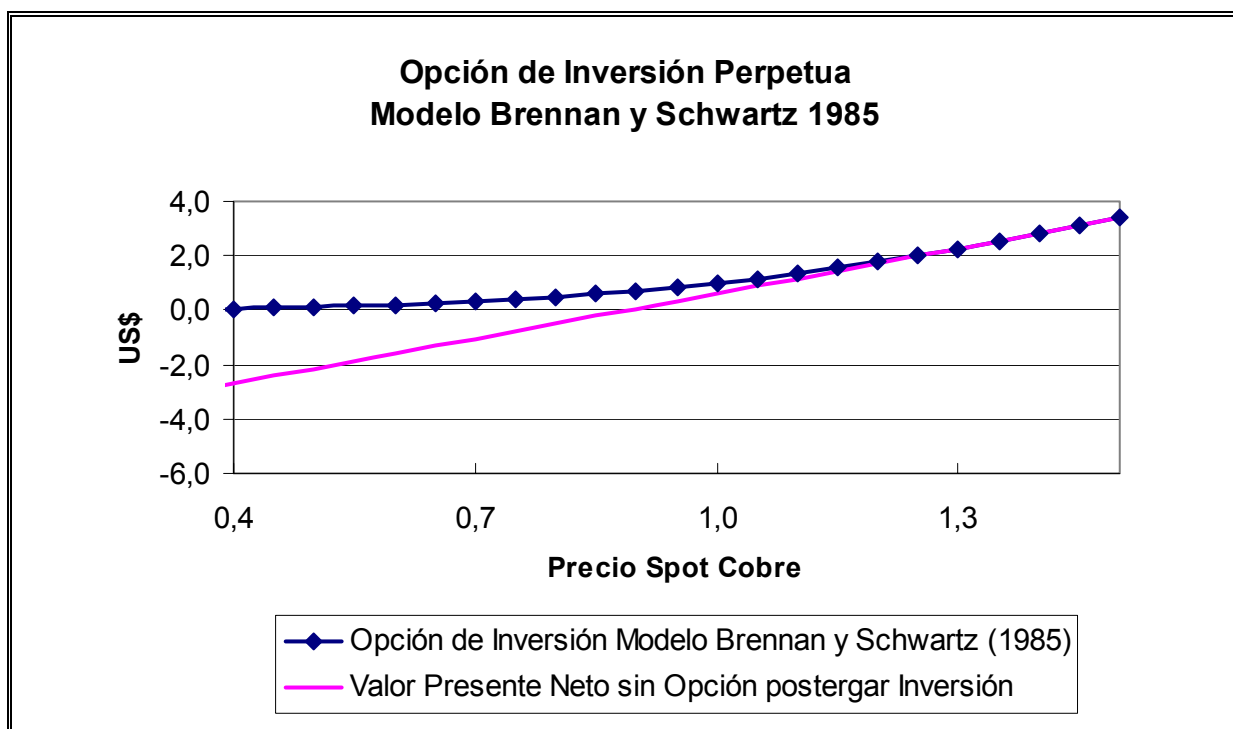


Figura 6-1: Valor de la opción de inversión en Schwartz (1997) y valor presente sin opción de postergación, considerando un tiempo de concesión infinito y el modelo del precio spot de Brennan y Schwartz (1985).

La figura muestra que la solución de opciones reales converge al valor presente neto para niveles elevados de precios. El precio crítico de ejercicio de la opción es US\$ 1,3 utilizando la expresión en (6.17) para precios superiores a S^* siempre es óptimo iniciar la explotación y ambas soluciones coinciden.

A continuación se compara la solución analítica del problema con la solución entregada por el algoritmo LSM. El plazo de concesión se fijó en 30 años para aproximar

la opción perpetua analítica. El número de trayectorias simuladas es 30.000, y las oportunidades de ejercicio son anuales. Las bases de regresión empleadas son las tres primeras potencias de contratos futuros a 1 año plazo y una constante.

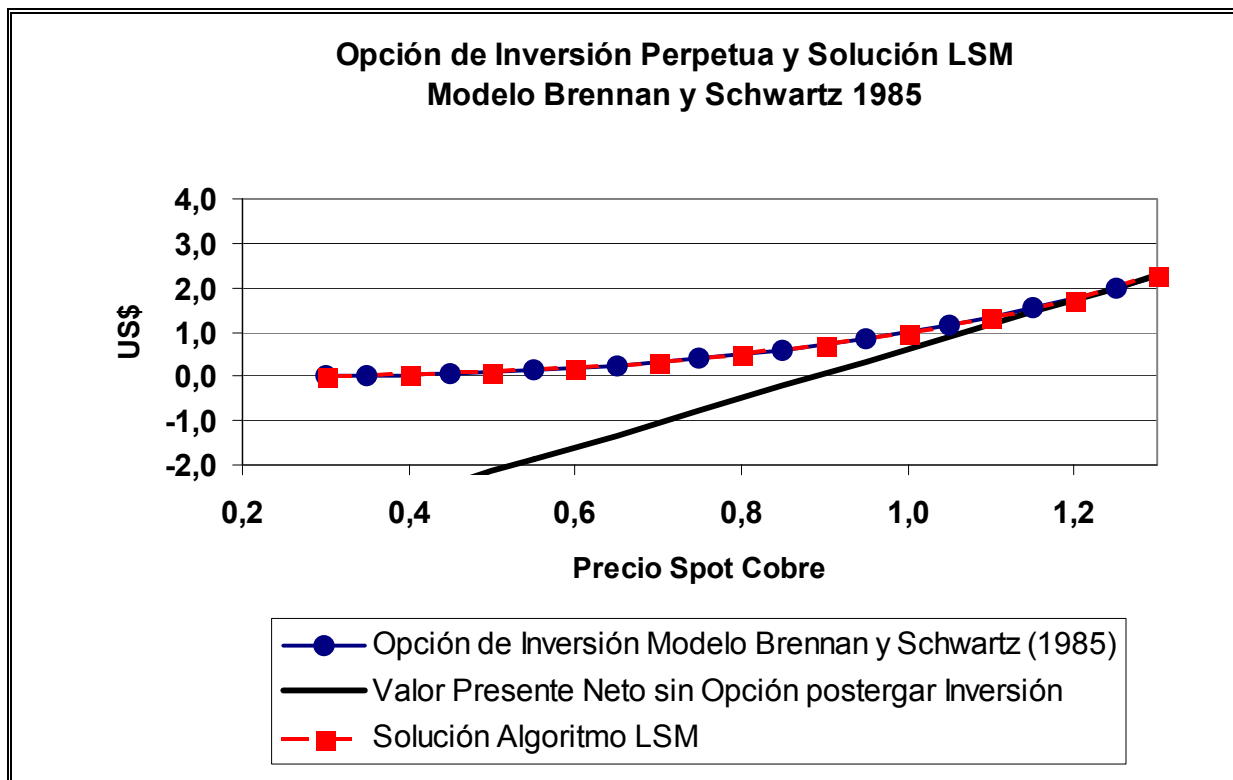


Figura 6-2: Comparación solución analítica de la opción de inversión en Schwartz (1997) y solución algoritmo LSM en el modelo de precios de Brennan y Schwartz (1985), orden máximo 3 en función de regresión potencias contratos futuros 30.000 simulaciones, 30 años plazo.

Precio Cobre (US\$/lb.)	Valor Opción (US\$) Analítica.	Valor Opción (US\$) según algoritmo LSM.	Diferencia (%)
0,3	0,0216	0,0218	0,54%
0,4	0,0539	0,0539	-0,12%
0,5	0,1095	0,1096	0,10%
0,6	0,1953	0,1941	-0,61%
0,7	0,3185	0,3209	0,75%
0,8	0,4866	0,4872	0,13%
0,9	0,7071	0,7054	-0,24%
1,0	0,9879	0,9783	-0,98%
1,1	1,3369	1,3099	-2,02%
1,2	1,7621	1,7186	-2,47%

Tabla VI-1: Comparación solución analítica de la opción de inversión en Schwartz (1997) y solución algoritmo LSM en el modelo de precios de Brennan y Schwartz (1985), orden máximo 3 en función de regresión potencias contratos futuros 30.000 simulaciones, 30 años plazo.

De la tabla anterior se desprende el excelente desempeño del algoritmo en una especificación de bases de regresión simple, formada por potencias de contratos futuros a 1 año. El error cuadrático medio (RMSE) porcentual entre la solución analítica y el algoritmo LSM es 0,35%.

En la siguiente tabla se presentan los errores cuadráticos medios para distinto número de simulaciones y orden máximo de las funciones de regresión.

RMSE (%) Evaluación Opción Inversión Algoritmo LSM					
Orden Máximo Función de Regresión Potencias Futuros					
Simulación	2	3	4	5	6
10.000	0,80	0,98	1,04	0,89	1,19
20.000	0,6	0,76	0,62	0,49	0,54
30.000	0,48	0,35	0,34	0,37	0,42

Tabla VI-2: Error cuadrático medio porcentual en solución opción de inversión Schwartz (1997) por medio del algoritmo LSM en el modelo de precios de Brennan y Schwartz (1985) en función del número de simulaciones y orden máximo función de regresión potencias contratos futuros. Evaluación obtenida para 30 años plazo.

El nivel de precisión del algoritmo promedio está en torno al 1% y de la tabla anterior se concluye que el error disminuye al aumentar el número de trayectorias simuladas y no se ve afectado mayormente por el orden máximo considerado en la función de regresión. Lo anterior es consistente con los resultados del capítulo anterior y radica en la simplicidad del modelo de precios de Brennan y Schwartz (1985).

6.4 Opción de Inversión a Plazo Fijo: Evaluación Diferencias Finitas Schwartz (1997) y algoritmo LSM.

En esta sección se compararán las evaluaciones entregadas en Schwartz (1997) utilizando diferencias finitas para la opción de inversión en un yacimiento de cobre con las soluciones del algoritmo LSM para modelos de precios de 1, 2, y 3 factores estocásticos. Del mismo modo que en la sección anterior las implementaciones contemplan una función de regresión con potencias de contratos futuros.

6.4.1 Opción de Inversión Modelo 1 Factor: Schwartz (1997)

En este modelo el valor presente del proyecto sin opción se puede obtener a partir del precio del contrato futuro de la ecuación (4.16):

$$VP(S) = \sum_{T=1}^N F(S, \bar{T}) e^{-r\bar{T}} - C \sum_{T=1}^N e^{-r\bar{T}} - K \quad (6.19)$$

Los parámetros utilizados en esta sección la solución numérica son equivalentes a los detallados en el artículo Schwartz (1997) y se presentan en la siguiente tabla:

Parámetro	Valor
α^*	-0.1646
κ	0.369
σ	0.233

Tabla VI-3: Parámetros proceso de precio spot cobre modelo 1 Schwartz (1997) para implementación opción inversión.

Para evaluar la opción de inversión se considera una tasa de interés igual a 6%.

El algoritmo LSM es implementado considerando un plazo de concesión de 10 años equivalente al plazo en la solución de diferencias finitas en Schwartz (1997). El número de trayectorias simuladas es de 20.000, y las oportunidades de ejercicio son anuales. Las bases de regresión ocupadas son las tres primeras potencias de contratos futuros a 1 año plazo y una constante.

A continuación se grafica la solución de la opción y el valor presente del proyecto sin considerar la opción:

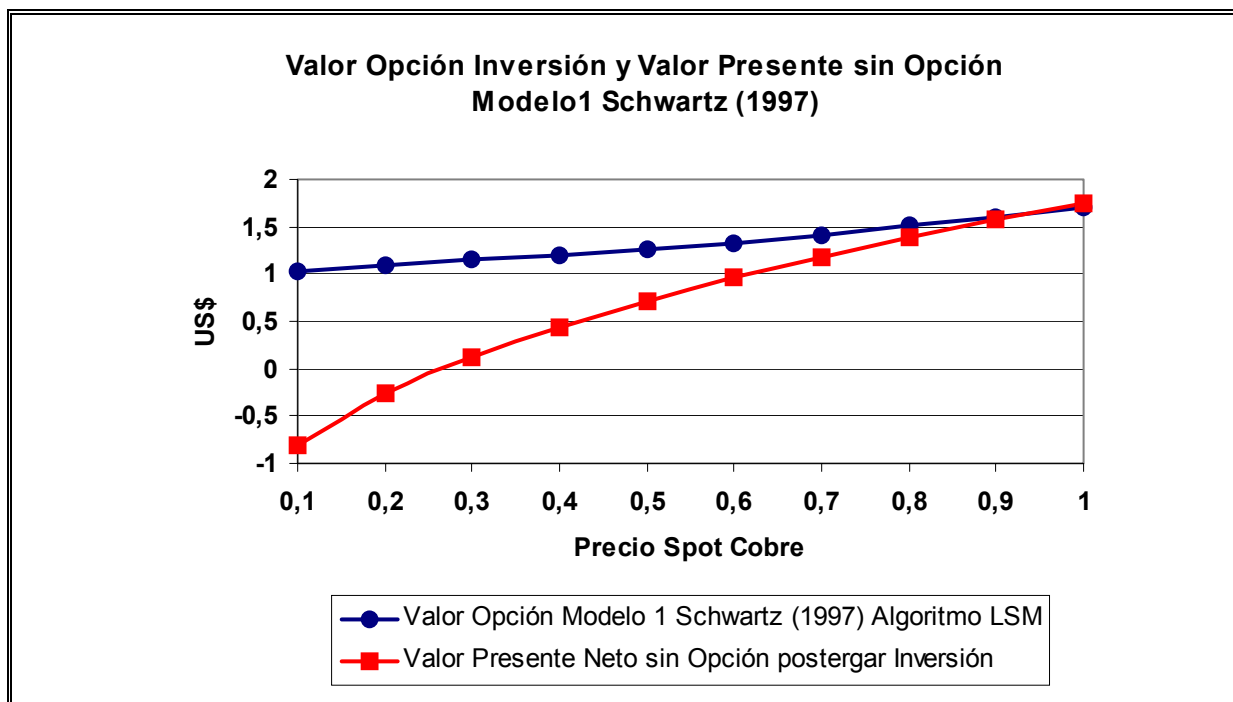


Figura 6-3: Valor Opción de inversión algoritmo LSM y valor presente neto sin opción de postergar inversión en el Modelo 1 de Schwartz (1997). Solución con un plazo de concesión de 10 años, 20.000 simulaciones y las tres primeras potencias de contratos futuros.

De la figura se aprecia que el precio crítico de inversión se encuentra en 0.95 dólares por libra. Para precios superiores al precio crítico es óptimo realizar la inversión de inmediato y el valor de la opción colapsa a la solución del valor presente neto sin opción de postergación

De acuerdo a lo anterior resulta interesante comparar el desempeño del algoritmo para precios menores al crítico. En Schwartz (1997) se entrega una evaluación del proyecto para un precio menor al crítico y corresponde al caso en que el precio es 0,5 US\$ por libra de cobre, en donde la opción de inversión tiene un valor de 1,23 US\$. En la siguiente tabla se muestran las evaluaciones del proyecto para distintos número de simulaciones y especificaciones de funciones de regresión en potencias de contratos futuros:

Evaluación Opción Inversión Modelo 1 Schwartz (1997)					
Algoritmo LSM					
Orden Máximo Función de Regresión Potencias Futuros					
Simulacion	2	3	4	5	6
10.000	1,2304	1,2302	1,2304	1,2300	1,230
20.000	1,2299	1,2300	1,2296	1,2299	1,230
30.000	1,2306	1,2308	1,2304	1,2304	1,230

Tabla VI-4: Evaluaciones opción de inversión Schwartz (1997) por medio del algoritmo LSM en el modelo de precios de Brennan y Schwartz (1985) en función del número de simulaciones y orden máximo función de regresión potencias contratos futuros. Evaluación obtenida para 10 años de simulaciones, solución original Schwartz (1997) 1,23 US\$

Las evaluaciones presentadas reportan para todos los casos menos de 1% de error los que valida la solución usando LSM con respecto a la evaluación por diferencias finitas.

6.4.2 Opción de Inversión Modelo 2 Factores: Gibson y Schwartz (1990)

En este modelo el valor presente del proyecto se puede obtener en base al precio de un contrato futuro de la ecuación (4.16). El modelo de precios tiene dos dimensiones el precio spot del cobre S y el retorno por conveniencia δ :

$$VP(S, \delta) = \sum_{T=1}^N F(S, \delta, \bar{T}) e^{-r\bar{T}} - C \sum_{T=1}^N e^{-r\bar{T}} - K \quad (6.20)$$

Los parámetros del modelo de precios considerados en esta implementación corresponden a los indicados en la sección 5.4.3. El algoritmo LSM es implementado considerando un plazo de concesión de 10 años, un número de trayectorias simuladas en

20000, y oportunidades de ejercicio anuales. Las bases de regresión empleadas son las tres primeras potencias de contratos futuros a 1 año plazo y una constante.

En el siguiente gráfico se puede observar el efecto de las dos variables de estado del problema en el valor de la opción y en el valor presente sin opción de postergación:

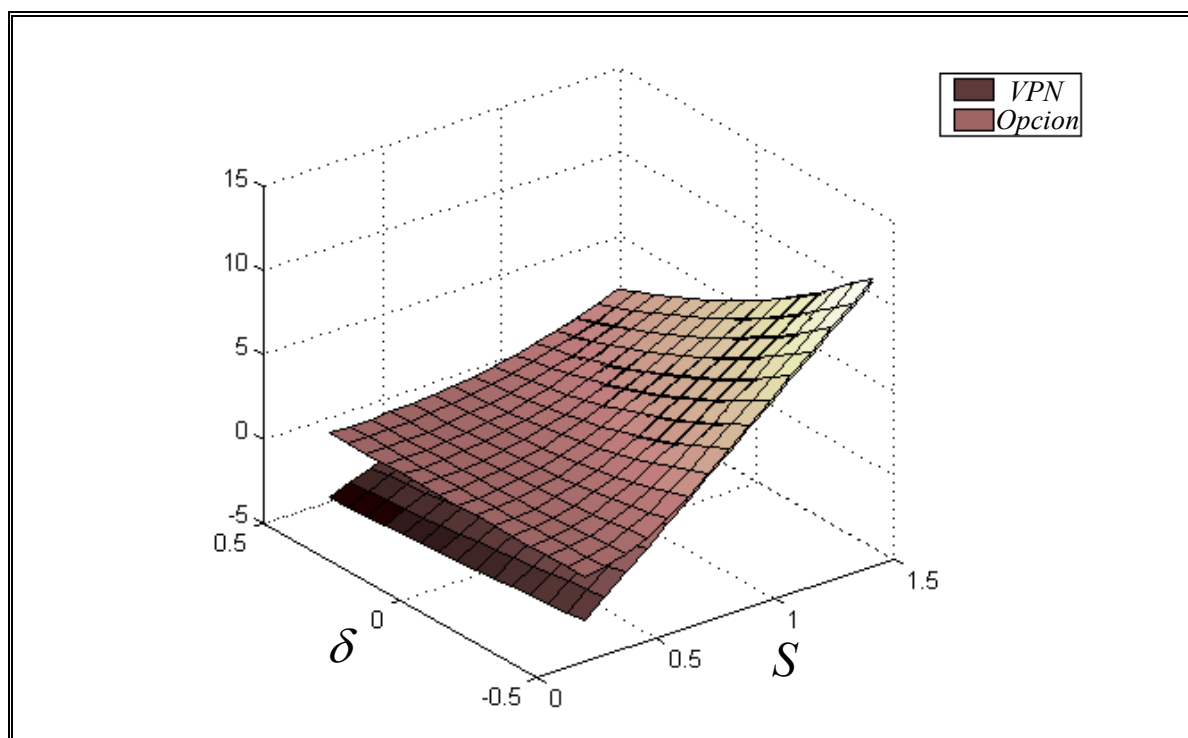


Figura 6-4: Valor Opción de inversión algoritmo LSM y valor presente neto sin opción de postergar en el Modelo de Gibson y Schwartz (1990).

En la figura anterior se puede observar la convergencia entre el valor de la opción y el valor presente neto sin opción de postergación. La interfaz definida por la tangencia entre las superficies establece los valores críticos (S^* , δ^*) para empezar la explotación del yacimiento. La proyección de la interfaz en el plano (S^* , δ^*) se muestra en la próxima figura:

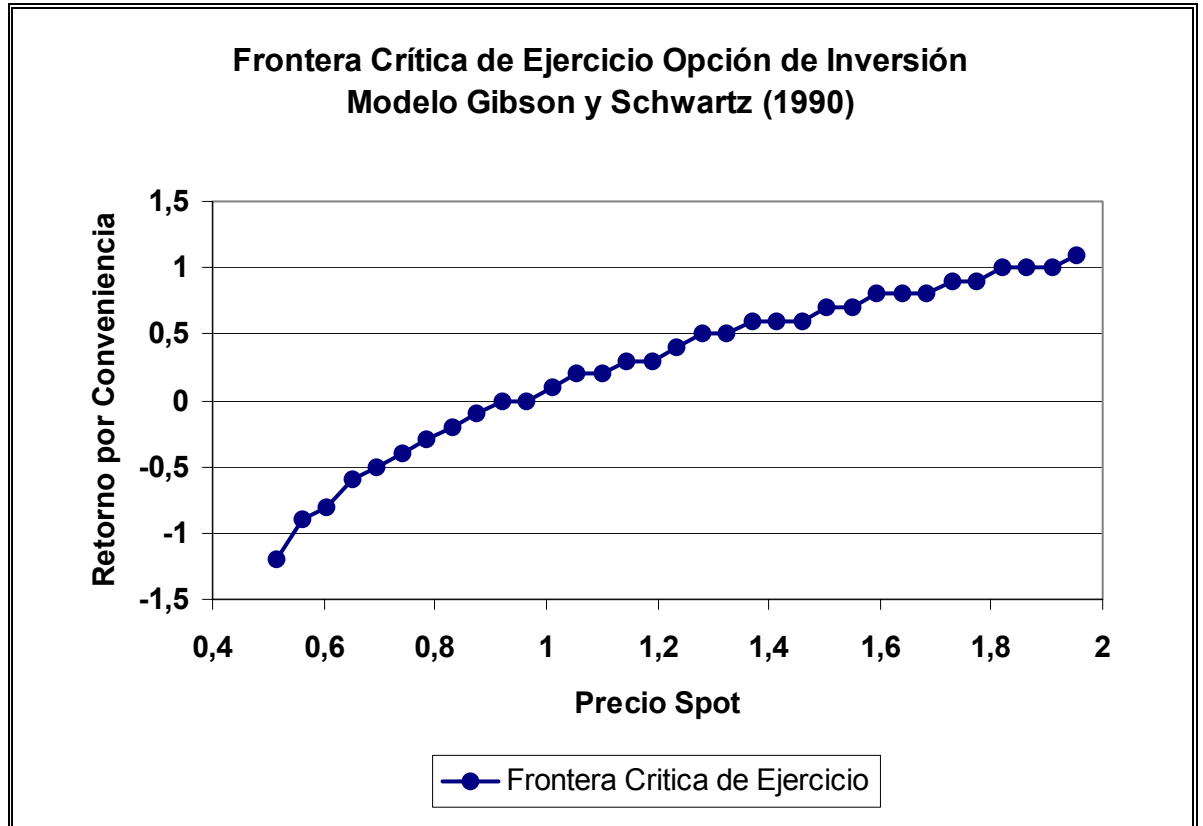


Figura 6-5: Frontera crítica Opción de inversión algoritmo LSM Modelo de Gibson y Schwartz (1990).

Las curvas de nivel del valor de la opción, para retorno por conveniencia constante opción y valor presente neto se pueden apreciar en la siguiente figura:

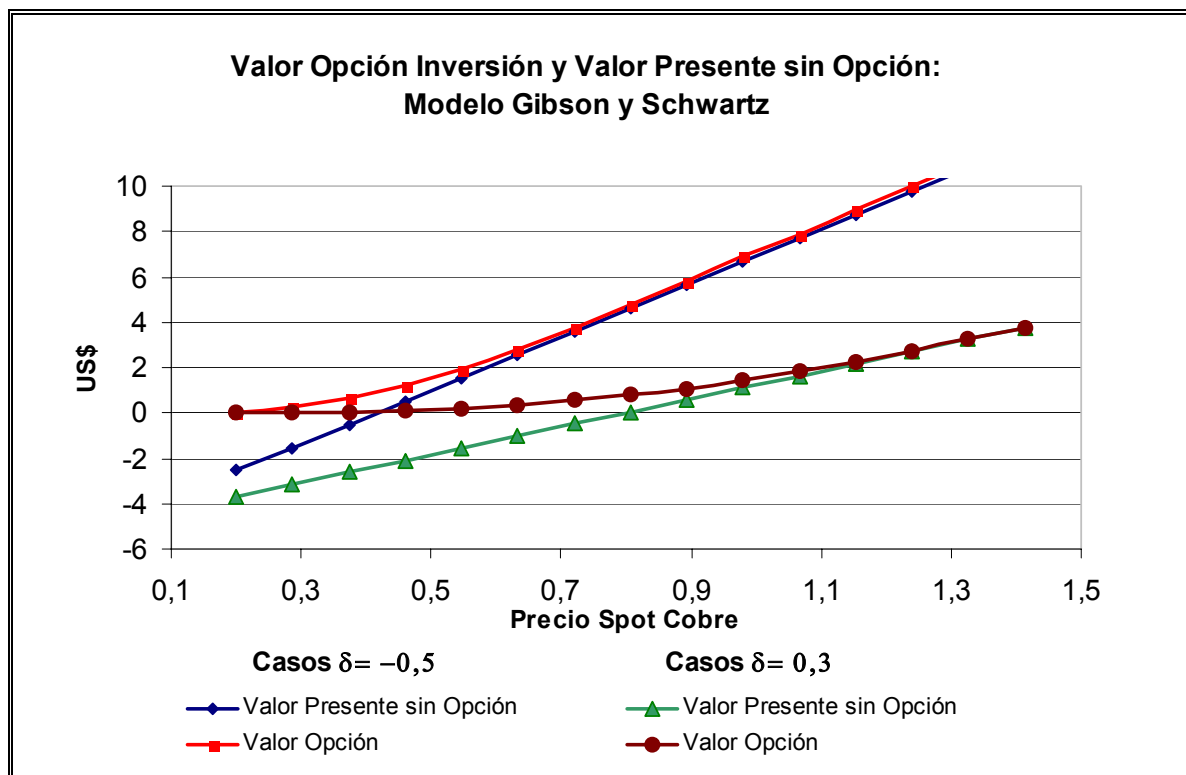


Figura 6-6: Curvas de nivel para δ constante en valor opción de inversión algoritmo LSM y valor presente neto sin opción de postergación: Modelo de Gibson y Schwartz.

