



