Las curvas de nivel fijando el precio spot del cobre se muestran en la siguiente figura:

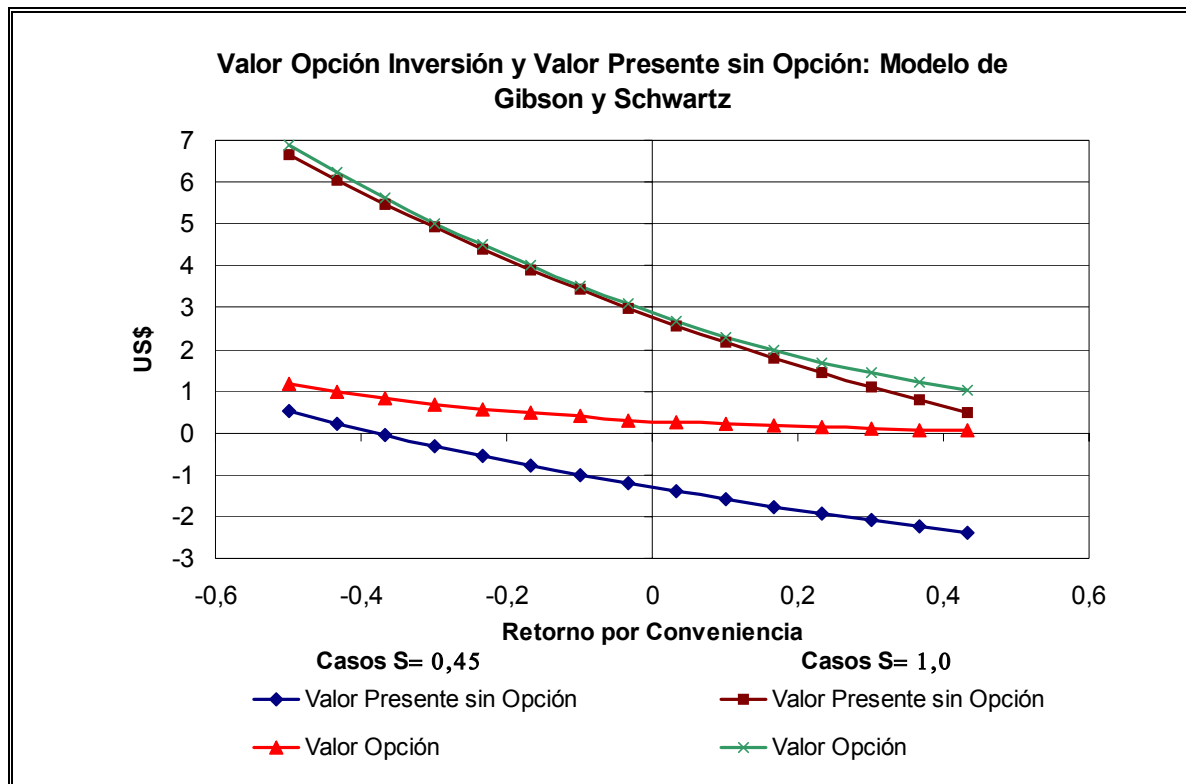


Figura 6-7: Curvas de nivel para precio spot constante en valor opción de inversión algoritmo LSM y valor presente neto sin opción de postergación: Modelo de Gibson y Schwartz.

Para verificar el nivel de precisión del algoritmo en las siguientes tablas se comparan los valores obtenidos a través del algoritmo LSM con aquellos en la publicación original de Schwartz (1997) con el método de diferencias finitas (MDF) para distinto número de simulaciones y distinto orden de la función de regresión de contratos futuros:

		Evaluación Opción Inversión Modelo 2 Schwartz (1997)				
		Algoritmo LSM: 10.000 Simulaciones.				
		Orden Máximo Función de Regresión Futuros				
Retorno por Conveniencia	MDF Schwartz	2	3	4	5	6
0,1	0,27	0,264	0,264	0,262	0,234	0,263
0,25	0,16	0,161	0,159	0,160	0,160	0,160
0,4	0,09	0,092	0,091	0,092	0,092	0,091

Tabla VI-5: Comparación solución de la opción de inversión en Schwartz (1997) y solución según algoritmo LSM para precio spot 0,5 US\$/lb en el modelo de Gibson y Schwartz utilizando 10.000 simulaciones en función del retorno por conveniencia y orden máximo función de regresión potencias contratos futuros .

		Evaluación Opción Inversión Modelo 2 Schwartz (1997)				
		Algoritmo LSM: 20.000 Simulaciones.				
		Orden Máximo Función de Regresión Futuros				
Retorno por Conveniencia	MDF Schwartz	2	3	4	5	6
0,1	0,27	0,279	0,270	0,268	0,261	0,271
0,25	0,16	0,166	0,165	0,165	0,165	0,166
0,4	0,09	0,097	0,097	0,097	0,096	0,097

Tabla VI-6: Comparación solución de la opción de inversión en Schwartz (1997) y solución según algoritmo LSM para precio spot 0,5 US\$/lb en el modelo de Gibson y Schwartz utilizando 20.000 simulaciones en función del retorno por conveniencia y orden máximo función de regresión potencias contratos futuros .

		Evaluación Opción Inversión Modelo 2 Schwartz (1997)				
		Algoritmo LSM: 30.000 Simulaciones.				
		Orden Máximo Función de Regresión Futuros				
Retorno por Conveniencia	MDF Schwartz (1997).	2	3	4	5	6
0,1	0,27	0,272	0,268	0,266	0,266	0,266
0,25	0,16	0,164	0,133	0,162	0,630	0,162
0,4	0,09	0,094	0,095	0,094	0,095	0,094

Tabla VI-7: Comparación solución de la opción de inversión en Schwartz (1997) y solución según algoritmo LSM para precio spot 0,5 US\$/lb en el modelo de Gibson y Schwartz utilizando 30.000 simulaciones en función del retorno por conveniencia y orden máximo función de regresión potencias contratos futuros .

Los valores obtenidos son en nivel y dirección semejantes a los obtenidos mediante diferencias finitas en Schwartz (1997), lo que permite concluir que la base de regresión utilizada permite una buena aproximación al valor de la opción de inversión.

6.4.3 Opción de Inversión Modelo 3 Factores: Schwartz (1997)

En este caso la opción de inversión o la opción de desarrollo del yacimiento depende de un modelo de tres variables de estado el precio spot S , el retorno por conveniencia δ y la tasa de interés continua r .

El modelo, al tener tasas de interés estocásticas, implica que los factores de descuento en cada instante de tiempo, se modifican de acuerdo al nivel de la tasa de interés. Si se denota por $B(r, \bar{T})$ el factor de descuento a \bar{T} , dado un nivel de tasa de interés r , de acuerdo a Vasicek (1977) su expresión analítica es:

$$B(r, \bar{T}) = \exp\left[-r \frac{1 - e^{-a\bar{T}}}{a} + \frac{m^* ((1 - e^{-a\bar{T}}) - a\bar{T})}{a} - \sigma_3^2 \frac{4(1 - e^{-a\bar{T}}) - (1 - e^{-2a\bar{T}}) - 2a\bar{T}}{4a^3}\right] \quad (6.21)$$

Si el valor presente de un contrato que entrega una unidad de cobre en T , dadas las variables de estado S , δ , r , se denota por $P(S, \delta, r, T)$. Como indica Schwartz (1997) se puede calcular como:

$$P(S, \delta, r, T) = F(S, \delta, r, T)B(r, \bar{T}) \quad (6.22)$$

donde $F(S, \delta, r, T)$ es el precio de un contrato futuro en el modelo 3 de Schwartz (1997).

Desarrollando la igualdad anterior es posible demostrar que:

$$P(S, \delta, r, T) = F(S, \delta, T)e^{-rT} \quad (6.23)$$

donde $F(S, \delta, T)$ es el precio de un futuro en el modelo de Gibson y Schwartz.

Tomando las consideraciones anteriores, la expresión general indicada en (6.7) para el valor presente del yacimiento en este modelo es:

$$VP(S, \delta, r) = \sum_{\bar{T}=1}^N P(S, \delta, r, \bar{T}) - C \sum_{\bar{T}=1}^N B(r, \bar{T}) - K \quad (6.24)$$

Los parámetros del modelo de precios considerados en esta implementación corresponden a los indicados en Schwartz (1997) y se presentan en la siguiente tabla:

Parámetros en Modelo 3 Schwartz (1997)	Valor
$\hat{\alpha}$	0,022
a	0,255
m^*	0,071
κ	1,045
σ_1	0,266
σ_2	0,249
σ_3	0,0096
ρ_1	0,805
ρ_2	0,1243
ρ_3	0,0964

Tabla VI-8: Parámetros modelo 3 Schwartz (1997) utilizados en la valorización de la opción de inversión.

El algoritmo LSM es implementado considerando un plazo de concesión de 10 años y oportunidades de ejercicio anuales. Las bases de regresión ocupadas son potencias de contratos futuros a un año plazo y una constante.

En las siguientes tablas se realiza la comparación de los valores obtenidos para la opción de inversión mediante el algoritmo LSM y los resultados de la publicación para sets de simulaciones de 10.000, 20.000 y 30.000 y distinto orden máximo de potencias de contratos futuros en la función de regresión. Los resultados contemplan un retorno por

conveniencia igual a 0,1 y un precio spot igual a 0.5 US\$/lb de modo que los valores reflejen el valor opción menor al crítico.

		Evaluación Opción Inversión Modelo 3 Schwartz (1997) Algoritmo LSM: 10.000 Simulaciones				
		Orden Máximo Función de Regresión Futuros				
Tasa de Interés	MDF Schwartz (1997).	2	3	4	5	6
3%	0,19	0,179	0,176	0,177	0,177	0,178
6%	0,25	0,260	0,256	0,259	0,260	0,257
9%	0,32	0,365	0,361	0,362	0,364	0,364

Tabla VI-9: Comparación solución de la opción de inversión en Schwartz (1997) y solución según algoritmo LSM para precio spot 0,5 US\$/lb y retorno por conveniencia 0,1 en el modelo 3 de Schwartz (1997) utilizando 10.000 simulaciones en función de la tasa de interés y orden máximo función de regresión potencias contratos futuros .

		Evaluación Opción Inversión Modelo 3 Schwartz (1997)				
		Algoritmo LSM: 20.000 Simulaciones				
		Orden Máximo Función de Regresión Futuros				
Tasa de Interés	MDF Schwartz (1997).	2	3	4	5	6
3%	0,19	0,172	0,170	0,171	0,171	0,170
6%	0,25	0,253	0,251	0,251	0,252	0,250
9%	0,32	0,359	0,357	0,355	0,356	0,356

Tabla VI-10: Comparación solución MDF Schwartz (1997) y algoritmo LSM para precio spot 0,5 US\$/lb y retorno por conveniencia 0,1 en el modelo 3 para 20.000 simulaciones en función de la tasa de interés y orden máximo potencias futuros .

		Evaluación Opción Inversión Modelo 3 Schwartz (1997)				
		Algoritmo LSM: 30.000 Simulaciones				
		Orden Máximo Función de Regresión Potencias Futuros				
Tasa de Interés	MDF Schwartz (1997).	2	3	4	5	6
3%	0,19	0,173	0,171	0,171	0,171	0,171
6%	0,25	0,255	0,254	0,254	0,253	0,253
9%	0,32	0,361	0,36	0,359	0,359	0,359

Tabla VI-11: Comparación solución de la opción de inversión en Schwartz (1997) y solución según algoritmo LSM para precio spot 0.5 US\$/lb y retorno por conveniencia 0,1 en el modelo 3 de Schwartz (1997) utilizando 30.000 simulaciones en función de la tasa de interés y orden máximo función de regresión potencias contratos futuros .

Los resultados de las tablas anteriores reportan diferencias mayores que en los casos de 1 y 2 factores. Los errores son mayores al evaluar la opción de inversión para tasas de interés iguales a 3% y 9%, en los extremos inferiores y superiores de la solución lo que puede generar algunas distorsiones en la solución por medio de diferencias finitas.

Las curvas de nivel, para la valoración de la opción de inversión y el valor presente neto, fijando el retorno por conveniencia y la tasa de interés en 5%, se muestran en la siguiente figura:

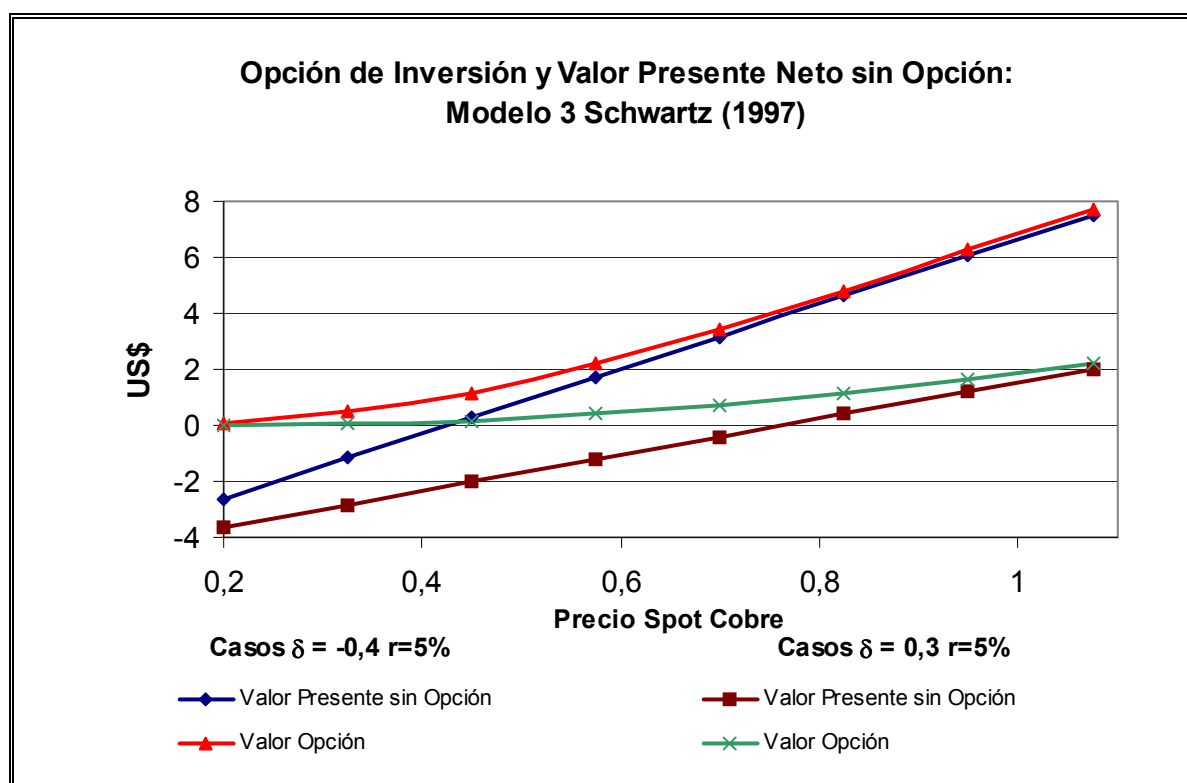


Figura 6-8: Curvas de nivel para retorno por conveniencia y la tasa de interés constante en valor opción de inversión algoritmo LSM y valor presente neto sin postergación: Modelo 3 Schwartz (1997).

Las curvas de nivel, para la valoración de la opción de inversión y el valor presente neto, fijando el precio spot y la tasa de interés en 5%, se muestran en la siguiente figura:

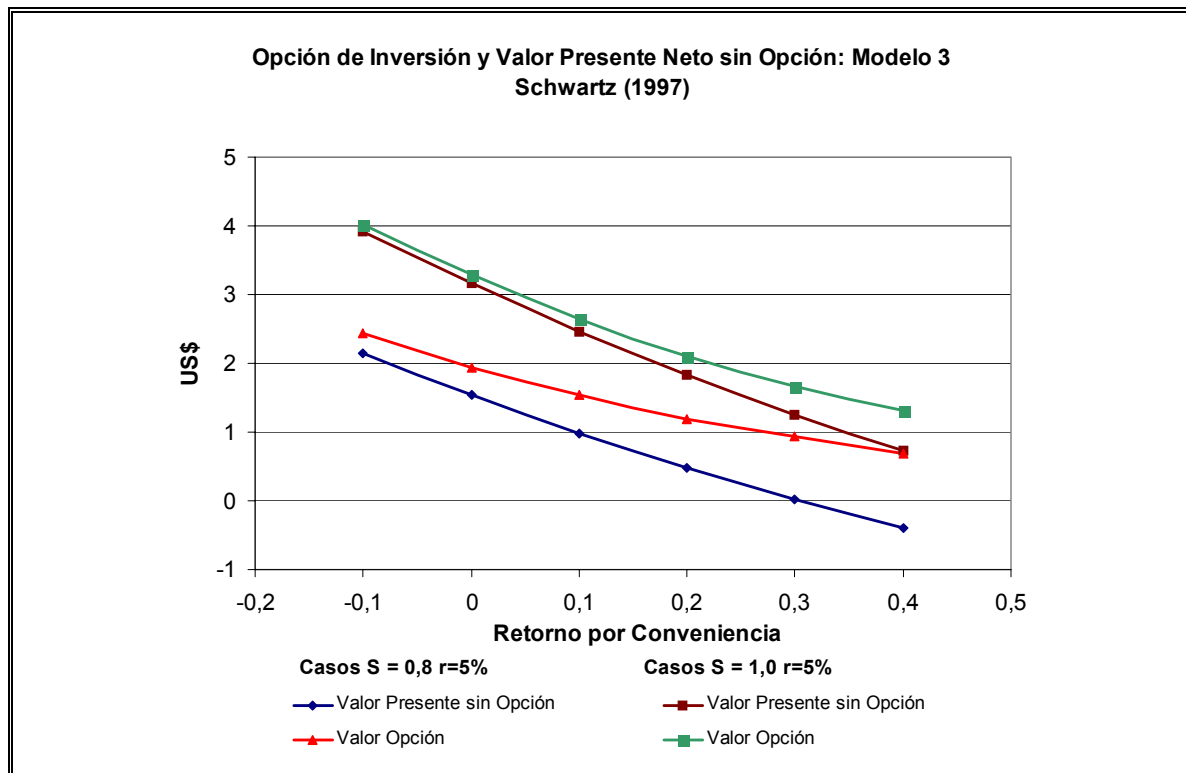


Figura 6-9: Curvas de nivel para precio spot y tasa de interés constante en valor opción de inversión algoritmo LSM y valor presente neto sin postergación: Modelo 3 Schwartz (1997).

En este capítulo se compararon las soluciones de la opción de inversión presentada en Schwartz (1997) mediante diferencias finitas, con aquellas obtenidas con el algoritmo LSM utilizando funciones de regresión basadas en contratos futuros y se aclaró su capacidad para evaluar opciones americanas para los procesos de precios presentados. En el próximo capítulo se utilizarán estas funciones de regresión en la evaluación de la mina presentada en Brennan y Schwartz (1985) utilizando un modelo multifactorial de precios.

VII VALORIZACIÓN DE LA MINA DE COBRE EN BRENNAN Y SCHWARTZ (1985) PARA UN MODELO MULTIFACTORIAL DE PRECIOS MEDIANTE EL ALGORITMO LSM.

En los capítulos anteriores se explicó en detalle el algoritmo de simulación de Montecarlo LSM y se estableció la importancia de la correcta estimación de la función de continuación o transición de una opción americana. Los resultados obtenidos avalan la utilización de una función de continuación basada en contratos futuros para valorizar activos americanos mediante el algoritmo LSM. En este capítulo se utilizan estas funciones de continuación para la valorización de la mina de cobre en Brennan y Schwartz (1985) para un modelo multifactorial de precios mediante el algoritmo LSM propuesto en Longstaff y Schwartz (2001), esta mina se ha definido como uno de los problemas de más compleja solución del área y representa una exigente prueba para cualquier algoritmo de valorización.

En su formulación original esta mina tiene las opciones de cierre, apertura y abandono de las operaciones de explotación. Las decisiones de ejercicio de estas opciones, dependen del instante de evaluación, del estado de operación (abierta o cerrada), del nivel de reservas de la mina y del nivel del precio spot. Las definiciones anteriores dan origen a un complejo problema de evaluación formado por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales en 5 dimensiones y condiciones de borde del tipo frontera libre.

La evaluación de la mina en Brennan y Schwartz (1985) es abordada con el método de diferencias finitas para un modelo de precios del cobre de un factor estocástico. Sin embargo, si se deseara utilizar modelos multifactoriales de precios las ecuaciones de valorización de la mina aumentarían sus dimensiones, una por cada factor adicional, lo que implica un crecimiento exponencial en la complejidad del método de diferencias finitas u otros métodos como los árboles binomiales. Por ejemplo, si se considera un modelo de 3 factores estocásticos para la dinámica del precio spot, como el modelo de precios de Cortazar y Schwartz (2003) las dimensiones de la evaluación de la mina son 6: el tiempo, el nivel de reservas, el estado de operación (abierto o cerrado) y las tres variables de estado del proceso de precios. Como se indicó anteriormente, el tamaño del problema lo hace difícilmente abordable por métodos tradicionales.

La implementación de la mina de Brennan y Schwartz (1985) para procesos multifactoriales de precios extiende la exitosa implementación realizada por Gravet (2003)

del problema original mediante el algoritmo LSM y es ilustrada utilizando el modelo de tres factores estocásticos descrito en Cortazar y Schwartz (2003) para la dinámica del precio spot.

En lo que sigue de este capítulo se presenta la formulación original de la mina de Brennan y Schwartz (1985). Luego se describe la implementación de la Brennan y Schwartz (1985) en modelos multifactoriales de precios utilizando el algoritmo LSM. En la sección de resultados se expone el desempeño de la implementación utilizando el proceso de precios de 3 factores estocásticos del cobre en Cortazar y Schwartz (2003). Los resultados muestran la flexibilidad del algoritmo para la valorización y obtención de las políticas óptimas de ejercicio de la mina evaluada.

7.1 Mina de Brennan y Schwartz (1985) : Formulación Original

El problema desarrollado en esta sección corresponde a la mina de cobre descrita en el influyente trabajo de Brennan y Schwartz (1985). En este artículo se presenta una mina de cobre que cuenta con una etapa de producción. Este yacimiento posee una estructura de costos conocida y un nivel de reservas finito. Además, se asume que existe un mercado de contratos futuros sobre este commodity.

En la evaluación de este recurso natural se incorpora la opción de apertura, cierre y abandono de la producción. Al abrir o cerrar la mina la administración debe pagar para modificar el estado de operación, al abandonar la mina no hay costos asociados. En los periodos de cierre se considera un costo de mantención de las instalaciones.

El modelo de precios considerado en dicho artículo, corresponde al proceso browniano geométrico en la expresión (4.1). La deducción de las ecuaciones de valorización se basa en la construcción de un portafolio libre de riesgo entre el valor de la mina y contratos futuros de cobre.

El valor de la mina abierta V es una función del tiempo t , el nivel de reservas de mineral Q y del precio spot del cobre S . Lo anterior es válido para el valor de la mina si su estado es cerrada es W .

Según la definición anterior del problema, el valor de la mina bajo la política óptima de operación se obtiene resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

$$\max_{q \in (\underline{q}, \bar{q})} \left[\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + (\rho S - C_y) V_S - q V_Q + V_t + q(S - A) - Tax - (\rho + \lambda_1) V \right] = 0 \quad (7.1)$$

si la mina se encuentra abierta y,

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 W_{SS} + S(\rho - \delta) W_S + W_t - M - (\rho + \lambda_0) W = 0 \quad (7.2)$$

si la mina se encuentra cerrada.

En la ecuación (7.1) S es precio de venta del cobre, q es la tasa de producción, A es el costo marginal de producción y Tax representa los impuestos:

$Tax = t_1 q S + \max \{ t_2 q [S(1 - t_1) - A]; 0 \}$ donde t_1 es la de tasa de impuesto a las ventas y t_2 la tasa de impuesto a las utilidades.

En la ecuación (7.2) M es el costo por periodo para mantener las instalaciones de la mina cerrada.

El término ρ representa la tasa de interés continua y λ_0 , λ_1 representan el riesgo político de expropiación cuando la mina se encuentra cerrada y abierta respectivamente.

Si se asume que el valor de la mina es nulo cuando el inventario se agota, se obtienen las siguientes condiciones de borde:

$$V(S, Q = 0, t) = W(S, Q = 0, t) = 0 \quad (7.3)$$

Por último, si se definen los precios críticos de cierre, apertura y abandono que maximizan el valor de la mina (S_1^* , S_2^* , S_0^* respectivamente), se obtienen las siguientes condiciones de equilibrio:

$$W(S_2^*, Q, t) = V(S_2^*, Q, t) - K_2(Q, t) \quad (7.4)$$

$$V(S_1^*, Q, t) = \max [W(S_1^*, Q, t) - K_1(Q, t); 0] \quad (7.5)$$

$$V_S(S_1^*, Q, t) = \begin{cases} W_S(S_1^*, Q, t) \\ 0 \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{cases} W(S_1^*, Q, t) - K_1(Q, t) \geq 0 \\ W(S_1^*, Q, t) - K_1(Q, t) \leq 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

$$W_S(S_2^*, Q, t) = V_S(S_2^*, Q, t) \quad (7.7)$$

$$W_S(S_0^*, Q, t) = 0 \quad (7.8)$$

Las ecuaciones (7.6), (7.7) y (7.8) se desprenden de las condiciones de “high contact” descritas por Merton-Samuelson, mientras que $K_1(Q, t)$ y $K_2(Q, t)$ corresponden a los costos de cierre y de apertura respectivamente.

Los precios críticos indicados en las ecuaciones (7.6), (7.7) y (7.8) son funciones del estado de operación de la mina, del tiempo y de sus reservas. Si la mina se encuentra cerrada, las condiciones de equilibrio definen que sobre el precio S_2^* es óptimo reanudar la explotación. Si la mina se encuentra abierta, para precios menores que S_1^* es óptimo paralizar temporalmente la producción. Finalmente para precios menores a S_0^* el modelo exige abandonar definitivamente la faena.

Este modelo no cuenta con una solución analítica y está definido por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden en tres dimensiones, con condiciones de borde de frontera libre por lo que su resolución numérica resulta bastante compleja.

7.2 Implementación de la Mina de Brennan y Schwartz (1985) en Procesos Multifactoriales de Precios mediante el algoritmo LSM

En esta sección se describe la implementación propuesta para la evaluación general de la mina de Brennan y Schwartz (1985) en procesos multifactoriales de precios utilizando el algoritmo LSM.

7.2.1 Dimensiones de Estado del Problema

El espacio de estados de este problema contempla estados determinísticos y estocásticos. Los estados determinísticos provienen de dos variables: estado operacional y nivel de reservas. El estado de operación define si la mina se encuentra abierta o cerrada y los estados de reservas definen todos los posibles inventarios para la mina de cobre. Los estados estocásticos son las variables de estado que definen el proceso del precio del cobre.

De lo anterior se desprende que para evaluar una mina en particular (una instancia del problema), se debe resolver en todos los posibles escenarios de eventos. Vale decir, para cualquier instante de tiempo, para todo estado de operación, para todo nivel restante de reservas y valores de las variables de estado, se debe tener una estimación del valor de la mina.

La implementación del algoritmo LSM realizada Gravet (2003) para la mina de Brennan y Schwartz (1985) en un factor considera una definición de la dimensión reservas distinta a la utilizada en esta implementación, ya que ella plantea restricciones sobre los posibles estados de reservas dependiendo del instante de tiempo u oportunidad de ejercicio. En las oportunidades de ejercicio finales Gravet (2003) restringe aquellos niveles de inventario que no pueden ser producidos, es decir, en donde el tiempo residual de operación no permite su extracción. En las oportunidades de ejercicio hacia el inicio de la explotación establece un número de inventarios decreciente ya que la evaluación estaba remitida a un nivel de reservas fijo.

En la siguiente figura se muestra el dominio de reservas utilizado en Gravet (2003):

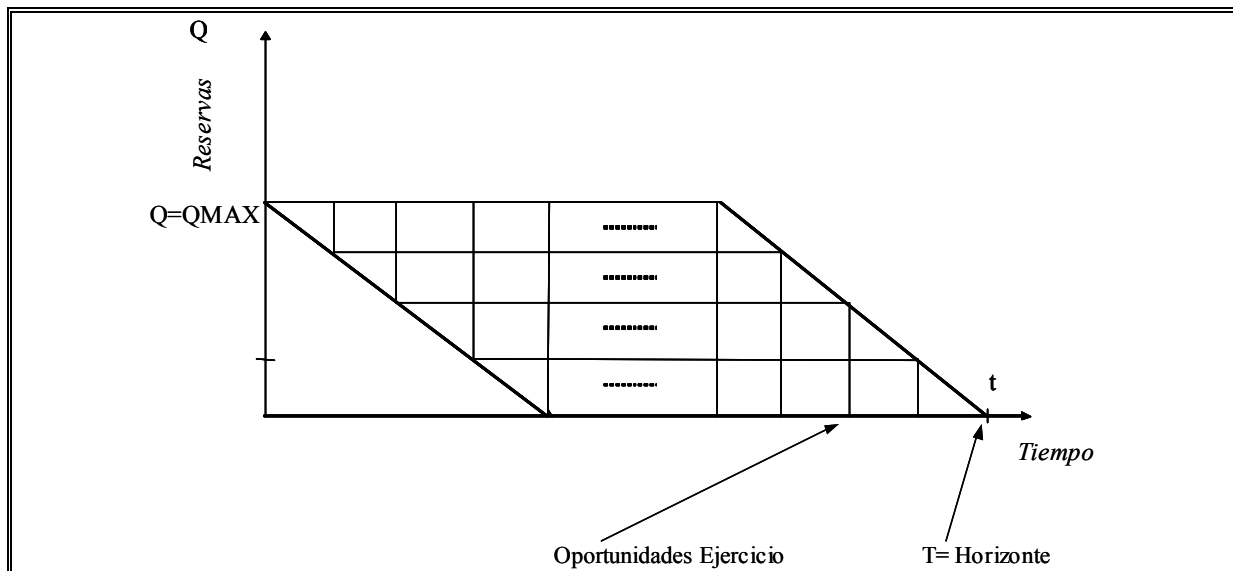


Figura 7-1: Posibles estados de reservas propuesto en Gravet (2003) a través de las oportunidades de ejercicio para mina de Brennan y Schwartz (1985).

Como se muestra en la siguiente figura la implementación planteada en esta investigación asume la factibilidad de todos los estados de reserva. Una de las ventajas de esta relajación del dominio es que se pueden evaluar simultáneamente yacimientos con distintos niveles de inventario inicial. Otra ventaja del dominio de reservas planteado se presenta al final de la concesión. Permitiendo la existencia de inventarios superiores a la posible extracción se modela en forma más exacta el eventual comportamiento de un yacimiento. Finalmente, este dominio permite una implementación más simple ya que no existe necesidad de condicionar el número de niveles de reservas al instante temporal de resolución. Una desventaja de un dominio de reservas más extenso es que involucra un mayor tiempo de resolución, sin embargo el tiempo adicional no supera el 25%.

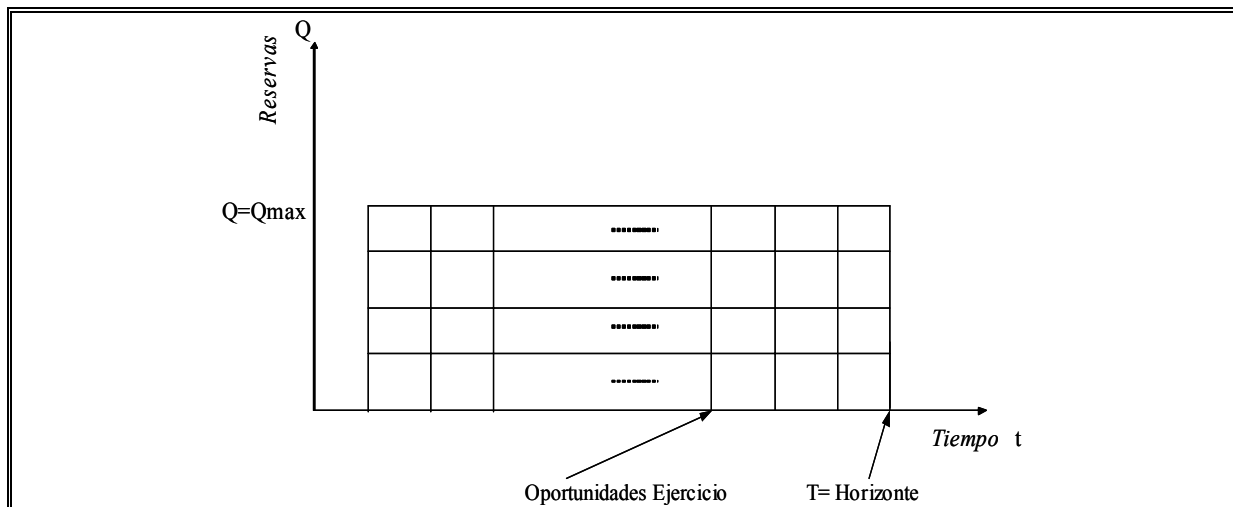


Figura 7-2: Posibles estados de reservas a través de las oportunidades de ejercicio para mina de Brennan y Schwartz (1985).

La segunda dimensión determinística es el estado de operación de la mina y se define en la siguiente figura:

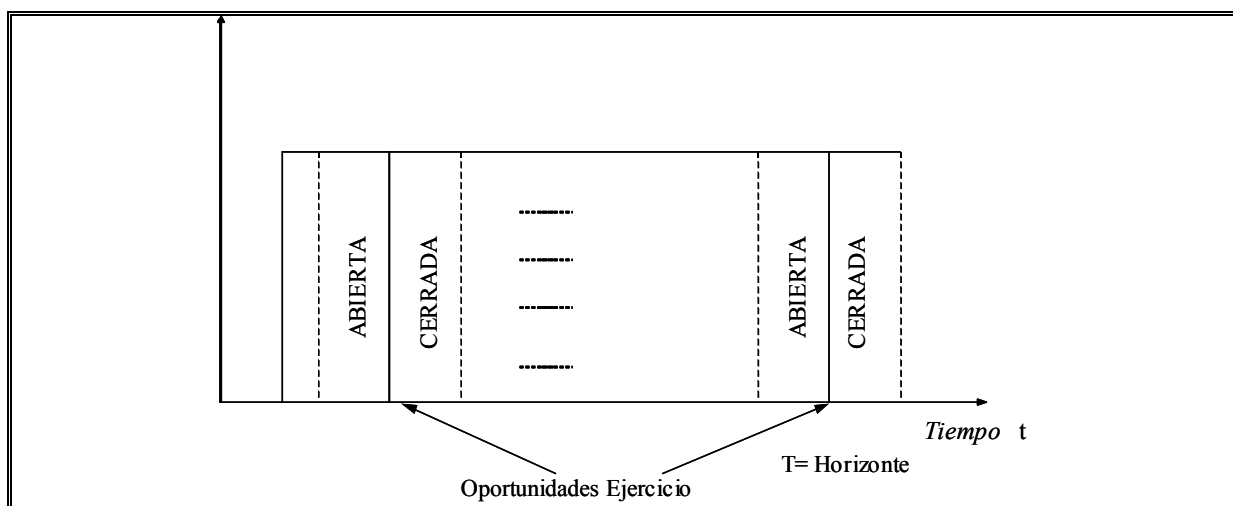


Figura 7-3: Posibles estados operacionales a través de las oportunidades de ejercicio para mina de Brennan y Schwartz (1985).

Los estados provenientes del proceso estocástico de precios $X_t(\omega)$ en el conjunto de simulaciones se observan en la siguiente figura en cada oportunidad de

ejercicio, sobre cada trayectoria, existe un vector de variables de estado que define la dinámica del precio spot:

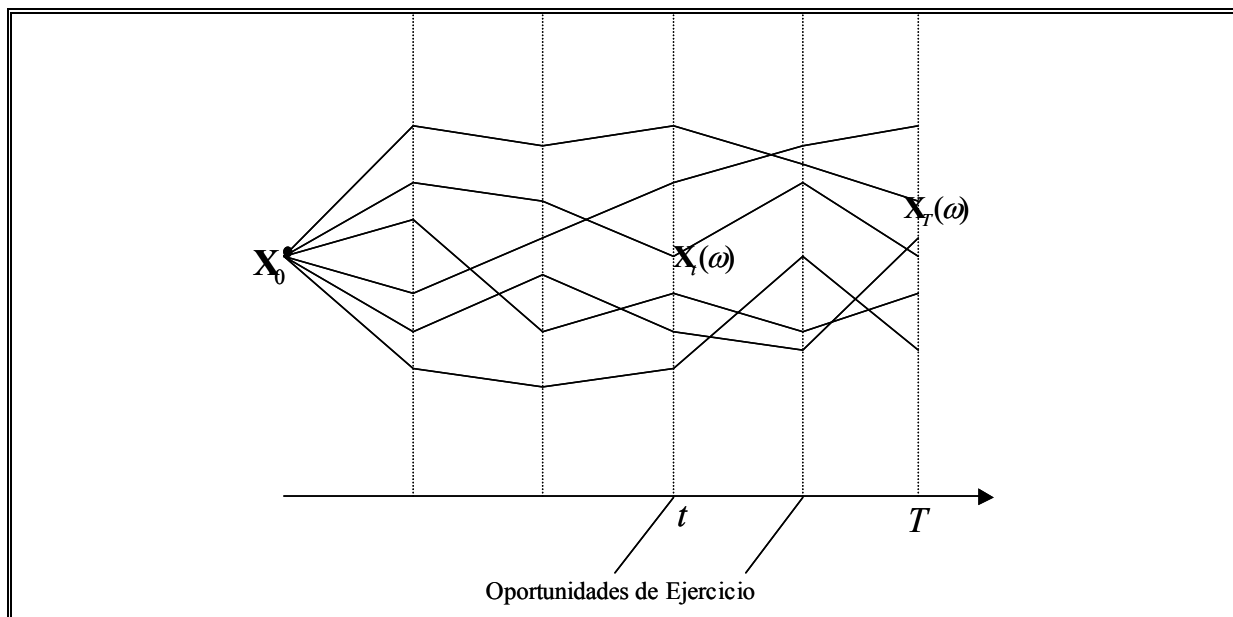


Figura 7-4: Trayectorias del proceso de precios multifactorial a través de las oportunidades de ejercicio.

En la siguiente figura se representa el espacio de estados conjunto: para cada punto del espacio, definido por una oportunidad de ejercicio t , un estado de reservas Q , un estado operacional abierta o cerrada y un vector de variables de estado del proceso de precios $X_t(\omega)$ debe encontrarse el valor de la mina:

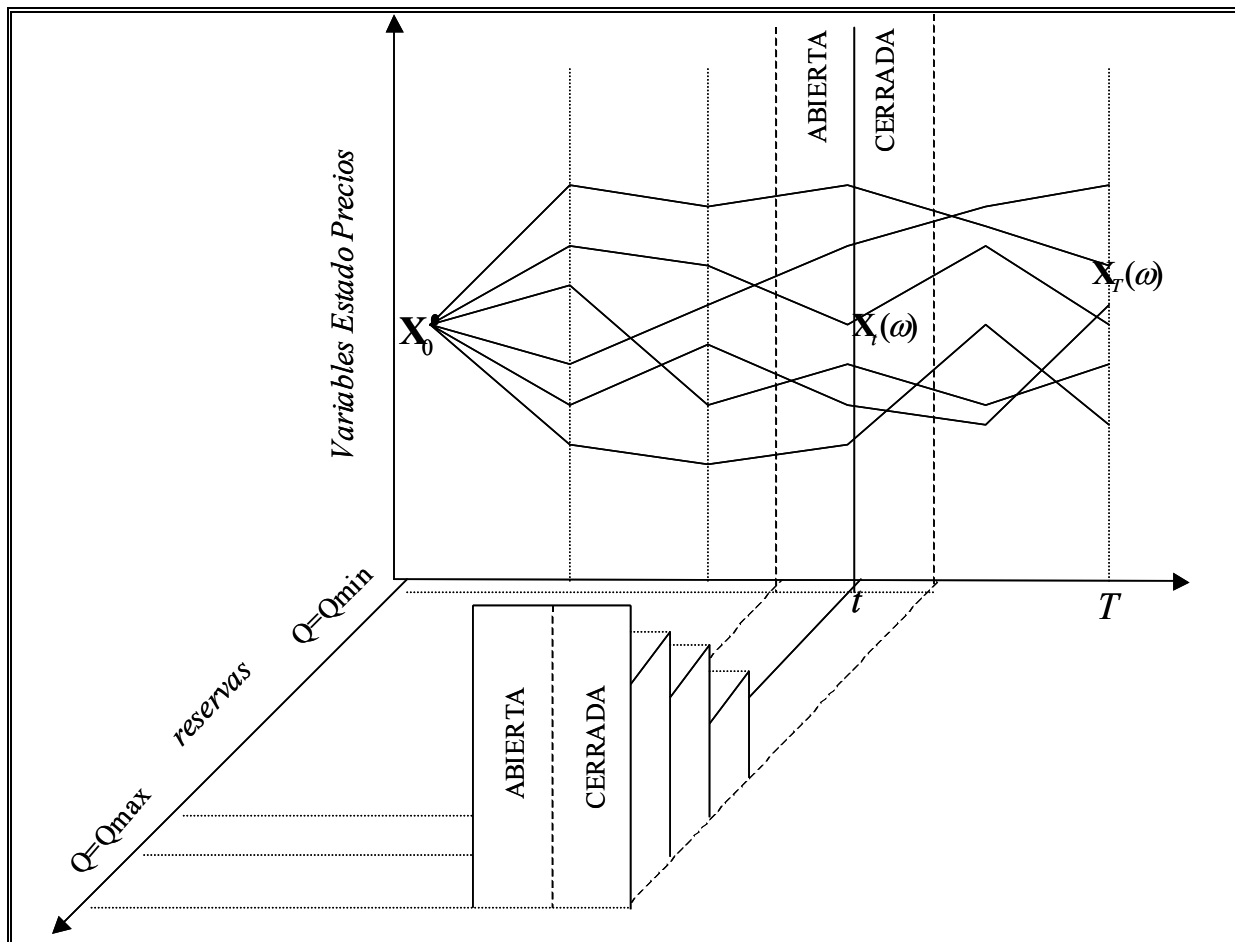


Figura 7-5: Espacio de estados conjunto implementación mina de Brennan y Schwartz (1985) en procesos multifactoriales de precios.

Resumiendo el espacio de estados queda definido por las siguientes variables:

ω : Indica la trayectoria simulada del proceso estocástico de precios y tasas de interés.

t_k : Indica el instante de evaluación asociado a la oportunidad de ejercicio K

$\mathbf{x}_{t_k}(\omega)$: Indica el vector de variables estocásticas en instante t_k en la trayectoria ω .

Q : Indica el nivel de reservas actual de la mina.

Es necesario destacar que el nivel de precios es, en su forma más general, una función de las variables de estado, es decir $S_{\omega_t} = f(\mathbf{x}_{t_k}(\omega))$.

Las funciones que describen el valor de la mina en el espacio de estados son:

$V(\mathbf{x}_{t_k}(\omega), Q, t_k)$: Valor de una mina de cobre abierta o produciendo, que dispone de Q unidades de inventario en el instante t_k y el vector de variables de estado en la trayectoria es $\mathbf{x}_{t_k}(\omega)$.

$W(\mathbf{x}_{t_k}(\omega), Q, t_k)$: Valor de una mina de cobre cerrada, que dispone de Q unidades de inventario en el instante t_k y el vector de variables de estado en la trayectoria es $\mathbf{x}_{t_k}(\omega)$.

En términos de las definiciones del capítulo cuarto, las funciones $V(\mathbf{x}_{t_k}(\omega), Q, t_k)$ y $W(\mathbf{x}_{t_k}(\omega), Q, t_k)$ representan un valor de nodo.

7.2.2 Flujos de caja en transiciones de estados

Las variables que determinan el flujo de caja, al realizarse los cambios de estado de operación y reservas en la mina son:

K_1 : Costo de cierre de una mina en producción o abierta.

K_2 : Costo de apertura de una mina temporalmente detenida o cerrada.

f : Costo de mantención de una mina temporalmente detenida o cerrada.

q^* : Tasa de producción de una mina abierta por unidad de tiempo.

$FC(S_{\omega_t}, q^*)$: Flujo de caja proveniente de la venta de q^* unidades commodity al precio spot S_{ω_t} . El flujo de caja se obtiene de la siguiente expresión:

$$FC(S_{\omega_t}, q^*) = q^* \Delta t (S_{\omega_t} - A) - Tax \quad (7.9)$$

donde A corresponde al costo unitario de producción y Tax representa el total de impuestos y derechos que deben cancelarse cuando la mina se encuentra operando. La caracterización de estos pagos, según Brennan y Schwartz (1985), es la siguiente:

$$Tax = t_1 q^* S_{\omega_t} + \max \left\{ t_2 q^* \left[S_{\omega_t} (1 - t_1) - A \right]; 0 \right\} \quad (7.10)$$

En esta ecuación t_1 representa la tasa de impuesto a las ventas, mientras que t_2 corresponde a la tasa de impuesto a las utilidades.

7.2.3 Implementación del Algoritmo LSM: Resolución Backward

La valorización de la mina de cobre mediante el algoritmo LSM exige definir un tiempo de concesión T , en el que las flexibilidades con que cuenta el proyecto se realizan. Para la presente implementación se asume que posterior al instante T la mina tiene valor cero cualquiera sea su nivel de inventario, estado operacional o nivel de precios. En otras palabras, se ha definido la condición de borde del problema.

Si iniciamos la resolución en T se cumple:

$$V(\mathbf{x}_T(\omega), Q, T) = W(\mathbf{x}_T(\omega), Q, T) = 0 \quad \forall Q, \forall \omega \quad (7.11)$$

Retrocediendo a la oportunidad de ejercicio anterior, la mina tiene un solo intervalo para seguir produciendo: en $t = T - 1$ si la mina se encuentra abierta tiene dos opciones producir hoy y vender su producción al precio spot de la trayectoria o abandonar las faenas sin costo. Si la mina se encuentra cerrada la decisión óptima es abrir o abandonar sin costo. Lo anterior es forzado al imponer exógenamente un valor nulo a todo estado en T .

De acuerdo con lo anterior, se pueden establecer las funciones de valor en el instante $t = T - 1$:

$$V(\mathbf{x}_{\omega_{T-1}}, Q \geq 1, T - 1) = \text{Max}(FC(S_{\omega_{T-1}}, q^*); 0) \quad \forall Q \quad (7.12)$$

$$W(\mathbf{x}_{\omega_{T-1}}, Q \geq 1, T - 1) = \text{Max}(FC(S_{\omega_{T-1}}, q^*) - K_2; 0) \quad \forall Q \quad (7.13)$$

Definidos estos valores de nodo finales, el algoritmo de valorización retrocede una oportunidad de ejercicio hasta $t = T - 2$, en donde debe definirse los valores de nodo $V(\mathbf{x}_{\omega_{T-2}}, Q, t)$ y $W(\mathbf{x}_{\omega_{T-2}}, Q, t)$ para todo Q y ω .

Recordando lo expresado en torno a la valorización de opciones americanas, esta requiere una estimación de un valor de transición o función de transición. El algoritmo LSM provee esta función a través una regresión de mínimos cuadrados entre los pagos descontados y una base de funciones evaluadas en las variables de estado simuladas.

En el caso de la mina de Brennan y Schwartz (1985) es necesario una función de transición para cada posible transición de la mina. Por lo tanto para cada estado Q de inventario o reserva posible, se requieren estimar dos funciones de transición una si la

mina está cerrada y otra si la mina está abierta. Si NQ es el número de estados de reservas posibles, en cada oportunidad de ejercicio t_k , es necesario calcular $2NQ$ funciones de transición.

Si se designa por $G(V, Q, t)$ el valor de nodo descontado al instante t de una mina abierta con nivel de reservas Q , el vector que contiene a todas las trayectorias de precio en este estado es $\mathbf{G}(V, Q, t)$. Análogamente, el vector de nodo descontado al instante t de una mina cerrada con nivel de reservas Q es $\mathbf{G}(W, Q, t)$. Por lo tanto, se puede definir una regresión lineal múltiple entre estos vectores y una combinación de funciones base evaluadas en variables de estado $\mathbf{L}(\mathbf{X}_t)$:

$$[\mathbf{G}(V, Q, t) | \mathbf{G}(W, Q, t)] = \mathbf{L}(\mathbf{X}_t) [a(V, Q, t) | a(W, Q, t)] + \mathbf{e} \quad (7.14)$$

donde los coeficientes de la regresión lineal a , son lógicamente funciones del estado de operación las reservas y el tiempo.

Los valores ajustados $\hat{\mathbf{G}}(V, Q, t) | \hat{\mathbf{G}}(W, Q, t)$ de esta regresión forman parte de los valores de transición entre estados de la mina con los que se toman las decisiones de ejercicio óptimo.

A continuación se detalla la notación utilizada para describir las decisiones de ejercicio óptimo en la implementación multifactorial de la mina de Brennan y Schwartz (1985)

$\hat{g}_\omega(V, Q-1, t)$: Es la componente del vector $\hat{\mathbf{G}}(V, Q, t)$ correspondiente a la trayectoria ω . Representa el valor esperado en el instante t del valor de una mina abierta indicada por V que cuenta con $Q-1$ inventario de mineral.

$V_{Q,t}^{Transicion}$: Contiene el valor de continuación óptimo de una mina que se encuentra abierta en t con Q inventario de mineral sobre la trayectoria ω .

$V(\mathbf{x}_{\omega_{t+1}}, Q-1, t+1)$: Valor de una mina abierta en el instante $t+1$, con el vector de variables de estado $\mathbf{x}_{\omega_{t+1}}$ que cuenta con $Q-1$ inventario de mineral.

Las mismas definiciones anteriores se aplican a los casos de una mina cerrada indicada por W .

Utilizando las definiciones anteriores se explica de qué manera el algoritmo LSM asigna las decisiones óptimas de ejercicio:

Si la mina se encuentra abierta, con Q niveles de reservas de mineral, en el instante t , se puede tomar la decisión de continuar la producción, cerrar temporalmente pagando el costo de cierre o abandonar la mina sin costos. Esta decisión se tomará en función a los valores esperados de la mina, en los posibles estados de transición:

$$V_{Q,t}^{Transicion} = \text{Max} \left[FC(S_{\omega_t}, q^*) + \hat{g}_{\omega}(V, Q-1, t); -K_1 - f + \hat{g}_{\omega}(W, Q, t); 0 \right] \quad (7.15)$$

Dependiendo de las decisiones que se tomen, para cada nivel de reservas y en todas las trayectorias simuladas ω , los valores de nodo se fijarán del siguiente modo:

Si la mina abierta continúa abierta:

$$\begin{aligned} V_{Q,t}^{Transicion} &= FC(S_{\omega_t}, q^*) + \hat{g}_{\omega}(V, Q-1, t) \\ &\rightarrow V(S_{\omega_t}, Q, t) = FC(S_{\omega_t}, q^*) + V(\mathbf{x}_{\omega_{t+1}}, Q-1, t+1)e^{-(r+\lambda_1)\Delta t} \end{aligned} \quad (7.16)$$

Si la mina abierta se cierra:

$$\begin{aligned} V_{Q,t}^{Transicion} &= -K_1 - f + \hat{g}_{\omega}(W, Q, t) \\ &\rightarrow V(\mathbf{x}_{\omega_t}, Q, t) = -K_1 - f + W(\mathbf{x}_{\omega_{t+1}}, Q, t+1)e^{-(r+\lambda_0)\Delta t} \end{aligned} \quad (7.17)$$

Si la mina abierta se abandona:

$$V_{Q,t}^{Transicion} = 0 \quad \rightarrow \quad V(\mathbf{x}_{\omega_t}, Q, t) = 0 \quad (7.18)$$

Si la mina se encuentra cerrada y dispone de Q reservas de mineral en el instante t , se puede tomar la decisión de continuar con la producción congelada, reabrir el yacimiento o abandonar la mina sin costos. Los valores de nodo se fijarán del siguiente modo:

$$W_{Q,t}^{Transicion} = \text{Max} \left[-K_2 + FC(S_{\omega_t}, q^*) + \hat{g}_{\omega}(V, Q-1, t); -f + \hat{g}_{\omega}(W, Q, t); 0 \right] \quad (7.19)$$

Dependiendo de las decisiones que se tomen, para cada nivel de reservas y en todas las trayectorias simuladas ω , el valor de nodo será:

Si la mina cerrada se abre:

$$W_{Q,t}^{Transicion} = -K_2 + FC(S_{\omega}, q^*) + \hat{g}_{\omega}(V, Q-1, t)$$

$$\rightarrow W(\mathbf{x}_{\omega}, Q, t) = -K_2 + FC(\mathbf{x}_{\omega}, q^*) + V(\mathbf{x}_{\omega+1}, Q-1, t+1)e^{-(r+\lambda_1)\Delta t} \quad (7.20)$$

Si la mina cerrada continúa cerrada:

$$W_{Q,t}^{Transicion} = -f + \hat{g}_{\omega}(W, Q, t)$$

$$\rightarrow W(\mathbf{x}_{\omega}, Q, t) = -f + W(\mathbf{x}_{\omega+1}, Q, t+1)e^{-(r+\lambda_0)\Delta t} \quad (7.21)$$

Si la mina cerrada se abandona:

$$W_{Q,t}^{Transicion} = 0 \quad \rightarrow \quad W(\mathbf{x}_{\omega}, Q, t) = 0 \quad (7.22)$$

Al realizar las asignaciones anteriores, se obtienen nuevos valores de nodo para los valores de una mina cerrada o abierta, en cualquier estado de reservas Q y en todas las trayectorias.

De este modo, el algoritmo debe repetir los pasos anteriores hasta el instante $t = 1$, en donde se colapsa toda la información de cada estado de inventario y estado operacional promediando todas las trayectorias simuladas. Los promedios obtenidos reemplazarán a los valores ajustados de la regresión, para aproximar el valor esperado de continuación:

$$\hat{g}(V, Q-1, 0) = \frac{1}{S} \sum_{\omega=1}^S V_i(\mathbf{x}_{\omega}, Q-1, t=1)e^{-(r+\lambda_1)\Delta t} \quad (7.23)$$

$$\hat{g}(W, Q, 0) = \frac{1}{S} \sum_{\omega=1}^S W_i(\mathbf{x}_{\omega}, Q, t=1)e^{-(r+\lambda_0)\Delta t} \quad (7.24)$$

El valor de transición en el caso de una mina abierta es en $t = 0$ es:

$$V_{Q,0}^{Transicion} = \text{Max} \left[FC(S_{\omega_0}, q^*) + \hat{g}(V, Q-1, 0); -K_1 - f + \hat{g}(W, Q, 0); 0 \right] \quad (7.25)$$

El valor de transición en el caso de una mina cerrada es en $t = 0$ es:

$$W_{Q,0}^{Transicion} = \text{Max} \left[-K_2 + FC(S_{\omega}, q^*) + \hat{g}(V, Q-1, 0); -f + \hat{g}(W, Q, 0); 0 \right] \quad (7.26)$$

Como se han obtenido los valores promedio de todas las trayectorias simuladas, y en el instante $t = 0$ se tiene la combinación inicial de variables de estado, el algoritmo entrega la estimación para el valor presente de la mina, en sus dos estados de operación y para cualquier nivel de reservas.

Si el estado inicial de operación de la mina es abierta, la decisión que enfrenta la gerencia para el próximo periodo será:

$$V_{Q,0}^{Transicion} = \text{Max}(FC(S_0, q^*) + \hat{g}(V, Q-1, 0); -K_1 - f + \hat{g}(W, Q, 0); 0) \quad (7.27)$$

Si se decide continuar la producción a $t=1$, el valor de la mina abierta está dada por la siguiente expresión:

$$V(\mathbf{x}_0, Q, 0) = FC(S_0, q^*) + \hat{g}(V, Q-1, 0) \quad (7.28)$$

Si se decide el estado cerrado para la mina en $t=1$ su valor será:

$$V(\mathbf{x}_0, Q, 0) = -K_1 - f + \hat{g}(W, Q, 0) \quad (7.29)$$

Si se decide abandonar la mina inicialmente abierta de inmediato su valor será nulo:

$$V(\mathbf{x}_0, Q, 0) = 0 \quad (7.30)$$

Por otra parte, si la mina inicialmente se encuentra cerrada la decisión óptima estará dada por el siguiente valor de transición:

$$W_{Q,0}^{Transicion} = \text{Max}(-f + \hat{g}(W, Q, 0); -K_2 + FC(S_0, q^*) + \hat{g}(V, Q-1, 0); 0) \quad (7.31)$$

Si se decide abrir la mina inicialmente cerrada, su valor será:

$$W(\mathbf{x}_0, Q, 0) = -K_2 + FC(S_0, q^*) + \hat{g}(V, Q-1, 0) \quad (7.32)$$

Si se decide continuar en estado cerrado su valor está dado por la siguiente expresión:

$$W(\mathbf{x}_0, Q, 0) = -f + \hat{g}(W, Q, 0) \quad (7.33)$$

Finalmente, si decide abandonar la mina inicialmente cerrada su valor es nulo:

$$V(\mathbf{x}_0, Q, 0) = 0 \quad (7.34)$$

Con las comparaciones anteriores se ha obtenido la valorización de la mina descrita en Brennan y Schwartz (1985), utilizando un proceso para el precio del cobre que puede contener un número arbitrario de variables de estado, por medio de simulación de montecarlo en el algoritmo LSM propuesto en Longstaff y Schwartz (2001).

7.2.4 Implementación del Algoritmo LSM: Resolución Forward

En los cálculos realizados en esta tesis se utilizó la resolución hacia delante, o en inglés forward loop, para verificar la consistencia de los resultados. Este tipo de verificación es frecuentemente utilizada al resolver activos americanos por simulación. Lo anterior se debe a que si la estrategia de ejercicio óptimo es correcta, un experimento de montecarlo independiente del algoritmo inicial debe entregar resultados similares al evaluar mediante una simulación independiente.

La resolución hacia adelante o en inglés forward loop, consiste en recorrer cada trayectoria a lo largo del tiempo y registrar las decisiones óptimas de ejercicio tomadas (apertura, cierre y abandono). Una vez establecidas las decisiones de ejercicio, la valorización del activo requiere descontar todos los flujos de caja generados en la trayectoria al tiempo inicial. El valor del activo será el promedio en todas las simulaciones de los valores descontados.

Por otra parte, una resolución que avanza en el tiempo por las trayectorias permite obtener información adicional del proyecto como son el porcentaje de trayectorias en que la mina es abandonada, el tiempo de explotación medio y distribuciones de flujos de caja.

Es posible identificar dos formas de realizar una valorización forward por simulación de montecarlo. La primera es determinar las variables críticas de ejercicio de cada una de las opciones, para todo el espacio de estados. En el contexto de la resolución de la mina en Brennan y Schwartz (1985) esta información se resume en tres precios críticos de ejercicio para cualquier nivel de inventario y toda oportunidad de ejercicio. La segunda forma es ocupar las funciones de transición obtenidas mediante las regresiones lineales.

Las experiencias numéricas indican, que la segunda alternativa es más robusta y entrega resultados más precisos, ya que asegura que las decisiones de ejercicio óptimo sean las mismas en la resolución backward y forward.

El problema con los precios críticos de ejercicio es, que en general, su estimación puede tener deficiencias basadas en inestabilidad numérica. En la próxima sección se explica la determinación de los precios críticos de abandono, cierre y apertura de la mina.

7.2.5 Política Óptima de Operación y Precios Críticos de Ejercicio

La política óptima de operación indica cuándo es conveniente ejercer las opciones de abandono, cierre y apertura. Como se indicó anteriormente las funciones de transición, estimadas por medio de regresiones lineales, contienen toda la información necesaria para tomar las decisiones óptimas de ejercicio.

No obstante lo anterior, una información valiosa para el análisis de la operación de la mina es resumir la política óptima de operación en tres precios críticos de ejercicio definidos por S_0 el precio crítico de abandono, S_1 el precio crítico de cierre y por S_2 el precio crítico de apertura. Estos precios críticos se obtienen igualando las funciones de transición entre los distintos estados de operación.

En los términos descritos por el artículo de Brennan y Schwartz (1985), el concepto presente en los precios de ejercicio óptimo, implica que las funciones que describen el valor de una mina abierta $V(S)$ o cerrada $W(S)$ son ambas crecientes en el precio del commodity y se interceptan. Lo anterior implica que existen niveles de precio en donde la función $V(S)$ es mayor que la función $W(S)$ y viceversa. Por lo tanto existen condiciones críticas en donde es óptimo ejercer las opciones y “saltar” de una función tal como indica la siguiente figura:

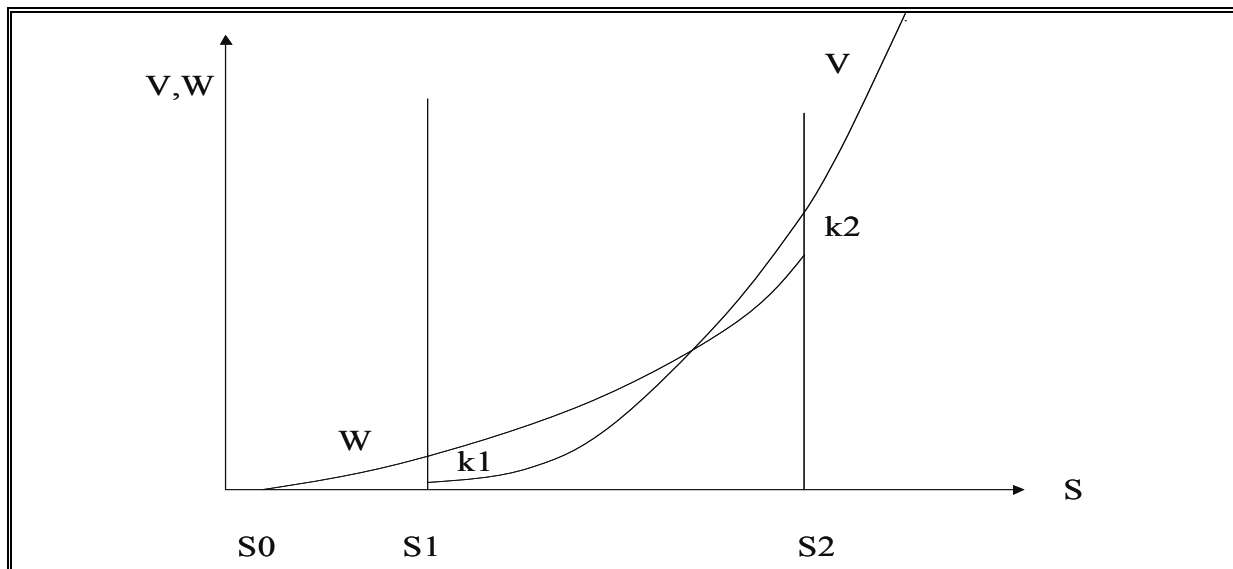


Figura 7-6: Ilustración funciones del valor mina abierta o cerrada precios críticos de ejercicio mina de Brennan y Schwartz (1985)

Las funciones $V(S)$ y $W(S)$ representan curvas de nivel, para el caso de modelos de precios multifactoriales, por lo tanto el análisis que se describe a continuación es idéntico si se quiere determinar las variables críticas en el resto de las variables de estado del modelo de precios.

Los pasos a seguir para determinar los valores críticos se detallan a continuación.

Definir una oportunidad de ejercicio t y nivel de inventario Q para los cuales requiere calcular los precios críticos. Si el modelo de precios es multifactorial y el precio es una de las dimensiones, se deben construir las funciones de transición, dejando fijo el nivel de todas las variables de estado, a excepción del precio spot.

Las funciones de transición en el caso de una mina abierta, representan las tres decisiones posibles para dicho estado: continuar la producción, detenerla o abandonarla. Las funciones de transición se determinan utilizando las funciones de continuación (\hat{y}):

La función de transición de una mina abierta es:

$$FC(S, q^*) + \hat{g}(S, V, Q-1, t) = -K_1 - f + \hat{g}(S, W, Q, t) \quad (7.35)$$

La función de transición de una mina cerrada es:

$$-f + \hat{g}(W, Q, t) = -K_2 + FC(S, q^*) + \hat{g}(V, Q-1, t) \quad (7.36)$$

Si se quiere determinar el precio crítico de cierre S_1 de una mina abierta se debe resolver las raíces de su ecuación de transición:

$$FC(S_1, q^*) + \hat{g}(S_1, V, Q-1, t) = -K_1 - f + \hat{g}(S_1, W, Q, t) \quad (7.37)$$

Antes de calcular el resto de los precios críticos se debe comprobar que el recorrido de las funciones no genere soluciones in factibles⁸. Esto se logra evaluando las funciones de transición de una mina abierta en su precio crítico de cierre. Si al evaluar estas funciones de transición en el precio crítico obtenido, se obtiene un número positivo, implica que la intersección es factible.

Si es el caso de una intersección factible, el precio crítico de apertura de una mina cerrada S_2 se obtiene de la intersección de las funciones de transición en el caso de una mina cerrada:

$$-K_2 + FC(S_2, q^*) + \hat{g}(S_2, V, Q-1, t) = -f + \hat{g}(S_2, W, Q, t) \quad (7.38)$$

El precio crítico de abandono S_0 se obtiene igualando a cero el valor esperado de una mina que se encuentra cerrada:

$$-f + \hat{g}(S_0, W, Q, t) = 0 \quad (7.39)$$

⁸ Es infactible una solución que entregue una intersección en donde las funciones de continuación entreguen valores negativos. Lo anterior implicaría un comportamiento no óptimo de operación de la mina: ejercer una opción de cierre con costos y llegar a un estado en que el valor esperado de la mina sea menor que cero. Antes de tomar la decisión descrita debe abandonar las operaciones.

En el caso en que la intersección de las funciones de transición de apertura sea negativa esto indica que la mina se abandona sin un cierre previo. Este escenario genera dos posibles tipos de políticas, dependiendo de la intersección de las funciones de transición de una mina cerrada:

El primer tipo de política corresponde al caso en que la intersección entre las curvas de transición de una mina cerrada, es un número positivo. Si esto sucede la intersección será el precio crítico de apertura. El precio crítico de cierre S_1 se obtiene de la raíz de la siguiente ecuación:

$$FC(S_1, q^*) + \hat{g}(S_1, V, Q-1, t) = 0 \quad (7.40)$$

El precio crítico de abandono S_0 , en este caso, se encuentra en la raíz de la siguiente ecuación:

$$-f + \hat{g}(S_0, W, Q, t) = 0 \quad (7.41)$$

El segundo tipo de política corresponde al caso en que la intersección entre las curvas de transición de una mina cerrada, es un número negativo. En este caso el precio crítico de apertura S_2 es la raíz de la siguiente ecuación:

$$-K_2 + FC(S_2, q^*) + \hat{g}(S_2, V, Q-1, t) = 0 \quad (7.42)$$

En este caso especial el precio crítico de cierre S_1 coincide con el de abandono S_0 y se obtienen de la raíz de la siguiente ecuación:

$$FC(S_1 = S_0, q^*) + \hat{g}(S_1 = S_0, V, Q-1, t) = 0 \quad (7.43)$$

Siguiendo el procedimiento anterior se pueden obtener los precios críticos de ejercicio para cualquier estado de la mina. En la próxima sección se presentan los distintos aspectos implementación de la mina de Brennan y Schwartz (1985) si se asume que la dinámica del precio spot sigue un proceso de tres factores estocásticos en el modelo de Cortazar y Schwartz (2003). Los resultados se presentan en la sección posterior.

7.3 Implementación Mina de Brennan y Schwartz (1985) en el modelo multifactorial de Cortazar y Schwartz 2003

En esta sección se entregan las variables y parámetros con los que se implementó la valorización de la mina cobre. Los parámetros operativos de este yacimiento y la estructura tributaria se encuentran en Brennan y Schwartz (1985):

Parámetros operativos	Valor
Tasa de producción (q^*)	10 MMLb./año
Inventario (Q)	150 MMLb.
Costo de producción (A)	0,5 US\$/Lb.
Costo de apertura (K_2)	200.000 US\$
Costo de cierre (K_1)	200.000 US\$
Costo de mantención (f)	500.000 US\$/año
Impuesto a la propiedad (λ)	2 %/año
Impuesto a las utilidades (t_1)	50 %
Impuesto a las ventas (t_2)	0 %

Tabla VII-1: Parámetros operativos y estructura tributaria de la mina del ejemplo propuesto en Brennan y Schwartz (1985)

Los 12 parámetros del proceso de precios en el modelo de Cortazar y Schwartz (2003), se indican en la siguiente tabla⁹:

⁹ La estimación de parámetros y variables de estado fueron realizadas por Lorenzo Naranjo en el proyecto FONDEF I102400 .

Parámetros en Cortazar y Schwartz 2003	Valor
λ_1	-0,032
λ_2	-0,392
λ_3	- 0,193
a	1,379
κ	2,85
\bar{v}	-0,007
σ_1	0,257
σ_2	0,906
σ_3	0,498
ρ_{12}	0,215
ρ_{23}	0,841
ρ_{13}	-0,229

Tabla VII-2: Parámetros utilizados en la valorización de la mina de Brennan y Schwartz (1985) bajo el modelo de Cortazar y Schwartz (2003)

Las variables de estado utilizadas en esta investigación obtenidas de las transacciones de contratos futuros en la bolsa NYMEX se presentan a continuación:

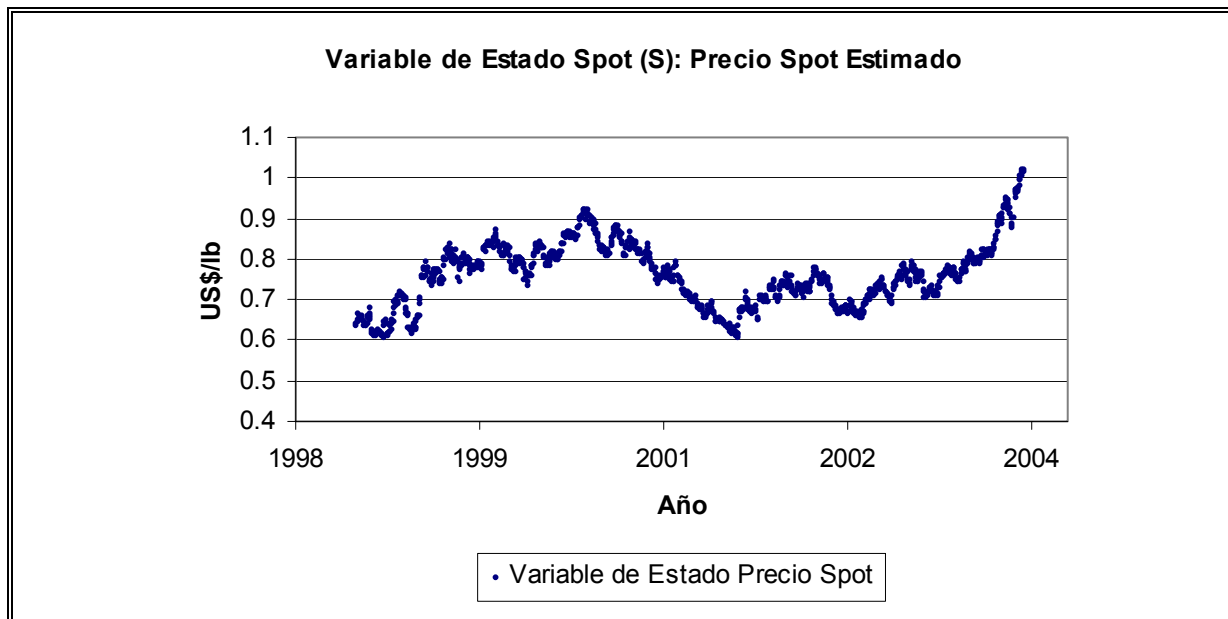


Figura 7-7: Evolución de variable de estado precio spot, en modelo de Cortazar y Schwartz (2003).

En el periodo considerado la variable de estado precio spot, oscila entre los US\$ 0,6 por libra de cobre y US\$ 1,2 por libra de cobre, promediando los US\$ 0,76 por libra de cobre.

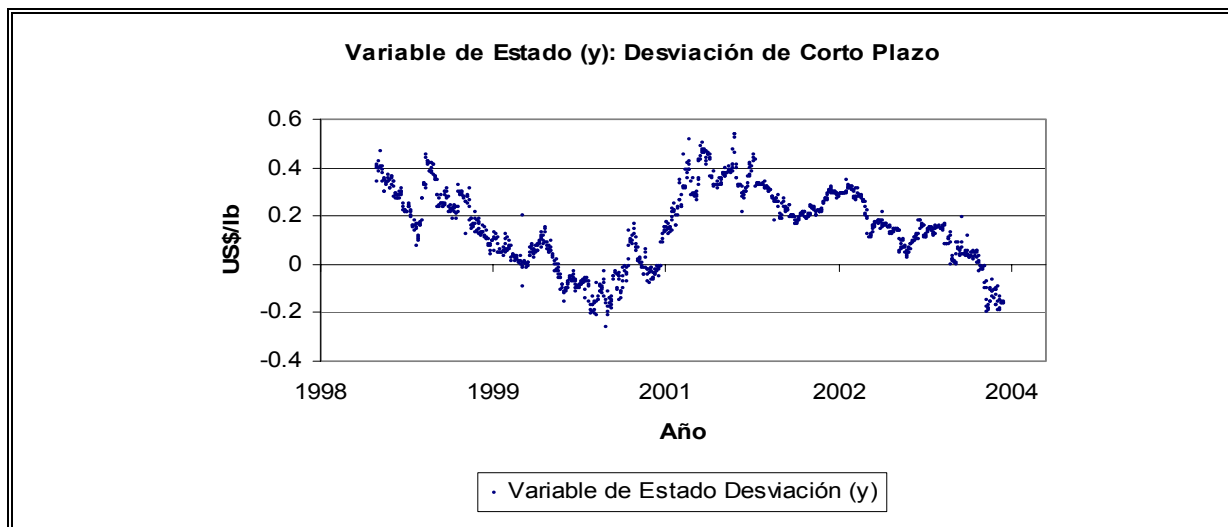


Figura 7-8: Evolución de variable de estado, desviación de corto plazo (y) en modelo de Cortazar y Schwartz (2003).

La variable de estado y desviación de corto plazo, oscila entre -0,25 y 0,54, promediando 0,15. La variable tiene unidades de retorno continuo.

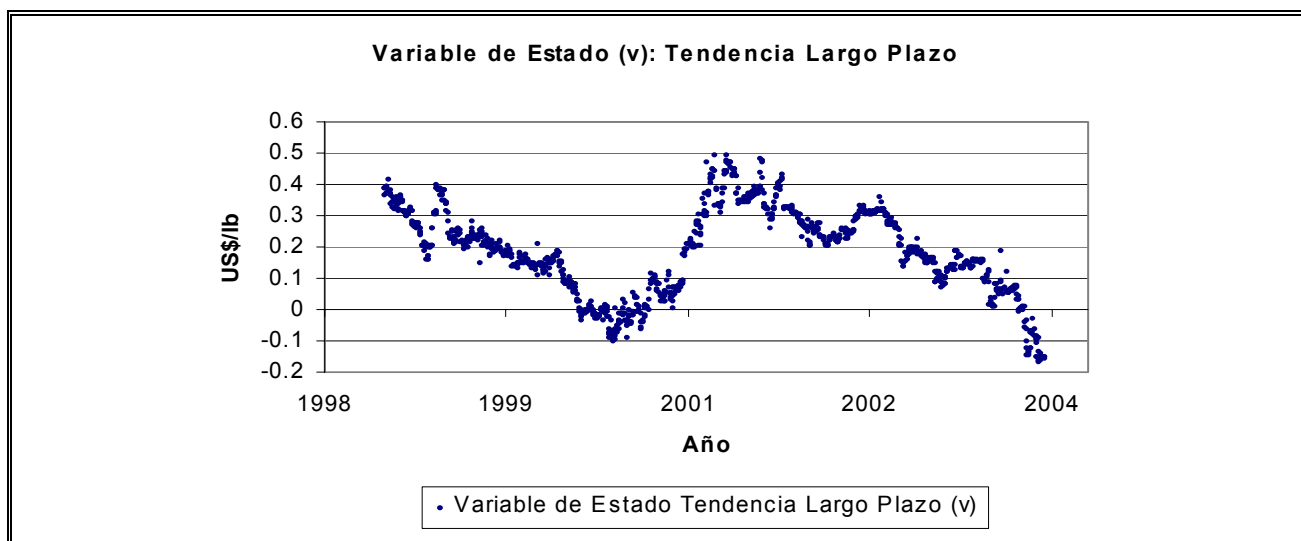


Figura 7-9: Evolución de variable de estado, retorno de largo plazo (v) en modelo de Cortazar y Schwartz (2003)

La variable de estado v retorno de largo plazo, oscila entre -0,16 y 0,495, promediando 0,18 y tiene unidades de retorno continuo.

Los parámetros técnicos utilizados por el algoritmo LSM en la evaluación de la mina se presentan en la siguiente tabla:

Parámetros algoritmo LSM	Valor
Número de simulaciones (M)	50.000 y 10.000
Duración de la Concesión	50 y 30 años
Oportunidades de ejercicio (OE)	3 / año
Tiempo entre oportunidades de ejercicio (Δt)	4 meses

Tabla VII-3: Parámetros técnicos algoritmo LSM implementación mina de Brennan y Schwartz (1985) en modelo de Cortazar y Schwartz (2003).

Como se definió en los capítulos 5 y 6 una alternativa para definir la función de regresión, para estimar los valores de transición en cada oportunidad de ejercicio, es aquella formada por una constante y las tres primeras potencias de contratos futuros a cuatro meses plazo:

$$G(S, y, v) = \sum_{i=0}^3 a_i F(S, \delta, v, \Delta t)^i \quad (7.44)$$

$F(S, \delta, v, \Delta t)$ se puede encontrar a partir de las expresiones del capítulo cuatro y la fórmula de valorización en (4.16).

7.4 Resultados Implementación Mina de Brennan y Schwartz (1985) en el modelo multifactorial de Cortazar y Schwartz 2003

En esta sección se presentan los resultados de la implementación de la mina de Brennan y Schwartz (1985) para el modelo de precios del cobre de 3 factores descrito en Cortazar y Schwartz (2003) . Como este modelo no cuenta con soluciones alternativas se exponen distintos análisis para la validación y comparación de los resultados del algoritmo. En la presentación de los resultados se presenta como referencia la evaluación del valor presente neto de la mina sin las opciones de cierre, apertura y abandono. La evaluación por medio del valor presente sin opciones se realiza utilizando el enfoque de los equivalentes ciertos. Simplemente, se deben valorizar las ventas de la producción anual a los precios de contratos futuros, suponiendo 15 años de explotación continua.

7.4.1 Validación Implementación de la Mina Brennan y Schwartz (1985) para el modelo de precios en Cortazar y Schwartz (2003)

Para iniciar la presentación de los resultados se comparó los resultados obtenidos en Brennan y Schwartz (1985) mediante diferencias finitas, con los valores obtenidos en la implementación propuesta utilizando el modelo de 3 factores de Cortazar y Schwartz (2003) y el algoritmo LSM restringiendo los parámetros del proceso de precios para aproximar el proceso de precios de un factor del artículo original.

Los parámetros operativos de la mina, la estructura de impuestos y tasas de interés son equivalentes a Brennan y Schwartz (1985). Las transformaciones aproximar el proceso de precios de 1 factor son las siguientes:

Parámetros en Cortazar y Schwartz 2003	Transformación
λ_1	$v_0 - y_0 - (r - \delta) = \lambda_1$
λ_2	≈ 0
λ_3	≈ 0
a	1
κ	1
\bar{v}	≈ 0
σ_1	σ
σ_2	≈ 0
σ_3	≈ 0
ρ_{12}	≈ 0
ρ_{23}	≈ 0
ρ_{13}	≈ 0
y_0	λ_2 / κ
v_0	$\bar{v} - \lambda_3 / a$

Tabla VII-4: Parámetros y variables de estado para validación implementación programa mina Brennan y Schwartz (1985) utilizando el proceso de precios Cortazar y Schwartz (2003)

En la validación se emplea un plazo de concesión de 50 años y 50.000 trayectorias, siguiendo la implementación de Gravet (2003) que resuelve la mina Brennan y Schwartz (1985) utilizando LSM con un modelo del precio spot de 1 factor estocástico.

La siguiente tabla compara los valores del artículo Brennan y Schwartz (1985), aquellos obtenidos mediante el algoritmo LSM en el proceso de Cortazar y Schwartz (2003) con parámetros modificados:

Precio spot (US\$/lb.)	Valor de la Mina (MMUS\$) Brennan-Schwartz (1985)			Valor de la Mina (MMUS\$) Algoritmo LSM Cortazar y Schwartz (2003) Parámetros Modificados		
	Valor Presente	Abierta	Cerrada	Valor Presente	Abierta	Cerrada
0,4	-8,14	4,15	4,35	-8,15	4,2	4,4
0,5	1,85	7,95	8,11	1,84	7,93	8,12
0,6	7,84	12,52	12,49	7,85	12,51	12,49
0,7	13,87	17,56	17,38	13,86	17,51	17,31
0,8	19,91	22,88	22,68	19,87	22,8	22,6
0,9	25,94	28,38	28,18	25,88	28,29	28,09
1,0	31,98	34,01	33,81	31,89	33,89	33,69

Tabla VII-5: Comparación solución mina Brennan Schwartz (1985) utilizando diferencias finitas y evaluación con parámetros modificados Cortazar y Schwartz (2003) a través del algoritmo LSM.

Se observa de la tabla anterior que el modelo entrega soluciones cercanas a la original. Por lo tanto, la implementación planteada basada en el algoritmo LSM recoge correctamente el valor opción de la mina.

7.4.2 Evaluación Histórica Mina de Brennan y Schwartz (1985) bajo el modelo de precios Cortazar y Schwartz (2003).

Para estudiar el comportamiento histórico del valor del yacimiento se valorizó la mina utilizando 10.000 simulaciones y 30 años de evaluación. Las variables de estado utilizadas comprenden el periodo Enero-1999 a Diciembre de 2003.

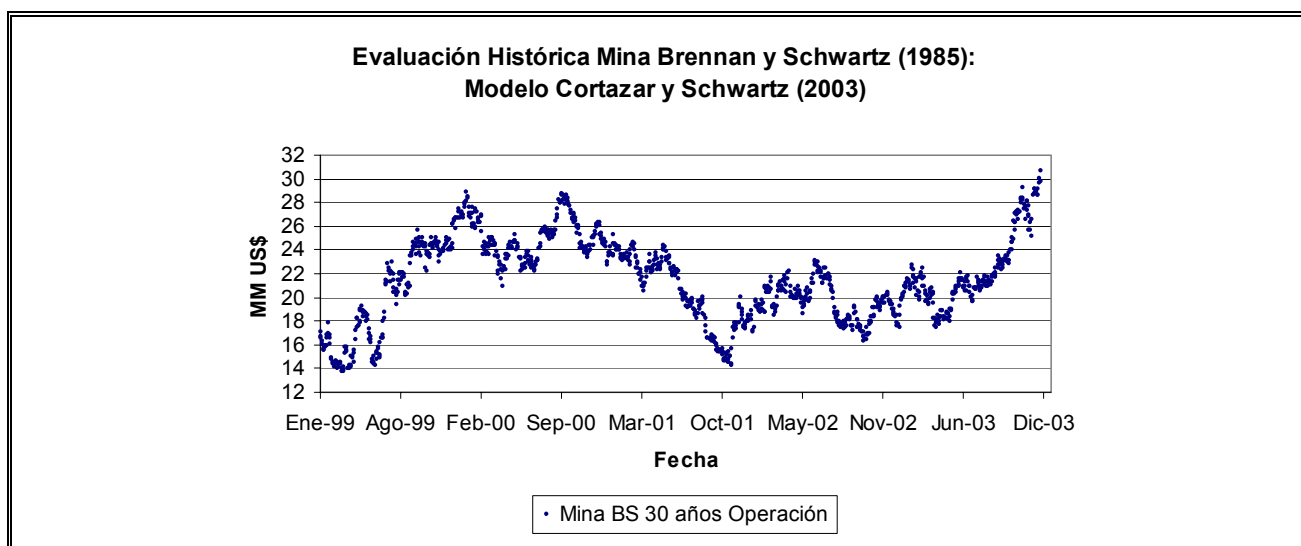


Figura 7-10: Evolución histórica mina de Brennan y Schwartz (1985) bajo el modelo de Cortazar y Schwartz (2003) considerando 30 años de operaciones y 10.000 simulaciones.

La figura que se muestra a continuación grafica el valor opción de la mina, la diferencia entre la evaluación estática y la evaluación dinámica y el precio spot US\$ dividido por 10. De manera consistente los periodos de precios bajos el valor opción sube violentamente y ocurriendo lo contrario al elevarse los precios.

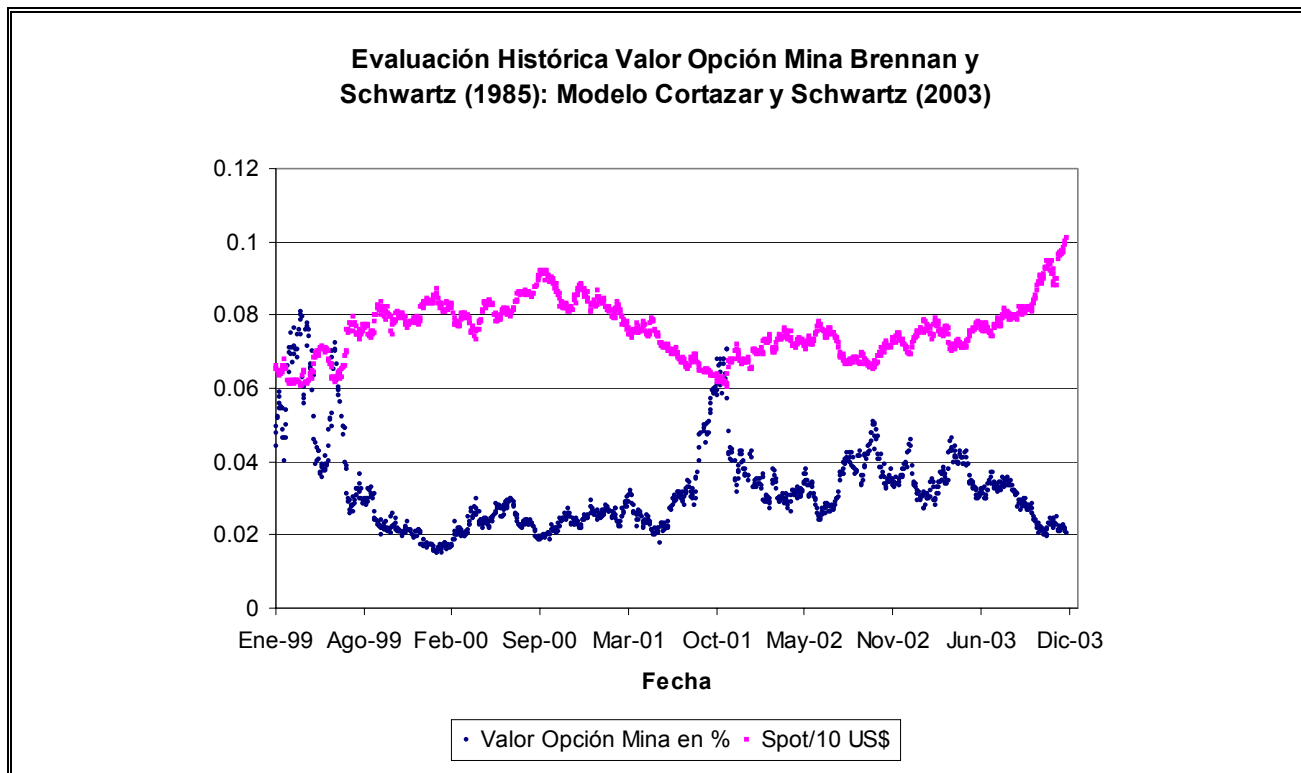


Figura 7-11: Evolución histórica valor opción y precio spot en decimales de dólar mina de Brennan y Schwartz (1985) bajo el modelo de Cortazar y Schwartz (2003) considerando 30 años de operaciones y 10.000 simulaciones.

La relación entre el nivel del precio spot y el valor opción se observa en el siguiente gráfico:

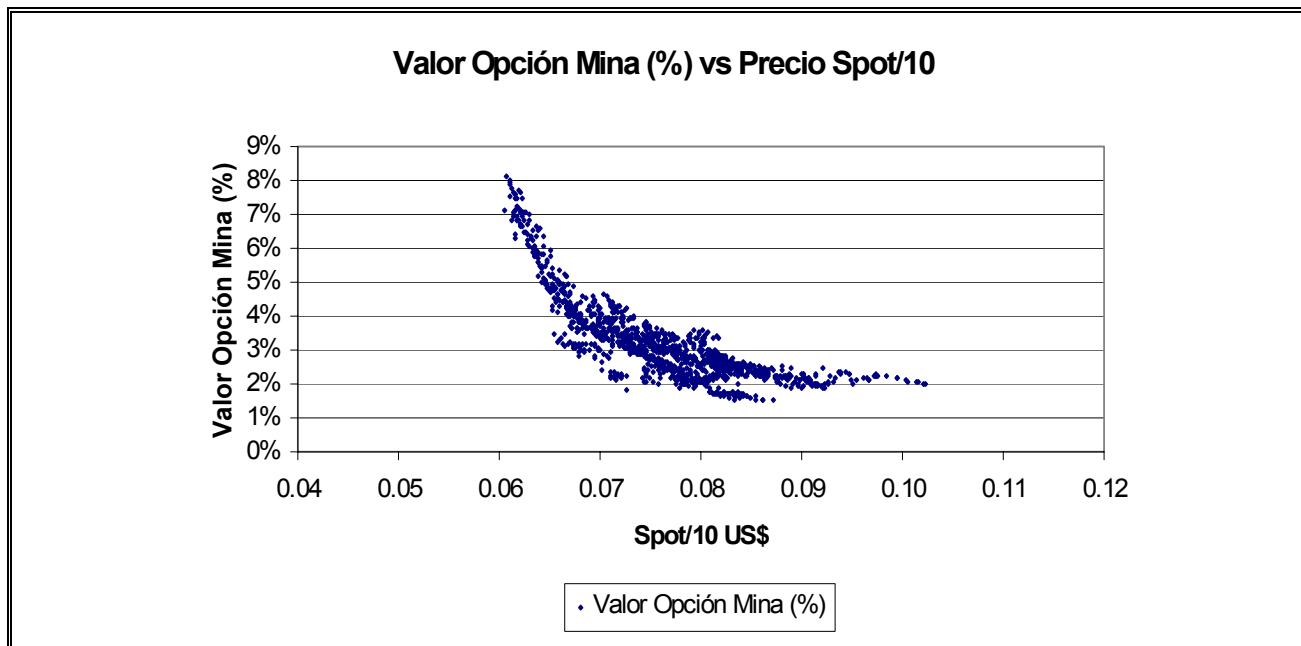


Figura 7-12: Valor opción (%) versus precio spot en decimal de dólar evolución histórica mina de Brennan y Schwartz (1985) bajo el modelo de Cortazar y Schwartz (2003) considerando 30 años de operaciones y 10.000 simulaciones.

La dispersión de puntos se debe a que el modelo considera dos variables de estado adicionales y el valor opción de la mina también depende de ellas. Un ejemplo exacto de la valorización histórica se entrega en las siguientes tablas. Si se considera el día 14 de Enero de 1999, las variables de estado eran las siguientes:

Variables de Estado el 14 de Enero 1999	
S_o	0,65
y_o	0,465
v_o	0,417

Tabla VII-6: Variables de estado modelo de Cortazar y Schwartz (2003) para 14 de Enero de 1999.

En la siguiente tabla se entrega la evaluación del yacimiento de Brennan y Schwartz (1985) a través del algoritmo LSM y del valor presente sin opciones:

Mina de Brennan y Schwartz (1985) en Cortazar y Schwartz (2003)		
Valor Presente (MMUS \$)	Abierta (MMUS \$)	Cerrada (MMUS \$)
15,95	16,75	16,68

Tabla VII-7 Evaluación del modelo Brennan y Schwartz (1985) y valor presente, utilizando modelo Cortazar y Schwartz (2003), para variables de estado del 14 de Enero de 1999.

7.4.3 Sensibilidad en Variables de Estado Mina de Brennan y Schwartz (1985) bajo el modelo de precios Cortazar y Schwartz (2003).

En los siguientes gráficos se presentan evaluaciones de la mina para distintas combinaciones de variables de estado modificando una de las tres variables en cada caso.

La siguiente figura muestra la variación del valor de la mina y el valor presente neto, con respecto al precio spot. Se dejaron fijos los valores de la desviación de corto plazo ($y = 0,01$) y el retorno de largo plazo ($v = -0,1$):

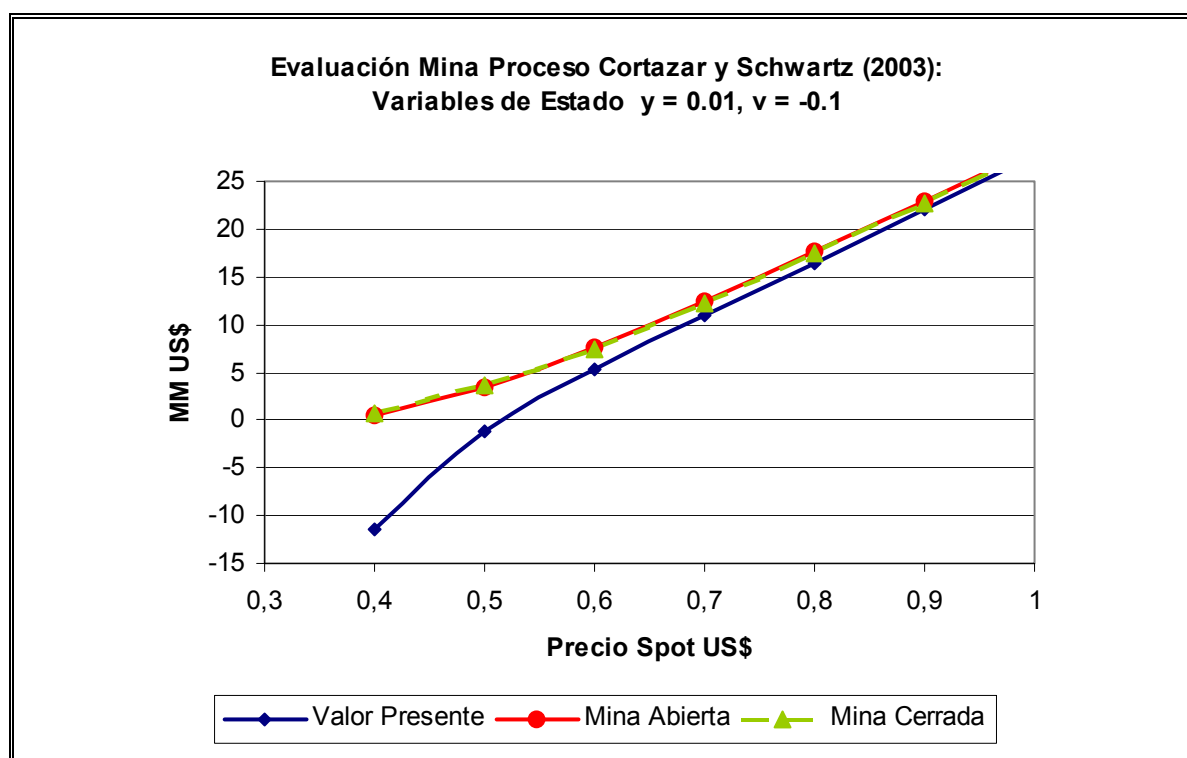


Figura 7-13: Evaluación mina y valor presente en proceso Cortazar y Schwartz (2003). Considerando $v = -0,1$, $y = 0,01$.

En el siguiente gráfico es posible apreciar la variación del valor de la mina y el valor presente neto, con respecto a las desviaciones de corto plazo del proceso. Se dejaron fijos los valores del precio spot ($S = 0,4$) y el retorno de largo plazo ($v = 0,3$):

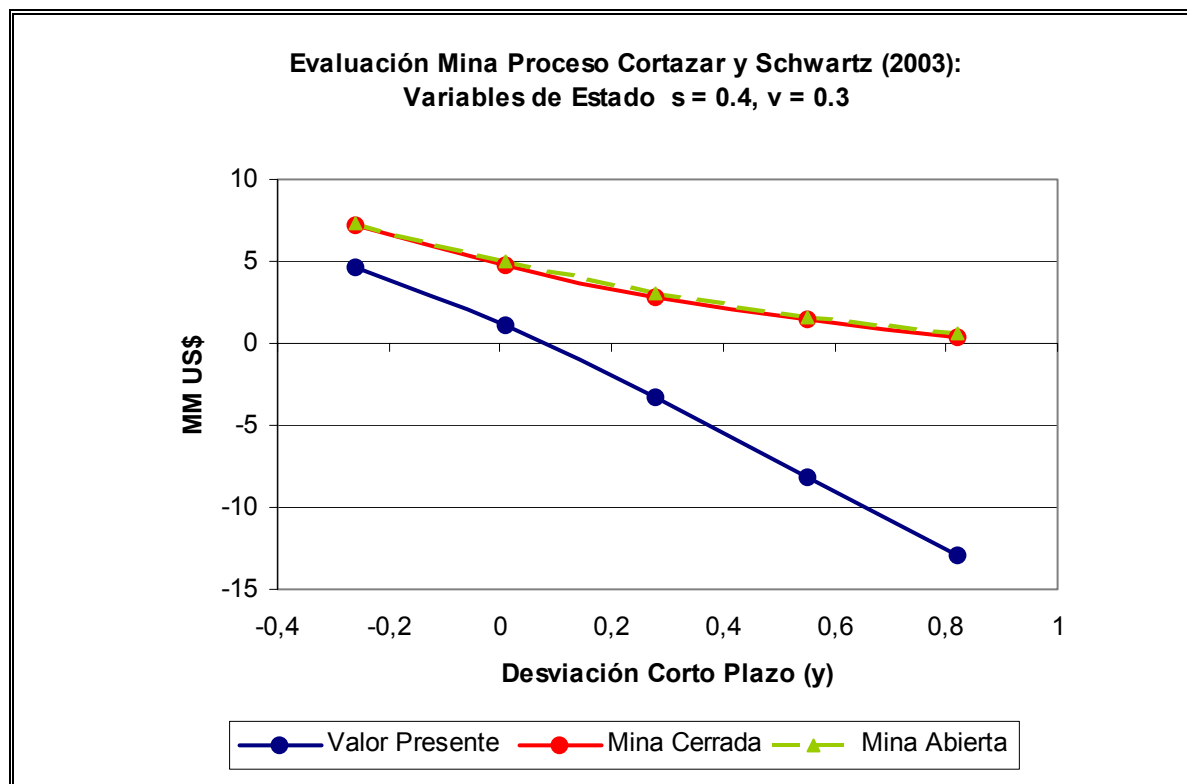


Figura 7-14: Evaluación mina y valor presente en proceso Cortazar y Schwartz (2003), con respecto a las al retorno de corto plazo ν . Considerando $S = 0,4, \nu = 0,3$.

La última variable que queda por analizar es el retorno de largo plazo ν . En el siguiente gráfico es posible apreciar la variación del valor de la mina y el valor presente neto, con respecto al retorno de largo plazo. Se dejaron fijos los valores del precio spot ($S = 0,4$) y la desviación de corto plazo ($y = -0,26$):

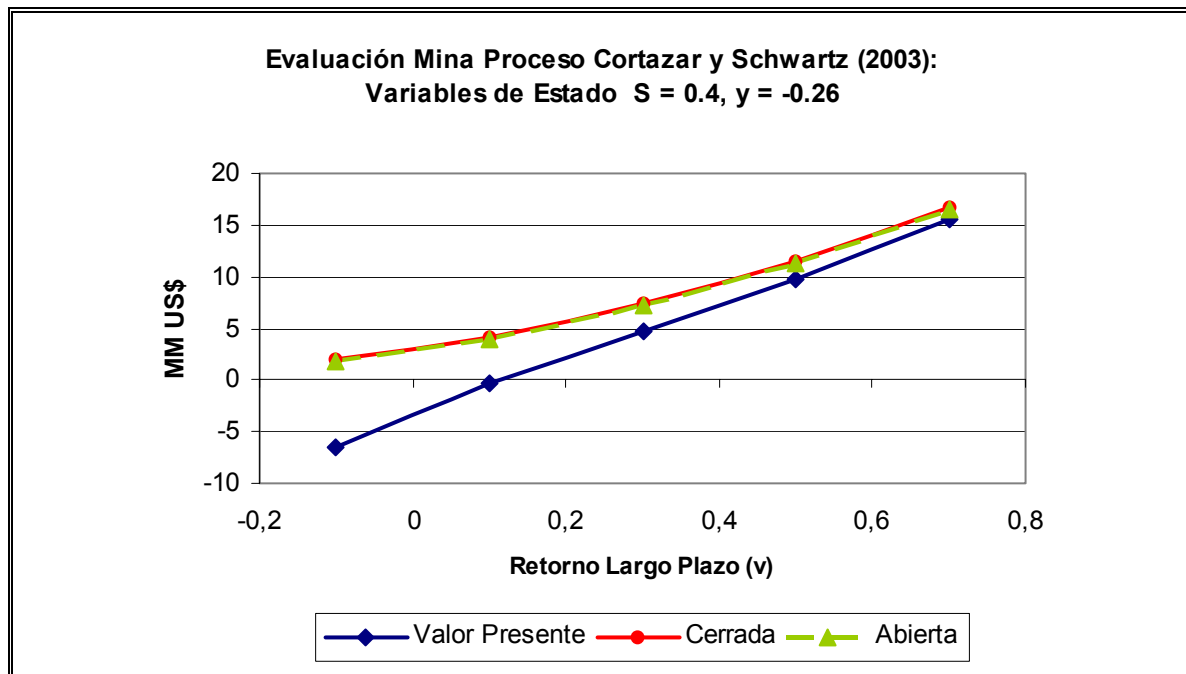


Figura 7-15: Evaluación mina y valor presente en proceso Cortazar y Schwartz (2003), con respecto a al retorno de largo plazo v considerando $S = 0,4$, $y = -0,26$.

Las evaluaciones realizadas en esta sección demuestran la estabilidad de las soluciones en todas las variables de estado del proceso de Cortazar y Schwartz (2003), cualidad que es requisito básico para cualquier solución numérica de este problema.

7.4.4 Variación Valor Mina en función del nivel de Inventario Inicial.

Una de las ventajas de la implementación realizada es la obtención en una sola ejecución del valor de todos los yacimientos con inventarios menores al máximo. Lo que entrega la posibilidad de evaluar numéricamente la no linealidad en el valor de la mina versus el nivel de inventario.

En el siguiente grafico se muestra el incremento porcentual del valor de la mina evaluada el 14 de Enero de 1999 porcentual al valor sin opciones versus el nivel de reservas:

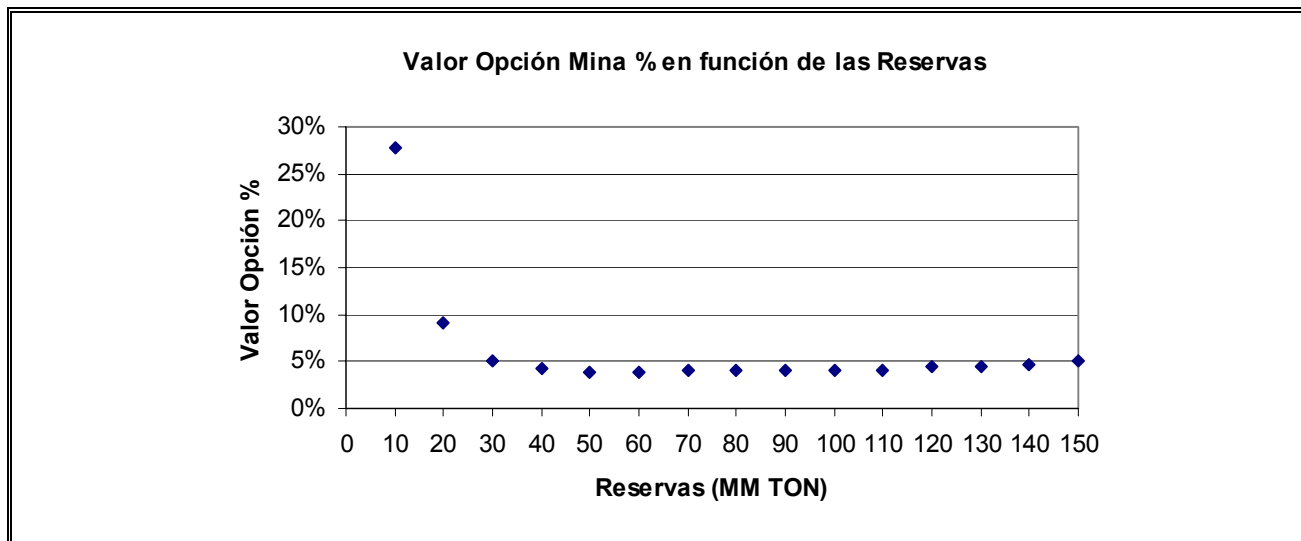


Figura 7-16: Valor Opción mina Brennan y Schwartz (1985) porcentual al valor sin opciones versus inventario inicial.

7.4.5 Evolución Valores Esperados de la Mina de Brennan y Schwartz (1985) en el modelo multifactorial de Cortazar y Schwartz 2003

En secciones anteriores se destacó el hecho que toda la información necesaria para el cálculo de los precios críticos, se encuentra contenida en los coeficientes estimados en la solución backward del algoritmo LSM.

Una de las ventajas de utilizar funciones de regresión simples, es la facilidad con que se pueden interpretar los resultados. En las siguientes figuras se muestra la estabilidad del valor esperado de una mina abierta, durante todo el horizonte evaluado. Los gráficos se generan con las funciones de continuación, estimadas mediante regresiones en todas las oportunidades de ejercicio. En cada caso se indica el nivel de inventario, y los niveles de las variables de estado utilizadas.

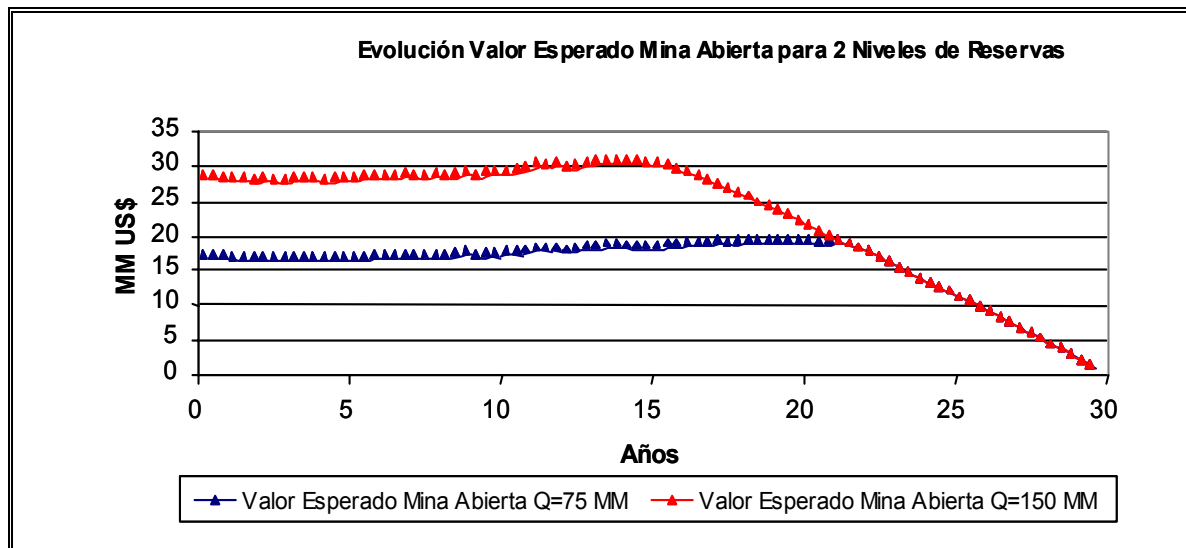


Figura 7-17: Evolución del valor esperado de una mina abierta, que cuenta con 150 y 75 MM de toneladas de reservas, en las variables de estado son $S = 0,9$ US\$/lb., $y = 0$, $v = 0$.

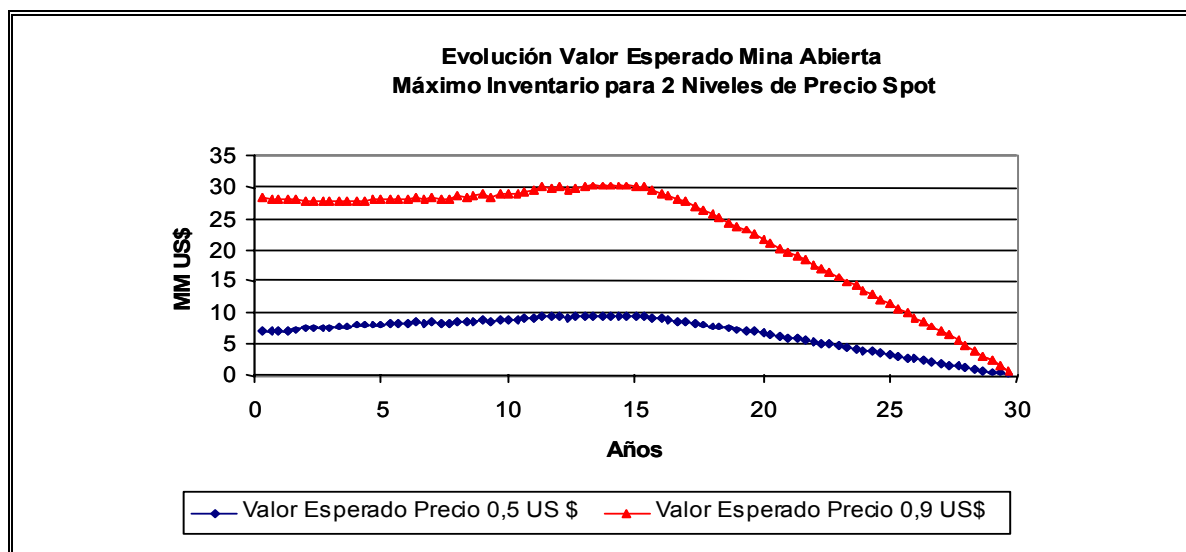


Figura 7-18: Evolución del valor esperado de una mina abierta para un inventario de 150 MM de toneladas. Para precios spot de $S = 0,5$ y $S = 0,9$ US\$/lb. Considerando $v = 0$, $y = 0$.

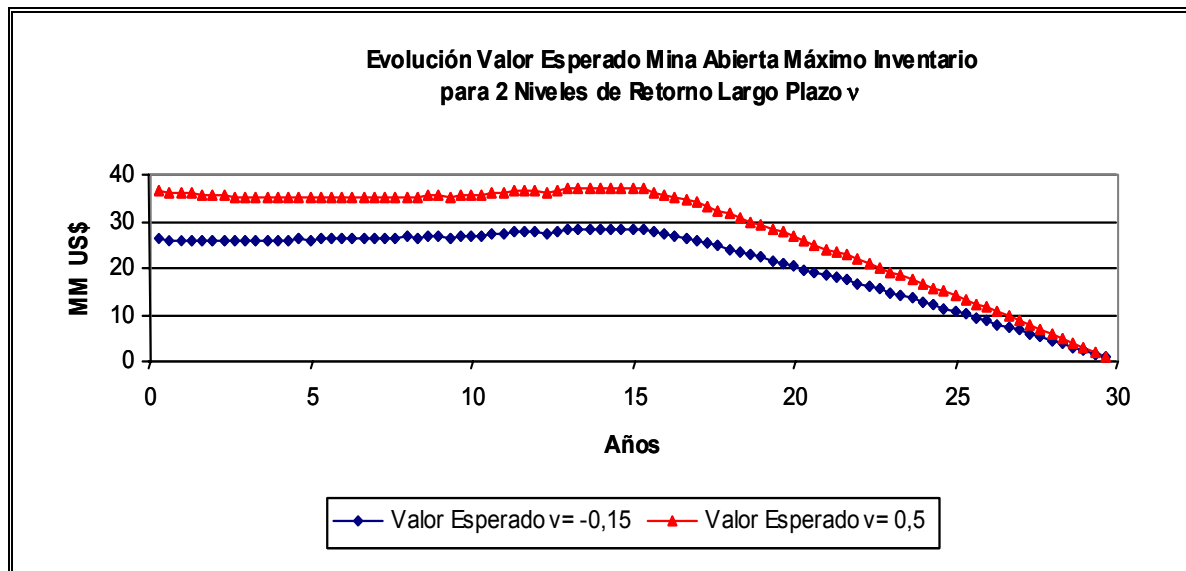


Figura 7-19: Evolución del valor esperado de una mina abierta para un inventario de 150 MM de toneladas. Retorno de largo plazo en los niveles de $\nu = -0,15$ o $\nu = 0,5$, considerando un precio spot $S = 0,9$ US\$/lb., $\gamma = 0$.

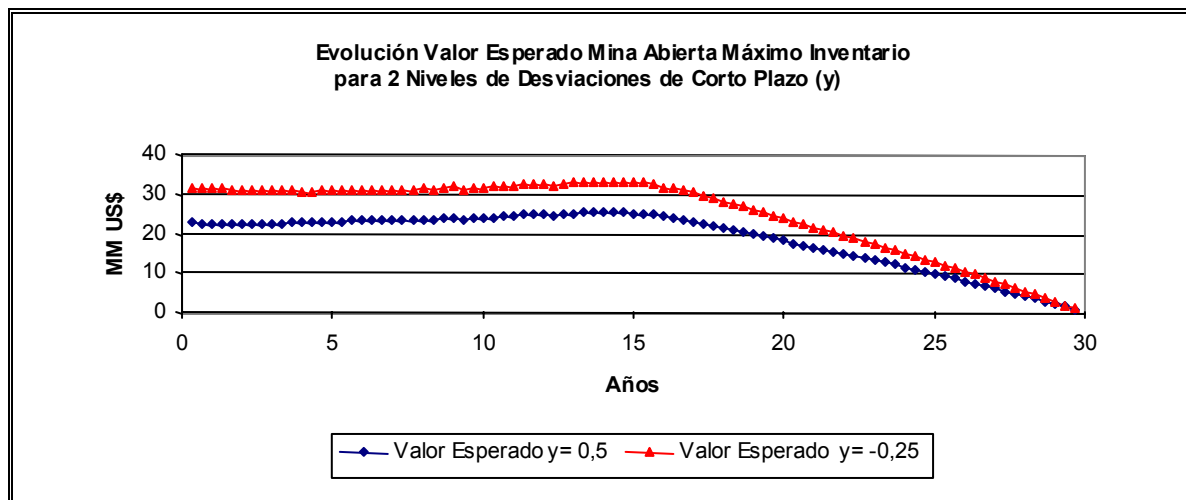


Figura 7-20: Evolución del valor esperado de una mina abierta para un inventario de 150 MM de toneladas. Desviaciones de corto plazo en los niveles de $\gamma = 0,5$ o $\gamma = -0,25$, considerando un precio spot $S = 0,9$ US\$/lb., $\nu = 0$.

Los gráficos anteriores permiten en primer lugar, confirmar la estabilidad de la solución numérica. En segundo lugar, indican la dirección en que el valor del proyecto se modifica al variar las variables de estado \mathcal{Y} , ν . La desviación de corto plazo (\mathcal{Y}) es inversamente proporcional al valor del proyecto y lo contrario ocurre con el retorno de largo plazo ν .

Una característica interesante es observar el rápido incremento del valor del proyecto, al avanzar desde la última oportunidad de ejercicio, en el año 30, hacia el instante inicial. La pendiente indica la incorporación de mayores estados posibles de reservas.

7.4.6 Política Óptima de la Mina de Brennan y Schwartz (1985) en el modelo multifactorial de Cortazar y Schwartz (2003)

Los resultados para la política óptima de operación dependen de las variables de estado iniciales. Sin embargo, en este caso se supone que en algún instante lo suficientemente lejano, los precios de ejercicio crítico no dependen de las variables de estado iniciales de las simulaciones.

Para establecer una referencia se presenta la política óptima del problema original en Brennan y Schwartz (1985) a través del método de diferencias finitas:

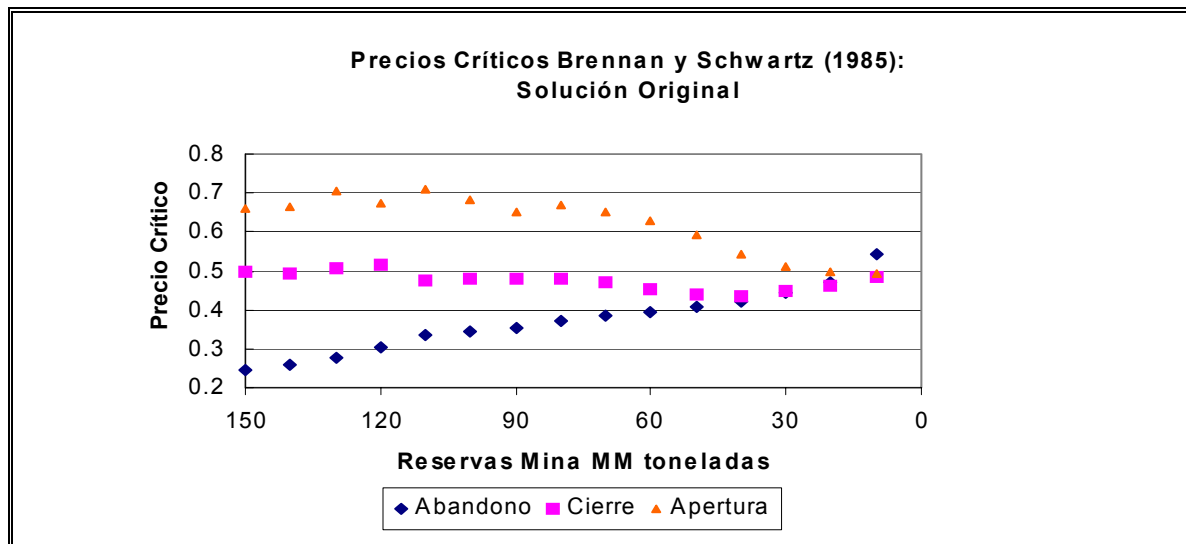


Figura 7-21: Política óptima problema original mina Brennan y Schwartz (1985), resuelto mediante diferencias finitas.

En los siguientes figuras se realizan cortes a la superficie óptima de ejercicio que permiten apreciar la sensibilidad de los precios críticos para distintos niveles de reservas y bajo distintas combinaciones de las variables de estado restantes del modelo y, ν .

A continuación se presentan las políticas óptimas de operación de la mina en el modelo de de Cortazar y Schwartz (2003) mediante el algoritmo LSM modificando el valor de las desviaciones de corto plazo, variable de estado \mathcal{Y} .

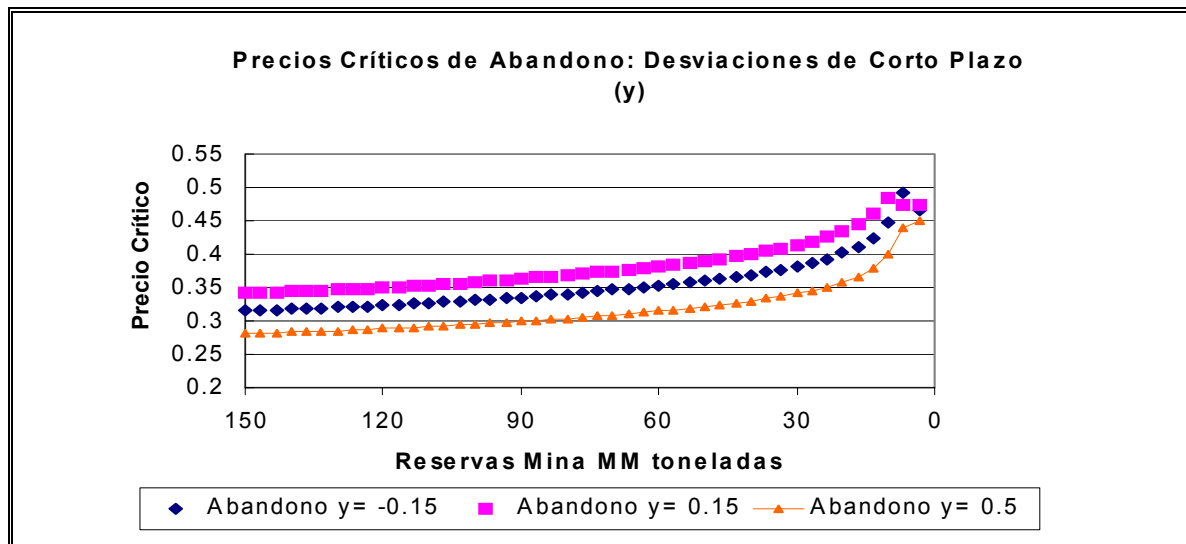


Figura 7-22: Precios de abandono en función de la reservas para distintos valores de la desviación de corto plazo en los niveles de $y = -0,15$ $y = 0,15$, $y = 0,5$, considerando $\nu = 0$.

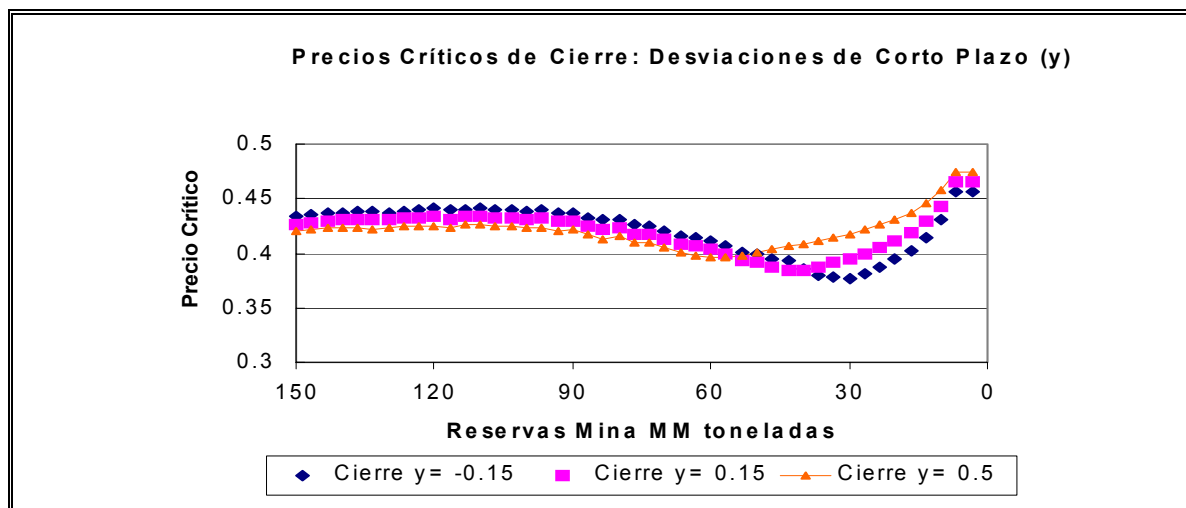


Figura 7-23: Precios de cierre en función de la reservas para distintos valores de la desviación de corto plazo en los niveles de $y = -0,15$ $y = 0,15$, $y = 0,5$, considerando $\nu = 0$.

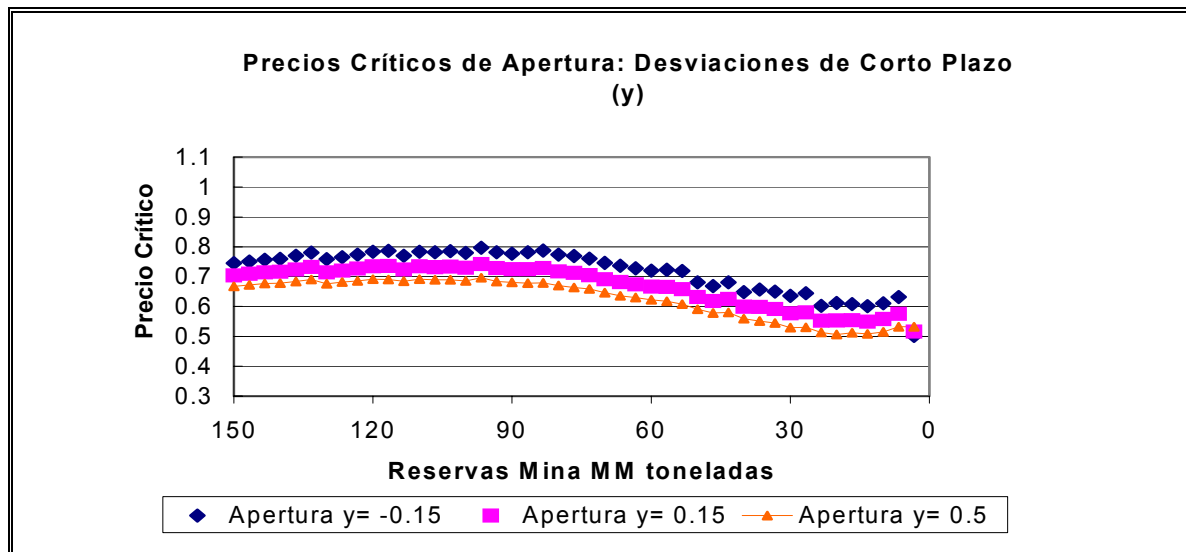


Figura 7-24: Precios de apertura en función de la reservas para distintos valores de la desviación de corto plazo en los niveles de $y = -0,15$ $y = 0,15$, $y = 0,5$, considerando $\nu = 0$.

De las figuras se concluye que al aumentar el nivel de desviación de corto plazo los precios críticos disminuyen, a excepción de los precios de cierre en niveles bajos de reservas. Lo anterior se explica por la tendencia decreciente del proceso de precios, lo que hace ejercer las opciones antes.

En las próximas figuras se repite la descripción anterior para el caso del retorno de largo plazo.

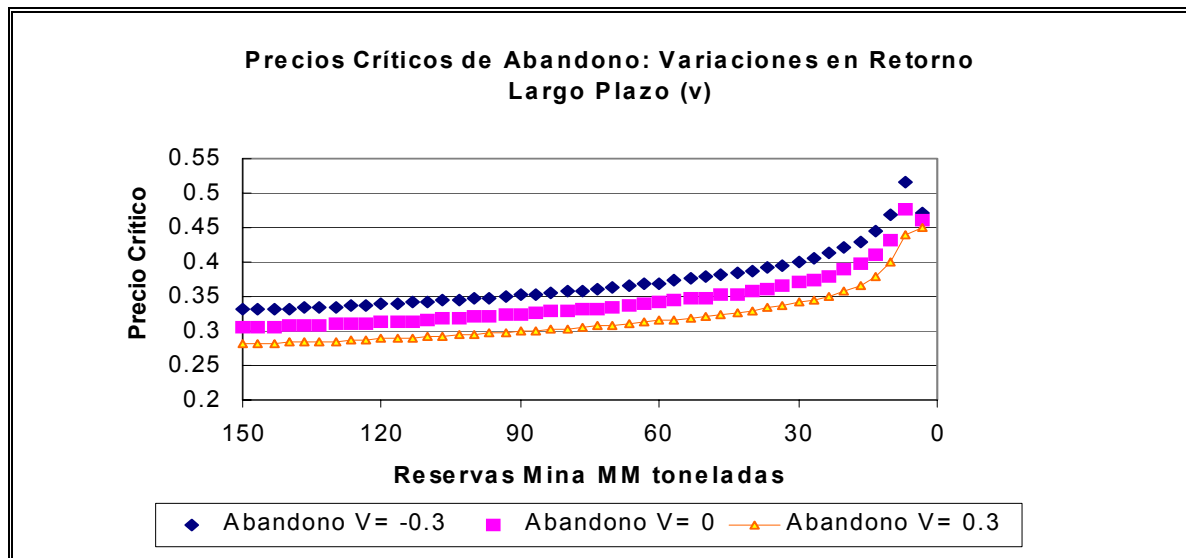


Figura 7-25: Precios de abandono en función de la reservas para distintos valores del retorno de largo plazo en los niveles de $v = -0,3$, $v = 0$, $v = 0,3$. Considerando desviación de corto plazo $y = 0$.

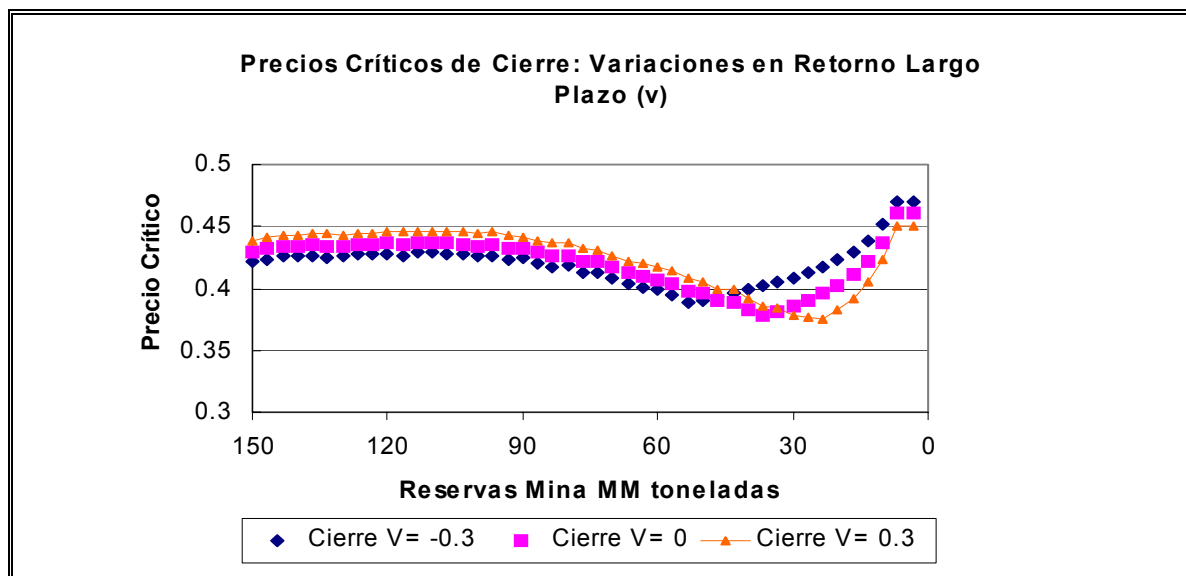


Figura 7-26: Precios de cierre en función de la reservas para distintos valores del retorno de largo plazo en los niveles de $v = -0,3$, $v = 0$, $v = 0,3$, considerando desviación de corto plazo $y = 0$.

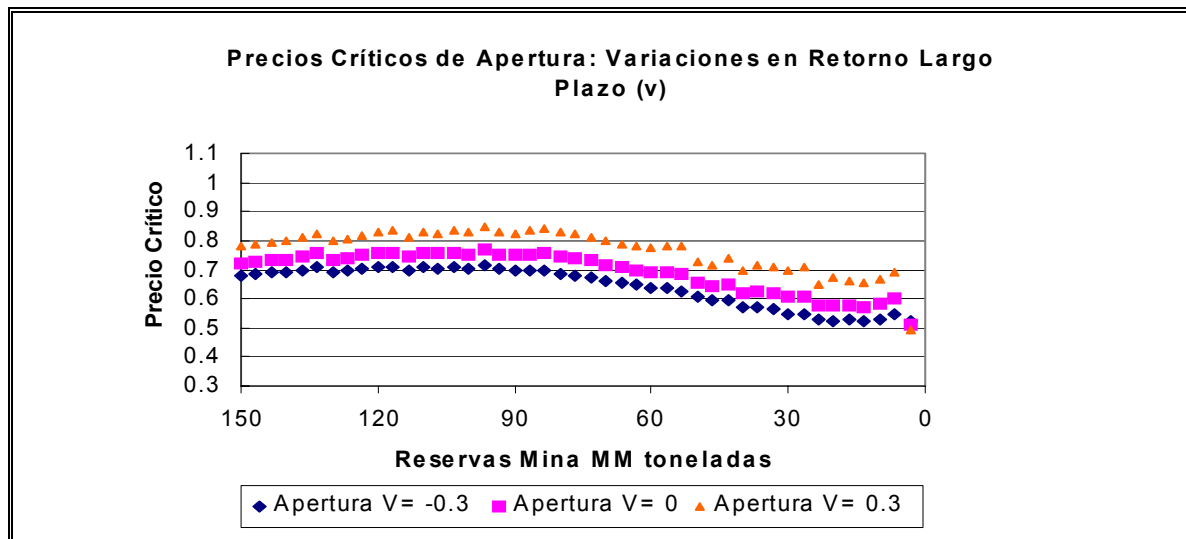


Figura 7-27: Precios de apertura en función de la reservas para distintos valores del retorno de largo plazo en los niveles de $\nu = -0,3$, $\nu = 0$, $\nu = 0,3$, considerando desviación de corto plazo $y = 0$.

El efecto del retorno de largo plazo en los precios críticos es inverso al de las desviaciones de corto plazo. Lo anterior se puede ver claramente en la expresión para el precio spot en este modelo:

$$dS_t = (\nu_t - y_t - \lambda_1)S_t dt + \sigma_1 S_t dw_1^*(t) \quad (7.45)$$

Si se considera un retorno de largo plazo alto, el modelo impone precios de abandono más bajos, ya que, dado un retorno alto es muy probable que el precio vuelva a niveles altos. Del mismo modo, los precios de apertura suben, al elevarse el retorno por que el modelo espera mejores escenarios de precios.

Considerando las políticas óptimas obtenidas en el problema original, se puede establecer que las políticas óptimas entregadas para el proceso de Cortazar y Schwartz (2003) mediante el algoritmo LSM, entregan una excelente regla de ejercicio tanto en nivel como en tendencia.

En este capítulo se presentó la implementación de la mina de Brennan y Schwartz (1985) utilizando modelos multifactoriales de precios utilizando el algoritmo LSM que extiende la implementación planteada en Gravet (2003). Los resultados en primer lugar, permiten aproximar las soluciones originales del artículo para el caso de un

factor, en segundo lugar permiten una evaluación histórica del valor opción del yacimiento considerado y muestran un comportamiento estable en las dimensiones del problema: el tiempo, las variables de estado y las reservas de mineral. La implementación propuesta permite obtener las políticas óptimas de operación de cierre, apertura y abandono en distintos instantes del tiempo, nivel de inventario y para distintas combinaciones de las variables de estado.

Se ha comprobado la correcta aplicación del algoritmo LSM en la evaluación de un complejo problema de opciones reales multidimensional, apoyado por una especificación simple de la función de continuación basada en portencias de contratos futuros.

El siguiente y último capítulo de esta tesis concluye y se presentan algunas posibles extensiones de esta investigación.

VIII CONCLUSIONES

En la presente tesis se ha analizado la aplicación del algoritmo LSM para la evaluación de opciones reales de tipo americano multidimensionales, que surgen al considerar proyectos con opciones interrelacionadas y modelos de precios con especificaciones multifactoriales.

Para validar las implementaciones propuestas se estudió el comportamiento del algoritmo en dos problemas con solución conocida. El primer problema abordado fue el ajuste de las funciones de regresión del algoritmo LSM a las expresiones analíticas de valorización de opciones europeas del precio spot de un commodity. Utilizando la relación entre el valor esperado de continuar y el valor analítico de una opción europea se logró medir el ajuste de distintas funciones de regresión en el algoritmo LSM. Los resultados indicaron que la función de regresión formada por potencias de contratos futuros es capaz de aproximar correctamente la función de continuación.

La segunda validación para una implementación general del algoritmo LSM para opciones multidimensionales se realizó comparando las soluciones de diferencias finitas de la opción de inversión descrita por Schwartz (1997) con las evaluaciones a través del algoritmo LSM.

En base a las dos validaciones presentadas se extiende el trabajo realizado por Gravet (2003) resolviendo la evaluación de la mina de cobre de Brennan y Schwartz (1985) en un modelo multifactorial de precios. Esta evaluación incorpora las opciones de apertura, cierre y abandono de las operaciones. La implementación es ilustrada utilizando el modelo de precios descrito en Cortazar y Schwartz (2003), que explica la dinámica del precio spot del cobre, mediante un proceso de tres factores estocásticos. Este problema no ha podido ser resuelto por otros algoritmos para opciones americanas. Su complejidad puede representarse por un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales, de segundo orden, no lineal, en cinco dimensiones y con condiciones de borde del tipo frontera libre.

El trabajo realizado en esta tesis puede extenderse en varias direcciones. En primer lugar, se pueden utilizar los resultados en funciones de regresión para evaluar otras opciones reales en procesos multifactoriales de precios: opción de expansión de capacidad de un proceso minero, opción de inversión en tecnologías medio ambientales, opciones compuestas en distintas etapas de la producción del commodity, entre otras.

Dentro del estudio de las fuentes de incertidumbre, que definen las opciones reales, el algoritmo presentado en esta tesis puede incorporar otras variables inciertas en la evaluación, independientes o correlacionadas con el proceso de precios y de tasas de interés como costos, impuestos y niveles de inventarios. La flexibilidad que entrega el método de Montecarlo LSM permite incorporar toda la complejidad necesaria para describir con mayor exactitud la incertidumbre presente en los proyectos flexibles.

Finalmente, los estudios presentados en esta investigación pueden ser aprovechados en otras áreas y no se circunscriben a las Opciones Reales y a modelos de precios de commodities. El análisis de bases de regresión presentado puede ser utilizado para entender el comportamiento de otro tipo de derivados como bonos con opciones y en general cualquier tipo de instrumento o proyecto con características de opción.

BIBLIOGRAFÍA

- ACOSTA, P. (1999) *Modelo de Simulación de Monte Carlo para evaluar opciones reales :Evaluación de una mina de cobre mediante el algoritmo de Barraquand-Martineau*, Mag. en Cs. de la Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile
- BARONE-ADESI, G. y WHALEY , R. E. (1987) Efficient analytical approximation of American option value. *The Journal of Finance*, Vol 42, N° 3, 301-320.
- BARRAQUAND, J. y MARTINEAU, D. (1995) Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate American Securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol 30, N° 3, 301-320.
- BLACK, F. y SCHOLES, M. (1973) The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, Vol 81, 637-654.
- BOYLE, P. (1977) Options: A Monte Carlo Approach. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 323-338.
- BOYLE, P. (1988) A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1-12.
- BRENNAN, M. J. (1991) The price of convenience and the valuation of commodity contingent claims. En D. Lund y B. Øksendal (eds.) *Stochastic models and option values*, Elsevier, North Holland.
- BRENNAN, M. J. y SCHWARTZ, E. S. (1977) Finite difference methods and jump processes arising in the pricing of contingent claims: A synthesis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol 13, 462-474.
- BRENNAN, M. J. y SCHWARTZ, E. S. (1982) Consistent Regulatory Policy under uncertainty. *Bell Journal of Economics*, N° 13, 506-521.
- BRENNAN, M. J. y SCHWARTZ, E. S. (1985) Evaluating natural resources investments. *Journal of Business*, Vol 58, N° 2, 135-157.
- BROADIE, M. y GLASSERMAN, P. (1997c) Monte Carlo Methods for pricing high dimensional American Options, *Documento de Trabajo*, University of Columbia.

CARR, P. (1988) The Valuation Sequential Exchange Opportunities. *Journal of Finance*, 1235-1256.

CARR, P., JARROW, R. y MYNENI, R. (1992) Alternative Characterizations of American put options. *Mathematical Finance*, Vol 2, 87-106.

CASASSUS, J. y COLLIN-DUFRESNE, P. (2001) 'Maximal' convenience yield model implied by commodity futures, *Documento de Trabajo*, Carnegie Mellon University.

CASTILLO, A. (1999) An application of natural resource evaluation using a simulation – dynamic programming approach. *Journal of Computational Finance*, Vol 3, N° 1.

CHUNG, K. y CHAROENWONG, C. (1991) Investment Options, Assets in Place, and the Risk of Stocks. *Financial Management*, 21-33.

CORTAZAR, G. (1999) The valuation of natural resources. En Trigeorgis (eds.) *Real options and business strategy: Applications to decision making*, Risk Books, London, pp. 263-278.

CORTAZAR, G. (2001) Simulation and Numerical Methods in Real Options Valuation. En E. S. Schwartz y L. Trigeorgis (eds.) *Real Options and Investment Under Uncertainty: Classical Readings and Recent Contributions*, MIT Press, Boston.

CORTAZAR, G. y CASASSUS, J. (1998) Optimal timing of a mine expansion: Implementing a real options model. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, Vol 38, 755-769.

CORTAZAR, G. y CASASSUS, J. (2000) A compound option model for evaluating multi-stage natural resource investments. En M. J. Brennan y L. Trigeorgis (eds.) *Project flexibility, agency, and competition: New developments in the theory and application of real options*, Oxford University Press, New York, pp. 205-223.

CORTAZAR, G. y NARANJO, L. (2003) Multi-factor Stochastic Model and Estimation Procedure for the Valuation and Hedging of Commodity Contingent Claims, *Documento de Trabajo*, FONDEF DI102400.

- CORTAZAR, G. y SCHWARTZ, E. S. (1993) A compound option model of production and intermediate investment. *Journal of Business*, Vol 66, N° 4, 517-540.
- CORTAZAR, G. y SCHWARTZ, E. S. (1994) The valuation of commodity-contingent claims. *The Journal of Derivatives*, Vol 1, 27-35.
- CORTAZAR, G. y SCHWARTZ, E. S. (1998) Monte Carlo evaluation model of an undeveloped oil field. *Journal of Energy Finance & Development*, Vol 3, N° 1, 73-84.
- CORTAZAR, G. y SCHWARTZ, E. S. (2003) Implementing a stochastic model for oil futures prices. *Energy Economics*, Vol 25, N° 215-238.
- CORTAZAR, G., SCHWARTZ, E. S. y CASASSUS, J. (2001) Optimal exploration under price and geological-technical uncertainty: A real options model. *R&D Management*, Vol 31, N° 2, 181-189.
- CORTAZAR, G., SCHWARTZ, E. S. y LÖWENER, A. (1998a) Optimal investment and production decisions and the value of the firm. *Review of Derivatives Research*, Vol 2, 39-57.
- CORTAZAR, G., SCHWARTZ, E. S. y SALINAS, M. (1998b) Evaluating environmental investments: A real options approach. *Management Science*, Vol 44, N° 2, 1059-1070.
- COX, J., ROSS, S. y RUBINSTEIN, M. (1979) Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, Vol 7, 229-264.
- COX, J. C., INGERSOLL, J. E., JR. y ROSS, S. A. (1981) The relation between forward prices and futures prices. *Journal of Financial Economics*, Vol 9, 321-346.
- COX, J. C., INGERSOLL, J. E., JR. y ROSS, S. A. (1985) An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices. *Econometrica*, Vol 53, 363-384.
- COX, J. C., INGERSOLL, J. E. y ROSS, S. A. (1975) An Intertemporal General Equilibrium Model Of Asset Prices. *Econometrica*, N° N° 53, 363-384.
- GESKE, R. y JOHNSON, H. (1984) The American put options valued analytically. *The Journal of Finance*, Vol 39, N° 5, 1511-1524.

GIBSON, R. y SCHWARTZ, E. S. (1990) Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims. *The Journal of Finance*, Vol 45, N° 3, 959-976.

GRAVET, M. (2003) *Evaluación de Opciones Reales Mediante Simulación: El Método de los Mínimos Cuadrados*, Mag. en Cs. de la Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile

HARRISON, J. M. y KREPS, D. (1979) Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets. *Journal of Economic Theory*, Vol 20, 381-408.

HARRISON, J. M. y PLISKA, S. R. (1981) Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading. *Stochastic Process and their Applications*, N° 11, 261-271.

HSU, J. y SCHWARTZ, E. S. (2003) A Model of R&D Valuation and the Design of Research Incentives, *Documento de Trabajo*, Anderson School, UCLA.

INGERSOLL, J. E. y ROSS, S. (1992) Waiting to Invest: Investment and Uncertainty. *Journal of Business*, 1-29.

KESTER, W. C. (1993) Turning Growth Options Into Real Assets. En R. Aggarwal (eds.) *Capital Budgeting Under Uncertainty*, Prentice-Hall, New Jersey.

KIM, I. J. (1990) The Analytic Valuation of American options. *Review of Financial Studies*, Vol 3, N° 4, 547-572.

KULATILAKA, N. (1993) The Value of Flexibility: The Case of a Dual-Fuel Industrial Steam Boiler. *Financial Management*, 271-280.

KULATILAKA, N. (1995) Operating Flexibilities in Capital Budgeting: Substitutability and Complementarity in Real Options. En L. Trigeorgis (eds.) *Real Options in Capital Investments: New Contributions*, Praeger, New York.

KULATILAKA, N. y TRIGEORGIS, L. (1993) The General Flexibility to Switch: Real Options Revisited. *International Journal of Finance*, 776-798.

LONGSTAFF, F. A. y SCHWARTZ, E. S. (2001) Valuing american options by simulation: A simple least-squares approach. *The Review of Financial Studies*, Vol 14, N° 1, 113-147.

MAJD, S. y PINDYCK, R. (1987) Time to Build, Option Value, and Investment Decisions. *Journal of Financial Economics*, N° 18, 7-27.

MARGRABE, W. (1978) The Value of an Options to Exchange One Asset for Another. *Journal of Finance*, 177-186.

MCDONALD, R. y SIEGEL, D. (1985) Investment and the valuation of firms when there is an option to shut down. *International Economic Review*, Vol 26, N° 2, 331-349.

MCDONALD, R. y SIEGEL, D. (1986) The value of waiting to invest. *Quarterly Journal of Economics*, Vol 101, 707-727.

MERTON, R. C. (1976) Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *The Journal of Financial Economics*, N° 3, 125-144.

MERTON, R. C. (1979) An intertemporal Capital Asset Pricing Model. *Econometrica*, Vol 41, N° 4, 867-888.

MORENO, M. y NAVAS, J. (2001) On the Robustness of Least Squares Monte-Carlo (LSM) for pricing American Derivatives, *Documento de Trabajo*, Universitat Pompeu Fabra.

MORENO, M. y NAVAS, J. (2003) On the Robustness of Least-Squares Monte Carlo (LSM) for Pricing American Derivatives. *Review of Derivatives Research (Forthcoming)*.

MYERS, S. (1987) Finance Theory and Financial Strategy. *Midland Corporate Finance Journal*, 6-13.

MYERS, S. y MAJD, S. (1990) Abandonment Value and Project Life. *Advances in Futures and Options Research*, 1-21.

ØKSENDAL, B. (1998) *Stochastic differential equations : an introduction with applications*, 5th edn, Springer, Berlin ; New York.

OSORIO, M. (1999) *Modelo de simulación de Monte Carlo para evaluar opciones reales: Evaluación de un pozo de petróleo y de una mina de cobre mediante el*

algoritmo de Raymar-Zwecher, Mag. en Cs. de la Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile

PADDOCK, J., SIEGEL, D. y SMITH, J. (1988) Option Valuation of Claims on Physical Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases. *Quarterly Journal of Economics*, Vol 103, N° 3, 479-508.

PINDYCK, R. (1980) Uncertainty and exhaustible resource markets. *Journal of Political Economy*, Vol 88, N° 6, 1203-1225.

PINDYCK, R. (1988) Irreversible Investment, Capacity Choice, and the Value of the Firm. *American Economic Review*, 969-985.

RAYMAR, S. y ZWECHER, M. (1997) A Monte Carlo valuation of American Call Options on the maximum of several stocks. *Journal of Derivatives*, Vol 5, N° 1 (Fall), 7-23.

SCHWARTZ, E. S. (1997) The stochastic behaviour of commodity prices: Implications for valuation and hedging. *The Journal of Finance*, Vol 52, N° 3, 923-973.

SCHWARTZ, E. S. y MOON, M. (2000a) Evaluation of Research and Development Investments. En M. J. Brennan y L. Trigeorgis (eds.) *Innovation, Infrastructure and Strategic Options*, Oxford University Press, New York.

SCHWARTZ, E. S. y MOON, M. (2000b) Rational Pricing of Internet Companies. *Financial Analysts Journal*, Vol 56, N° 3, 62-75.

SCHWARTZ, E. S. y TRIGEORGIS, L. (2001) *Real Options and Investment under Uncertainty: Classical Readings and Recent Contributions*, MIT Press.

SØRENSEN, C. (2002) Modeling seasonality in agricultural commodity futures. *Journal of Futures Markets*, Vol 22, 393-426.

STENTOFT, L. (2001) Assessing the Least Squares Monte-Carlo Approach to American Option Valuation, *Documento de Trabajo*, University of Aarhus.

TILLEY, J. A. (1993) Valuing American Options in a Path Simulation Model. *Transactions of the Society of Actuaries*, N° 45, 42-56.

TITMAN, S. (1985) Urban Land Prices Under Uncertainty. *American Economic Review*, 505-514.

TOURINHO, P. (1979) The option value of Reserves of Natural Resources, *Documento de Trabajo*, University of California-Berkeley.

TRIGEORGIS, L. (1991a) Anticipated Competitive Entry and Early Preemptive Investment in Deferrable Projects. *Journal of Economics and Business*, 143-156.

TRIGEORGIS, L. (1991b) A Log-Transformed Binomial Numerical Analysis Method for Valuing Complex Multi-Option Investments. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 309-326.

TRIGEORGIS, L. (1993) The Nature of Option Interactions and the Valuation of Investments with Multiple Real Options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1-20.

TRIGEORGIS, L. y MASON, P. (1987) Valuing Managerial Flexibility. *Midland Corporate Finance Journal*, Vol 5, N° 1, 14-21.

VASICEK, O. A. (1977) An equilibrium characterisation of the term structure. *Journal of Financial Economics*, Vol 5, 177-188.

ANEXOS

ANEXO A : DINÁMICA AJUSTADA POR RIESGO Y PORTAFOLIO LIBRE DE RIESGO

A.1 Portafolio Libre de Riesgo en Subyacentes Transables

Si S_t es el precio spot de un commodity, que sigue un proceso browniano geométrico $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dw_t$. $F_t(S, T)$ es el precio de un futuro sobre el spot con vencimiento T .

Se puede formar un portafolio entre S_t y F_t comprando X_1 unidades del commodity y al mismo tiempo tomar X_2 contratos futuro para vender el commodity.

Definiendo el retorno por conveniencia del commodity por unidad de tiempo como δ y el retorno del portafolio como R_p :

$$R_p = \left[\frac{dS}{S} + \delta dt \right] X_1 + [dF] X_2 \quad (\text{A.1})$$

El término dF se obtiene aplicando el lema de Itô para encontrar el diferencial del futuro, los subíndices indican derivadas parciales:

$$dF = \left[\frac{1}{2} F_{ss} \sigma^2 S^2 + F_s \mu S - F_t \right] dt + \sigma F_s S dw \quad (\text{A.2})$$

El retorno R_p indicado en la ecuación (A.1) es estocástico, sujeto a la perturbación dw que guía el movimiento del spot, sin embargo, esta característica puede eliminarse escogiendo X_1 y X_2 de manera de eliminar el riesgo.

Si se elige X_1 igual a la unidad, para eliminar el riesgo del portafolio, se debe satisfacer la siguiente igualdad:

$$(1 + X_2 S F_s) \sigma dw = 0 \quad (\text{A.3})$$

De acuerdo a la ecuación (A.3) el número de contratos futuros para eliminar instantáneamente el riesgo del portafolio es $X_2 = -\frac{1}{S F_s}$, dado que se ha definido $X_1 = 1$.

Construyendo el portafolio con los ponderadores anteriores el retorno no estocástico o

libre de riesgo debe ser igual al rendimiento libre de riesgo, para evitar oportunidades de arbitraje:

$$\mu + \delta - \frac{1}{SF_s} \left[\frac{1}{2} F_{ss} \sigma^2 S^2 + \mu SF_s - F_T \right] = r \quad (\text{A.4})$$

Reagrupando términos la ecuación de no arbitraje para la valorización de un futuro, suponiendo que el spot sigue un proceso browniano geométrico es:

$$\frac{1}{2} F_{ss} \sigma^2 S^2 + F_s S (r - \delta) - F_T = 0 \quad (\text{A.5})$$

Si alternativamente suponemos un proceso ficticio, ajustado por riesgo, para el precio spot de la siguiente forma $dS_t = (r - \delta)S_t dt + \sigma S_t dw^*$, se puede obtener la misma ecuación de valorización (1.6). El procedimiento consiste en exigir que la componente no estocástica del diferencial dF sea nulo, ya que al entrar en un contrato futuro no se exige ningún pago inicial. Si la valorización se realizara para una opción se debería exigir un retorno libre de riesgo ya que al entrar a una opción se debe pagar una prima.

El desarrollo anterior se puede generalizar para obtener los procesos estocásticos ajustados por riesgo seguido por el precio spot, como se realiza en Brennan y Schwartz (1985) y en Gibson y Schwartz (1990).

A.2 Portafolio Libre de Riesgo en Subyacentes No Transables: Precio de Mercado del Riesgo

Si se supone que algún índice I_t , por ejemplo la temperatura en alguna locación geográfica, que sigue el siguiente proceso estocástico $dI_t = I_t m dt + I_t s dw$, con dw un incremento de un proceso Wiener.

Si se tienen dos derivados F_1 y F_2 que dependen del índice y del tiempo (t), se puede encontrar la ecuación diferencial estocástica para su retorno aplicando el lema de Itô y dividiendo por F :

$$\frac{dF}{F} = ((F_t + IF_t + \frac{1}{2} S^2 I^2 F_{tt}) dt + F_t S I dw) / F \quad (\text{A.7})$$

Resumiendo para ambos derivados en una notación más compacta, el proceso para F_1 es $dF_1 = F_1\mu_1 dt + F_1\sigma_1 dw$ y el proceso para F_2 es $dF_2 = F_2\mu_2 dt + F_2\sigma_2 dw$.

Construyendo un portafolio con ambos derivados, invirtiendo $\$X1$ en F_1 y $\$X2$ en F_2 el retorno del portafolio R_p se puede definir:

$$R_p = X1 \frac{dF_1}{F_1} + X2 \frac{dF_2}{F_2} \quad (\text{A.8})$$

Utilizando la definición de los procesos para F_1 y F_2 el retorno del portafolio puede descomponerse en un término determinístico y otro estocástico. Si se exige que el componente estocástico sea nulo, el portafolio quedará inmune del riesgo asociado a I:

$$(X1\sigma_1 + X2\sigma_2)dz = 0 \quad (\text{A.9})$$

De acuerdo con lo anterior, la suma invertida en el portafolio debe retornar la tasa libre riesgo r , en ausencia de oportunidades de arbitraje:

$$(X1\mu_1 + X2\mu_2)dt = (X1 + X2)rdt \quad (\text{A.10})$$

Combinando las ecuaciones (A.9) y (A.10) se obtiene:

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} = \lambda \quad (\text{A.11})$$

Donde λ es el llamado precio de mercado del riesgo I_t . Si los agentes son neutrales al riesgo entonces $\lambda=0$, si son aversos al riesgo $\lambda>0$, y si les agrada tomar el riesgo en I: $\lambda<0$.

Si de manera alternativa a la construcción de un portafolio se define un proceso ajustado por riesgo para el índice I: $dI_t = I_t(m - \lambda s)dt + I_t s dw$, se pueden encontrar las mismas expresiones que en (A.11). De acuerdo a lo anterior, al valorizar derivados de subyacentes no transables en el mercado, debe recurrirse a ajustar el drift de los procesos mediante el precio de mercado del riesgo.

A.3 Ecuación Diferencial Parcial para el Equilibrio General de Activos

Para aplicar una metodología de equilibrio general se requiere especificar primero, los procesos reales que siguen los activos y en segundo lugar un modelo que explique las diferencias entre ellos.

Suponiendo que se conocen los procesos de los activos, se puede emplear la versión intertemporal del CAPM de Merton (1979) para calcular los procesos ajustados por riesgo de los activos o factores de riesgo de cada proyecto.

A continuación se presenta un modelo general para la valorización de activos financieros, que puede ser encontrada en Brennan y Schwartz (1982). Se muestra que con las condiciones de equilibrio en el mercado de capitales, se obtiene una ecuación diferencial parcial que debe satisfacer la función que describe el precio de cualquier activo de la economía:

Si se considera una economía en que:

- a) Todos los inversionistas tienen funciones de utilidad logarítmicas, tiempo aditivas de tipo Neumann – Morgenstern, definidas sobre la tasa de consumo de un único bien.
- b) No existen impuestos, costos de transacción, la negociación (*trading*) de valores es continua y el mercado de capitales se encuentra siempre en equilibrio.
- c) El estado de la economía está completamente determinado por la riqueza agregada \mathbf{W} , y por un vector de variables de estado \mathbf{X} de dimensión \mathbf{s} , tal que su evolución está gobernada por el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$dX_j = \mu_j(X, t)dt + \eta_j(X, t)dz_j + (X_j^* - X_j)dq_j, \text{ con } j = 1, \dots, s$$

donde:

\mathbf{t} : tiempo

$d\mathbf{z}_j$: Proceso de Wiener estándar.

q_j : Proceso Poisson independiente de intensidad $\pi_j(X,t)$.

$(X_j^* - X_j)$: Es el cambio en las variables de estado si el evento Poisson ocurre (*jump*).

Merton (1979) demuestra que bajo estas condiciones, los retornos esperados de equilibrio de activos individuales, deben cumplir la versión especializada del CAPM¹⁰ :

$$\alpha_i - r = \sigma_{iw}$$

donde: α_i : Retorno instantáneo esperado del activo i.

σ_{iw} : Covarianza entre los retornos del activo i y el retorno de la riqueza agregada..

r : Tasa de interés libre de riesgo instantánea.

Definiendo $F_i = F_i(W, X, t)$ como el valor de mercado del activo i aplicando el lema de Itô a F_i y omitiendo el índice i, la expresión para el cambio instantáneo de valor dF

$$dF = \left[\sum_{j=1}^s F_{x_j} \mu_j + F_w (W \alpha_w - C) + F_t + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s F_{x_j} F_{x_k} \rho_{jk} \eta_j \eta_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s F_{x_j w} \rho_{jw} \eta_j \sigma_w + \frac{1}{2} F_{ww} \sigma_w^2 W^2 \right] dt + \sum_{j=1}^s F_{x_j} \eta_j dz_j + F_w \sigma_w W dz_w + \sum_{j=1}^s [F(W, X + \Delta X_j, t) - F(W, X, t)] dq_j$$

donde: - α_w : Retorno instantáneo de la riqueza agregada.

- C : Tasa de consumo agregado

- ρ_{jk} : Correlación instantánea entre los retornos de los activos k y j.

- ρ_{jw} : Correlación instantánea entre los retornos del activo j y la riqueza agregada.

Los subíndices en F indican derivadas parciales de primer y segundo orden.

¹⁰ Especializada por que incluye funciones de utilidad para los agentes logarítmicas.

Si se define α_i como el retorno instantáneo esperado del activo i , este debe ser igual a la suma de: (1) El cambio esperado de su precio que es el factor que acompaña a dt en la expresión anterior ($[\bullet]$) y (2) la tasa instantánea de dividendos que entrega el activo i $\delta_i(W, X, t)$, dividido todo por el valor del activo F :

$$\alpha_i = \frac{[\bullet] + \delta + \sum_{j=1}^s [F(W, X + \Delta X_j, t) - F(W, X, t)] \pi_j(X, t)}{F}$$

Por otro lado, la covarianza instantánea entre el retorno del activo i y el de la riqueza agregada, dado que los saltos en las variables de estado son independientes del retorno de la riqueza:

$$\sigma_{iw} = \frac{\sum_{j=1}^s F_{x_j} \eta_j \rho_{jw} \sigma_w + F_w \sigma_w^2 W^2}{F}$$

Finalmente, multiplicando la condición de equilibrio por la fracción de riqueza del activo i en la economía y sumando para todo i , se obtiene : $\alpha_w - r = \sigma_w^2$

Sustituyendo α_i y σ_{iw} , en la condición de equilibrio se obtiene la ecuación diferencial que satisface el valor de todos los activos en esta economía:

$$\sum_{j=1}^s F_{x_j} (\mu_j - \eta_j \rho_{jw} \sigma_w) + F_w (rW - C) + F_t + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s F_{x_j} F_{x_k} \rho_{jk} \eta_j \eta_k +$$

$$\sum_{j=1}^s F_{x_j w} \rho_{jw} \eta_j \sigma_w W + \frac{1}{2} F_{ww} \sigma_w^2 W^2 + \sum_{j=1}^s [F(W, X + \Delta X_j, t) - F(W, X, t)] \pi_j(X, t) + \delta - rF = 0$$

Esta ecuación puede encontrarse en Cox et al. (1975), ecuación número 25 y con las condiciones de borde adecuadas, se puede utilizar para resolver el valor para cualquier activo de la economía descrita.

De acuerdo a la valoración general expuesta se puede observar, que cualquier modelo que siga los supuestos anteriores desembocará en una ecuación diferencial parcial, que en general no tiene solución analítica. Una consecuencia importante de lo anterior es que el término $\mu_j - \eta_j \rho_{jw} \sigma_w$, representa un ajuste al proceso estocástico subyacente en la cantidad $\lambda_j = \rho_{jw} \sigma_w$, que es denominado precio de mercado del riesgo j , esta es una constante que se ve amplificada por la volatilidad de este riesgo. El ajuste anterior permite valorizar activos, como si los inversores fuesen neutrales al riesgo, ya que se les ha descontado el premio por riesgo de los factores estocásticos de la economía.

ANEXO B : DISTRIBUCIONES PARA PROCESOS DE PRECIOS DE COMMODITIES

B.1 Solución General de la Ecuación Diferencial Estocástica Lineal a Coeficientes Constantes

En esta sección se indica la solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica (Øksendal (1998)):

$$d\mathbf{x}_t = (-\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b})dt + \mathbf{\Sigma}d\mathbf{w}_t \quad (\text{A.12})$$

donde \mathbf{A} es una matriz de dimensión $N \times N$, $\mathbf{\Sigma}$ es una matriz de dimensión $N \times N$ y $d\mathbf{w}_t$ es un vector de incrementos de un proceso de Wiener de dimensión $N \times 1$ que pueden estar correlacionados entre sí $d\mathbf{w}_t d\mathbf{w}_t' = \mathbf{\Theta}dt$. Se supone además que la matriz de varianza-covarianza instantánea $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Sigma}\mathbf{\Theta}\mathbf{\Sigma}'$ debe ser estrictamente definida positiva.

En (A.13) se presenta la solución general de la ecuación (A.12), condicional a un valor de \mathbf{x}_t .

$$\mathbf{x}_T = e^{-\mathbf{A}(T-t)}\mathbf{x}_t + e^{-\mathbf{A}T} \left(\int_t^T e^{\mathbf{A}s} ds \right) \mathbf{b} + e^{-\mathbf{A}T} \int_t^T e^{\mathbf{A}s} \mathbf{\Sigma} d\mathbf{w}_s \quad (\text{A.13})$$

Si $\mathbf{E}_t(\cdot)$ y $\mathbf{Cov}_t(\cdot)$ el valor esperado y la varianza-covarianza condicional al valor de \mathbf{x}_t . Se tiene que:

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{x}_T) = e^{-\mathbf{A}(T-t)}\mathbf{x}_t + \left(\int_0^{T-t} e^{-\mathbf{A}\tau} d\tau \right) \mathbf{b} \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{Cov}_t(T) = \int_0^{T-t} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{\Sigma}\mathbf{\Theta}\mathbf{\Sigma}'(e^{-\mathbf{A}\tau})' d\tau \quad (\text{A.15})$$

donde $\mathbf{\Theta}dt = (d\mathbf{w}_t)(d\mathbf{w}_t)'$.

B.2 Cálculo de Momentos para Modelos de Precios de Commodities

En esta sección se aplica la solución en (A.14) y (A.15) a los modelos de precios presentados en el capítulo cuarto. Los momentos son calculados bajo la medida

ajustada por riesgo, imprescindible para la valorización teórica de derivados financieros. Se denota la medida ajustada por riesgo mediante el supraíndice Q.

B.2.1 Modelo de Brennan y Schwartz (1985)

El proceso ajustado por riesgo en este modelo es:

$$dS_t = (r - \delta)S_t dt + \sigma S_t dw_t(t) \quad (\text{A.16})$$

Definiendo el logaritmo del precio spot como $x_t = \log(S_t)$ y aplicando el lema de itô esta función se obtiene:

$$dx_t = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log(S)}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial \log(S)}{\partial S} dS = -\frac{\sigma^2}{2} dt + (r - \delta) dt + \sigma dw_t(t) \quad (\text{A.17})$$

En términos de la ecuación presentada en (A.12), los parámetros de la ecuación toman los siguientes valores de $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{b} = r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}$, $\mathbf{\Sigma} = \sigma$.

Reemplazando estos valores en las soluciones para los momentos en las ecuaciones (A.14) y (A.15) y considerando que en este sencillo caso la matriz de correlaciones instantáneas es unitaria ($\Theta = 1$):

$$E_t^Q(x_T) = x_t + \left(\int_0^{T-t} d\tau \right) \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} \right) = x_t + \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) \quad (\text{A.18})$$

$$\text{Var}_t^Q(x_T) = \int_0^{T-t} \sigma^2 d\tau = \sigma^2 (T - t) \quad (\text{A.19})$$

De acuerdo a lo anterior el logaritmo del precio spot x_t distribuye normal, por lo que el precio spot distribuye lognormal.

B.2.2 Modelo 1 de Schwartz (1997)

Definiendo $x_t = \log(S_t)$ el proceso ajustado por riesgo definido por el autor es $dx_t = \kappa(\alpha^* - x_t)dt + \sigma dw_t^*(t)$.

En términos de la ecuación presentada en (A.12), los parámetros de la ecuación toman los siguientes valores $\mathbf{A} = \kappa$, $\mathbf{b} = \kappa\alpha^*$, $\mathbf{\Sigma} = \sigma$. Reemplazando estos valores en las

soluciones para los momentos en las ecuaciones (A.14) y (A.15) y considerando que en este sencillo caso la matriz de correlaciones instantáneas es unitaria ($\Theta = 1$):

$$E_t^Q(x_T) = e^{-\kappa(T-t)}x_t + \left(\int_0^{T-t} e^{-\kappa\tau} d\tau \right) \kappa\alpha^* = e^{-\kappa(T-t)}x_t + (1 - e^{-\kappa(T-t)})\alpha^* \quad (\text{A.20})$$

$$\text{Var}_t^Q(x_T) = \sigma^2 \int_0^{T-t} e^{-2\kappa\tau} d\tau = \sigma^2 \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa} \quad (\text{A.21})$$

B.2.3 Modelo Gibson y Schwartz (1990)

El proceso ajustado por riesgo de este modelo es:

$$dS_t = (r - \delta_t)S_t dt + \sigma_1 S_t dw_1^*(t) \quad (\text{A.22})$$

$$d\delta_t = [\kappa(\alpha - \delta_t) - \lambda] dt + \sigma_2 dw_2^*(t) \quad (\text{A.23})$$

donde $(dw_1^*)(dw_2^*) = \rho dt$.

Definiendo el logaritmo del precio spot como $x_t = \log(S_t)$ y aplicando el lema de Itô esta función de manera análoga al desarrollo en (A.17), se obtiene el siguiente proceso:

$$dx_t = (r - \delta_t - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma_1 dw_1^*(t) \quad (\text{A.24})$$

$$d\delta_t = [\kappa(\alpha - \delta_t) - \lambda] dt + \sigma_2 dw_2^*(t) \quad (\text{A.25})$$

donde $(dw_1^*)(dw_2^*) = \rho dt$.

El proceso definido por (A.24) y (A.25) puede sintetizarse en la notación:

$$Y_t = x_t = \log(S_t) \quad (\text{A.26})$$

$$d\mathbf{x}_t = (-\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b})dt + \Sigma d\mathbf{w}_t, \quad (\text{A.27})$$

donde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} r - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \\ \kappa\alpha - \lambda \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ \delta_t \end{pmatrix}, d\mathbf{w}_t = \begin{pmatrix} dw_1^*(t) \\ dw_2^*(t) \end{pmatrix} \text{ y } (dw_1^*)(dw_2^*) = \rho dt.$$

Definiendo la matriz de correlación instantánea $\Theta = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ de acuerdo a las soluciones (A.14) y (A.15):

$$\mathbf{E}_t^Q(\mathbf{x}_T) = \begin{pmatrix} 1 & (e^{-\kappa(T-t)} - 1)/\kappa \\ 0 & e^{-\kappa(T-t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ \delta_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T-t & (1 - e^{-\kappa(T-t)} - \kappa(T-t))/\kappa^2 \\ 0 & (1 - e^{-\kappa(T-t)})/\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \\ \kappa\alpha - \lambda \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

$$\mathbf{Cov}_t^Q(\mathbf{x}_T) = \int_0^{T-t} \begin{pmatrix} 1 & (e^{-\kappa\tau} - 1)/\kappa \\ 0 & e^{-\kappa\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (e^{-\kappa\tau} - 1)/\kappa \\ 0 & e^{-\kappa\tau} \end{pmatrix} d\tau \quad (\text{A.29})$$

De acuerdo a la expresión en (A.28) se obtienen las siguientes expresiones para la media condicional de los procesos:

$$E_t^Q(x_T) = x_t - \delta_t(1 - e^{-\kappa(T-t)})/\kappa + (r - \frac{1}{2}\sigma_1^2)(T-t) + (1 - e^{-\kappa(T-t)} - \kappa(T-t))(\kappa\alpha - \lambda)/\kappa^2 \quad (\text{A.30})$$

$$E_t^Q(\delta_T) = \delta_t e^{-\kappa(T-t)} + (1 - e^{-\kappa(T-t)})\kappa\alpha/\kappa \quad (\text{A.31})$$

De acuerdo a la expresión en (A.29) se obtienen las siguientes expresiones para la matriz de varianza covarianza en T condicional de los procesos:

$$\begin{aligned} Cov_t^Q(x_T, x_T) = Var_t^Q(x_T) &= (\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} - \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\kappa})(T-t) + \\ &\frac{\sigma_2^2}{2\kappa^3}(1 - e^{-2\kappa(T-t)}) + \frac{2\sigma_2}{\kappa^2}(\sigma_1\rho - \frac{\sigma_2}{\kappa})(1 - e^{-\kappa(T-t)}) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$Cov_t^Q(x_T, \delta_T) = \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)}) + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^2}(2e^{-\kappa(T-t)} - e^{-2\kappa(T-t)} - 1) \quad (\text{A.33})$$

$$Cov_t^Q(\delta_T, \delta_T) = Var_t^Q(\delta_T) = \frac{\sigma_2^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \quad (A.34)$$

Las ecuaciones a partir de (A.32) hasta la (A.34) definen completamente la distribución normal bi- variada de las variables de estado x_t y δ_t . Como el logaritmo del precio spot distribuye normal : $N(E_t(x_T), Var_t(x_T))$ el precio spot distribuye lognormal.

B.2.4 Modelo Cortazar y Schwartz (2003)

El proceso ajustado por riesgo para tres variables de estado en este modelo es¹¹:

$$dS_t = (v_t - y_t - \lambda_1)S_t dt + \sigma_1 S_t dw_1^*(t) \quad (A.35)$$

$$dy_t = (-\kappa y_t - \lambda_2) dt + \sigma_2 dw_2^*(t) \quad (A.36)$$

$$dv_t = [a(\bar{v} - v_t) - \lambda_3] dt + \sigma_3 dw_3^*(t) \quad (A.37)$$

donde $(dw_1^*)(dw_2^*) = \rho_{12} dt$, $(dw_2^*)(dw_3^*) = \rho_{23} dt$ y $(dw_1^*)(dw_3^*) = \rho_{13} dt$.

Definiendo el logaritmo del precio spot como $x_t = \log(S_t)$ y aplicando el lema de itô esta función de manera análoga al desarrollo en (A.17), se obtiene el siguiente proceso:

$$dS_t = (v_t - y_t - \lambda_1)S_t dt + \sigma_1 S_t dw_1^*(t) \quad (A.38)$$

$$dy_t = (-\kappa y_t - \lambda_2) dt + \sigma_2 dw_2^*(t) \quad (A.39)$$

$$dv_t = [a(\bar{v} - v_t) - \lambda_3] dt + \sigma_3 dw_3^*(t) \quad (A.40)$$

donde $(dw_1^*)(dw_2^*) = \rho_{12} dt$, $(dw_2^*)(dw_3^*) = \rho_{23} dt$ y $(dw_1^*)(dw_3^*) = \rho_{13} dt$

El proceso definido por (A.38), (A.39) y (A.40) puede sintetizarse en la siguiente notación matricial:

¹¹ De acuerdo al autor de la presente tesis existe un error tipográfico en el artículo citado.

$$Y_t = x_t = \log(S_t) \quad (\text{A.41})$$

$$dx_t = (-\mathbf{A}x_t + \mathbf{b})dt + \Sigma d\mathbf{w}_t, \quad (\text{A.42})$$

$$\text{donde} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sigma_1^2 - \lambda_1 \\ -\lambda_2 \\ a\bar{v} - \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ \delta_t \\ v_t \end{pmatrix}, \quad d\mathbf{w}_t = \begin{pmatrix} dw_1^*(t) \\ dw_2^*(t) \\ dw_3^*(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{Definiendo la matriz de correlación instantánea } \Theta = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{pmatrix} \text{ de}$$

acuerdo a las solución en (A.14) para las medias condicionales del proceso:

$$E_t^Q(x_T) = x_t - y_t(1 - e^{-\kappa(T-t)})/\kappa + v_t(1 - e^{-a(T-t)})/a + (\bar{v} + \frac{\lambda_2}{\kappa} - \frac{\lambda_3}{a} - \lambda_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)(T-t) + (e^{-\kappa(T-t)} - 1)\frac{\lambda_2}{\kappa^2} + (e^{-a(T-t)} - 1)(a\bar{v} - \lambda_3)/a^2 \quad (\text{A.43})$$

$$E_t^Q(y_T) = y_t e^{-\kappa(T-t)} - (1 - e^{-\kappa(T-t)})\frac{\lambda_2}{\kappa} \quad (\text{A.44})$$

$$E_t^Q(v_T) = v_t e^{-a(T-t)} + (1 - e^{-a(T-t)})\left(\bar{v} - \frac{\lambda_3}{a}\right) \quad (\text{A.45})$$

Utilizando la solución para matriz de varianza covarianza en (A.15) se obtiene:

$$\begin{aligned} Cov_t^Q(x_T, x_T) = Var_t^Q(x_T) = & \sigma_1^2(T-t) + \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} \left[(T-t) - \frac{2}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)}) + \frac{1}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \right] \\ & + \frac{\sigma_3^2}{a^2} \left[(T-t) - \frac{2}{a}(1 - e^{-a(T-t)}) + \frac{1}{2a}(1 - e^{-2a(T-t)}) \right] - \frac{2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\kappa} \left[(T-t) - \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)}) \right] \\ & + \frac{2\rho_{13}\sigma_1\sigma_3}{a} \left[(T-t) - \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)}) \right] - 2\frac{\rho_{23}\sigma_2\sigma_3}{a\kappa} \left[(T-t) - \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)}) - \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)}) \right] \\ & + \frac{1}{a+\kappa}(1 - e^{-(a+\kappa)(T-t)}) \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

$$\begin{aligned}
Cov_t^Q(v_T, v_T) &= Var_t^Q(v_T) = \frac{1}{2} \frac{\sigma_2^2}{a} (1 - e^{-2a(T-t)}) & Cov_t^Q(y_T, y_T) &= Var_t^Q(y_T) = \frac{1}{2} \frac{\sigma_2^2}{\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \\
Cov_t^Q(x_T, y_T) &= \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} \left[e^{-\kappa(T-t)} - \frac{1}{2} e^{-2\kappa(T-t)} - \frac{1}{2} \right] + \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 \left[\frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \right] \\
&\frac{\rho_{23} \sigma_2 \sigma_3}{\kappa + a} \left[\frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} + \frac{e^{-(a+\kappa)(T-t)} - e^{-\kappa(T-t)}}{a} \right]
\end{aligned} \tag{A.47}$$

$$\begin{aligned}
Cov_t^Q(x_T, v_T) &= \frac{\sigma_3^2}{a^2} \left[\frac{1}{2} - e^{-a(T-t)} + \frac{1}{2} e^{-2a(T-t)} \right] + \rho_{13} \sigma_1 \sigma_3 \left[\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right] \\
&\frac{\rho_{23} \sigma_2 \sigma_3}{\kappa + a} \left[\frac{\kappa e^{-\kappa(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-a(T-t)} - e^{-(a+\kappa)(T-t)}}{\kappa} \right]
\end{aligned} \tag{A.48}$$

$$Cov_t^Q(y_T, v_T) = \frac{\rho_{23} \sigma_2 \sigma_3}{\kappa + a} (1 - e^{-(a+\kappa)(T-t)}) \tag{A.49}$$

B.2.5 Modelo 3 Schwartz (1997)

El proceso ajustado por riesgo definido por el autor puede ser expresado en términos de las variables y parámetros del modelo de Cortazar y Schwartz (2003):

Variables en Cortazar y Schwartz (2003)	Variables en Schwartz (1997)
S_t	S_t
y_t	δ_t
v_t	r_t

Tabla B-1: Equivalencia de variables de estado entre el modelo Schwartz (1997) y modelo de Cortazar y Schwartz (2003).

Parámetros en Cortazar y Schwartz (2003)	Parámetros en Schwartz (1997)
λ_1	0
λ_2	$-\kappa\hat{\alpha}$
λ_3	0
a	a
\bar{v}	m^*
κ	κ
σ_1	σ_1
σ_2	σ_2
σ_3	σ_3
ρ_{12}	ρ_1
ρ_{23}	ρ_2
ρ_{13}	ρ_3

Tabla B-2: Equivalencia de parámetros entre el modelo Schwartz (1997) y modelo de Cortazar y Schwartz (2003).

De acuerdo a las analogías anteriores, si se requiere conocer los momentos para las variables de estado $x_t = \log(S_t)$, δ_t y r_t . Se puede realizar el reemplazo en el proceso de Cortazar y Schwartz (2003) y calcular los momentos condicionales a un tiempo T con las expresiones desde (A.43) hasta (A.49).

ANEXO C : VALORIZACIÓN DE OPCIONES EUROPEAS SOBRE EL PRECIO SPOT DE COMMODITIES

En el siguiente anexo se desarrolla el principal resultado para la valorización de opciones europeas escritas sobre el precio spot de un commodity.

C.1 Resultado General

Si definimos que la variable V distribuye lognormal, entonces, la variable $Y = \log(V)$ distribuye normal con valor esperado $E(Y)$ y varianza $\text{Var}(Y)$.

Por propiedad de la distribución lognormal el valor esperado de V es:

$$E(V) = \exp\left(E(Y) + \frac{1}{2} \text{Var}(Y)\right) \quad (\text{C.1})$$

Para calcular opciones europeas se requiere calcular la siguiente expresión:

$$E[\text{Max}(V - X, 0)], \quad (\text{C.2})$$

donde X es una constante.

El resultado principal es:

$$E[\text{Max}(V - X, 0)] = E(V) N(d_1) - X N(d_2) \quad (\text{C.3})$$

$$d_1 = \frac{\log(E(V)/X) + \frac{1}{2} \text{Var}(Y)}{\sqrt{\text{Var}(Y)}} \quad (\text{C.4})$$

$$d_2 = \frac{\log(E(V)/X) - \frac{1}{2} \text{Var}(Y)}{\sqrt{\text{Var}(Y)}} \quad (\text{C.5})$$

La función $N(z)$ simboliza la función normal estándar acumulada.

C.2 Aplicación a Opciones sobre el spot de Commodities

En el caso de modelos de precios de commodities si se verifica que el precio spot S_t distribuye lognormal, $x_t = \log(S_t)$ distribuye normal con valor esperado $E(x_t)$ y varianza $\text{Var}(x_t)$ bajo la medida ajustada por riesgo. Entonces el valor en t de una opción de compra con precio de ejercicio K y fecha de vencimiento en T queda expresado como:

$$\begin{aligned} C(S_T, K, t, T) &= E_t^Q [\text{Max}(S_T - K, 0)] e^{-r(T-t)} \\ &= [E_t^Q(S_T) N(d_1) - X N(d_2)] e^{-r(T-t)} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

$$d_1 = \frac{\log(E_t^Q(S_T)/X) + \frac{1}{2} \text{Var}_t^Q(x_T)}{\sqrt{\text{Var}_t^Q(x_T)}} \quad (\text{C.7})$$

$$d_2 = \frac{\log(E_t^Q(S_T)/X) - \frac{1}{2} \text{Var}_t^Q(x_T)}{\sqrt{\text{Var}_t^Q(x_T)}} \quad (\text{C.8})$$

La expresión anterior es válida si la tasa de interés continua, es constante e igual a r .

Es interesante notar que $E_t^Q(S_T)$ es el precio teórico de un contrato futuro sobre el precio spot del commodity con vencimiento en T . Por lo tanto, las expresiones en (C.6), (C.7) y (C.8) se pueden re escribir en términos de el precio del contrato futuro $F(S_t, t, T)$:

$$C(S_T, K, t, T) = [F(S_t, t, T) N(d_1) - X N(d_2)] e^{-r(T-t)} \quad (\text{C.9})$$

$$d_1 = \frac{\log(F(S_t, t, T)/X) + \frac{1}{2} \text{Var}_t^Q(x_T)}{\sqrt{\text{Var}_t^Q(x_T)}} \quad (\text{C.10})$$

$$d_2 = \frac{\log(F(S_t, t, T)/X) - \frac{1}{2} \text{Var}_t^Q(x_T)}{\sqrt{\text{Var}_t^Q(x_T)}} \quad (\text{C.11})$$

ANEXO D : SIMULACIÓN DE MONTECARLO

Los procesos de precios de commodities indicados en el capítulo 2 tienen distintas implicancias para la dinámica temporal del precio y otras variables subyacentes como el convenience yield. Las metodologías para representar correctamente las variaciones de los procesos son explicadas en este capítulo.

En su forma más general los proceso de precios pueden ser representados por la siguiente ecuación diferencial estocástica a coeficientes constantes:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{A}\mathbf{x}_t dt + \boldsymbol{\Sigma} d\mathbf{w}_t, \quad (\text{D.1})$$

donde $d\mathbf{w}_t$ es un vector de incrementos de un proceso de Wiener multivariado con matriz de correlación instantánea $\boldsymbol{\Theta} dt$.

La simulación de montecarlo, que busca obtener un nuevo vector de variables de estado en el instante $t+1$ condicional en los valores t , se efectúa en base a la siguiente expresión:

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t} = E_{\Delta t}(\mathbf{x}_{t+\Delta t} | \mathbf{x}_t) + \boldsymbol{\Sigma}_{\Delta t} \mathbf{z}_t \quad (\text{D.2})$$

En la ecuación (D.2) $E_{\Delta t}(\bullet)$ es el operador esperanza, Δt es el intervalo temporal entre cada realización de las variables de estado, $\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta t}$ es la matriz de volatilidades del proceso en función del intervalo Δt , \mathbf{z}_t es un vector de variables aleatorias correlacionadas con media cero y matriz de varianza covarianza $\boldsymbol{\Omega}_{\Delta t}$.

Se pueden identificar dos formas de lograr la expresión en (D.2). La primera es discretizar directamente la ecuación diferencial estocástica en (D.1):

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t \Delta t + \boldsymbol{\Sigma}[\Delta t] \mathbf{z}_t \quad (\text{D.3})$$

Para utilizar la expresión en (D.3) se debe tener la precaución de tomar un intervalo de tiempo pequeño de acuerdo a la unidad temporal de los parámetros. En el contexto de esta investigación un intervalo adecuado sería un día expresado como fracción de año.

La segunda forma de resolver (D.2) es utilizando los momentos analíticos de las variables de estado que se indican en la sección 2.4. La ventaja de esta especificación de la simulación es la mayor rapidez cuándo se requiere simular grandes horizontes de tiempo.

D.1 Aspectos Técnicos de la Simulación de Montecarlo

- Variables aleatorias Correlacionadas

Para implementar una simulación para dos o más variables de estado correlacionadas es necesario realizar una descomposición de Cholesky de matriz de correlación. Un resultado conocido para la distribución normal multivariada es que al multiplicar un vector de variables aleatorias iid normal estándar por la matriz de Cholesky, el vector resultante contiene variables aleatorias correlacionadas de media cero.

Definiendo como \mathbf{C} la matriz de Cholesky proveniente de la siguiente descomposición:

$$\Omega[\Delta t] = \mathbf{C}^T \mathbf{C} \quad (\text{D.4})$$

\mathbf{C} es triangular inferior con unos en la diagonal.

Si $\boldsymbol{\varepsilon}$ es un vector de la variables iid normal estándar, entonces el vector \mathbf{z} de variables correlacionadas es:

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathbf{N}[0, \Omega[\Delta t]] \quad (\text{D.5})$$

- Técnica de Reducción de Varianza

Una forma de mejorar la estimación y reducir el tiempo de cálculo es implementar la técnica de reducción de varianza con variables antitéticas, que consiste en simular un conjunto de variables aleatorias estándar y multiplicándolas por menos uno. Utilizando variables antitéticas se asegura que la media sea nula.

ANEXO E: FUNCIONES BASES REGRESIONES

E.1 Bases Polinomiales en la forma de Rodrigues

Las funciones polinomiales son casos especiales de la fórmula de Rodrigues:

$$f_n(x) = \frac{1}{a_n g(x)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [\rho(x) g(x)^n] \quad (\text{G.1})$$

donde $0 \leq n$ indica el orden o grado de la función.

La siguiente tabla indica las expresiones para funciones polinomiales:

Nombre	$f_n(x)$	a_n	$\rho(x)$	$g(x)$
Potencias	$P_n(x)$	$\frac{(2n)!}{n!}$	x^{2n}	1
Legendre	$Le_n(x)$	$(-1)^n 2^n n!$	1	$1-x^2$
Laguerre	$La_n(x)$	$n!$	e^{-x}	x
Hermite	$H_n(x)$	$(-1)^n$	$e^{-x^2/2}$	1
Chebyshev	$C_n(x)$	$(-1)^n 2^n \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}$	$(1-x^2)^{-1/2}$	$1-x^2$

Tabla E-1: Funciones base en fórmula de Rodrigues.

E.2 Bases Polinomiales en forma Recursiva

Las funciones polinomiales pueden obtenerse de manera recursiva mediante la siguiente expresión:

$$a_{n+1}f_{n+1}(x) = (a_n + b_n x)f_n(x) - a_{n-1}f_{n-1}(x) \quad (\text{G.2})$$

donde $0 \leq n$ indica el orden o grado de la función.

La siguiente tabla indica las expresiones para funciones polinomiales:

Nombre	$f_n(x)$	a_{n+1}	a_{n+1}	b_n	a_{n-1}	$f_0(x)$	$f_1(x)$
Potencias	$P_n(x)$	1	0	1	0	1	x
Legendre	$Le_n(x)$	$n+1$	0	$2n+1$	n	1	x
Laguerre	$La_n(x)$	$n+1$	$2n+1$	-1	n	1	$1-x$
Hermite	$H_n(x)$	1	0	1	n	1	x
Chebyshev	$C_n(x)$	1	0	2	1	1	x

Tabla E-2: Funciones base en forma recursiva.

E.3 Gráficos formas Polinomiales

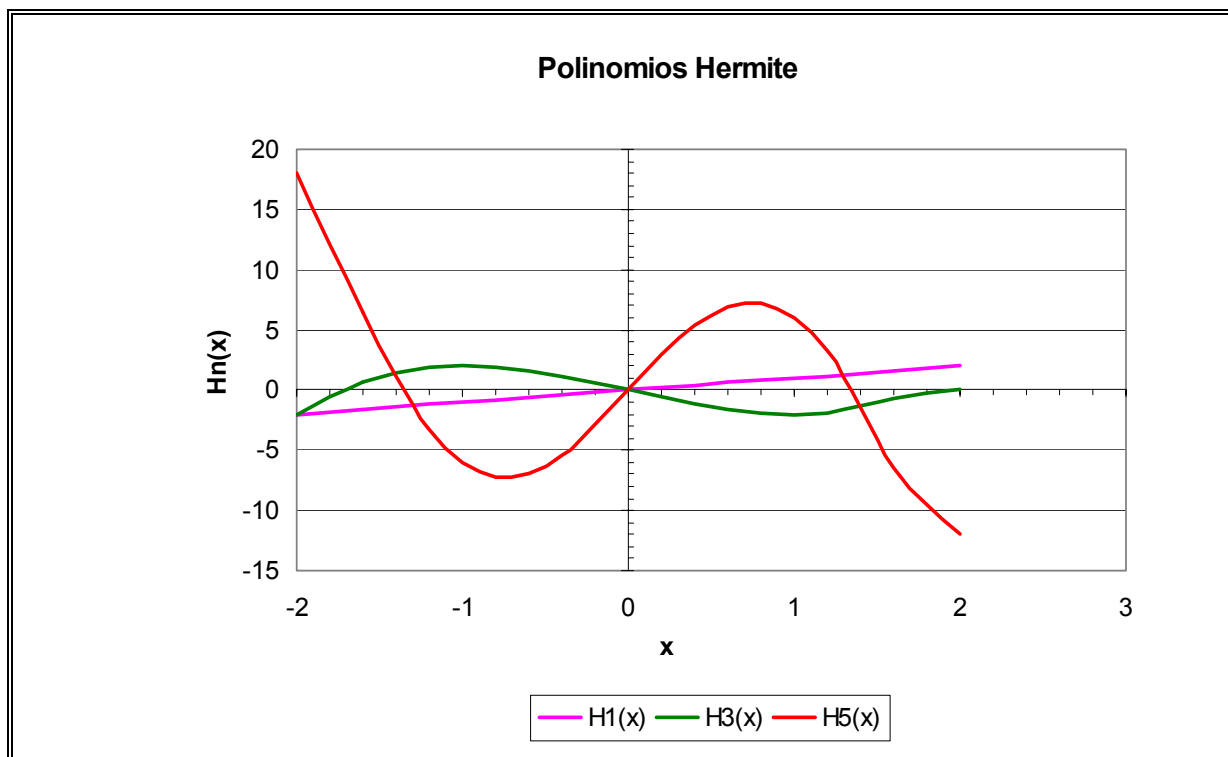


Figura E-1: Polinomios Hermite.

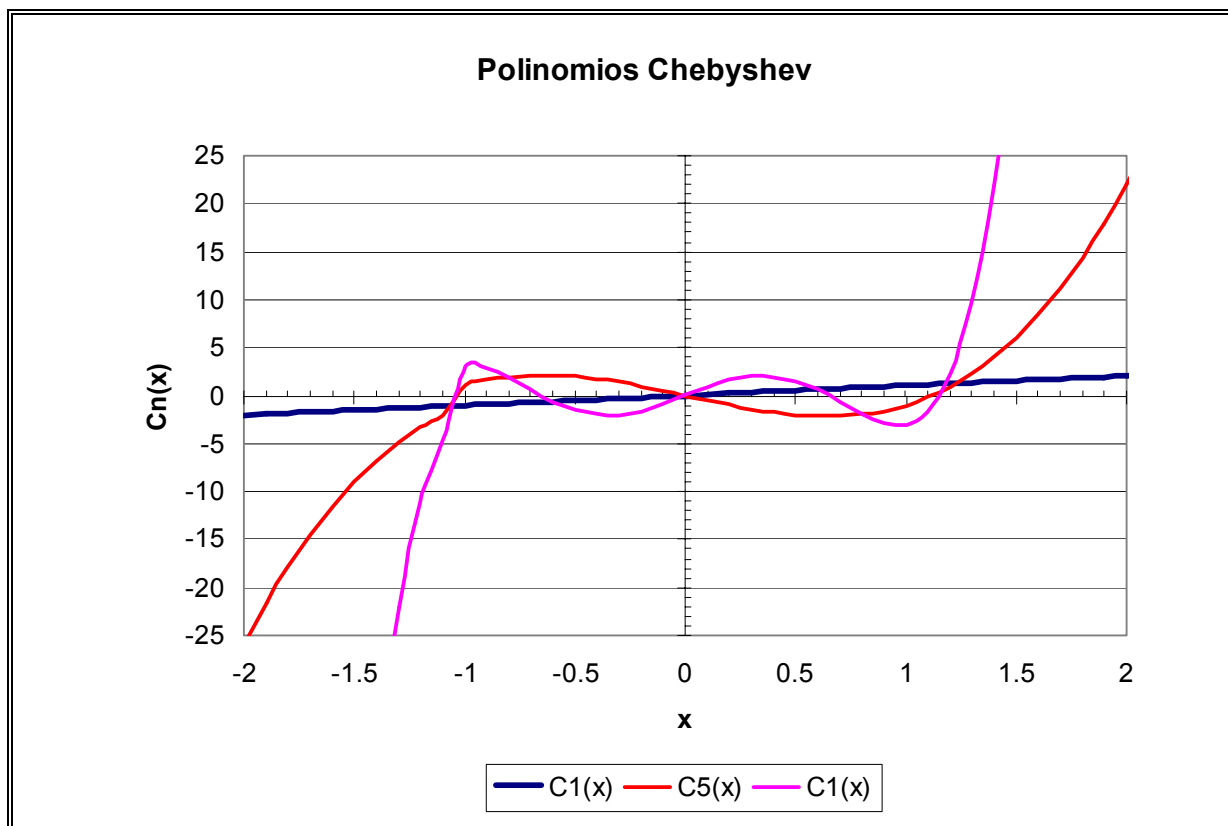


Figura E-2: Polinomios Chebyshev.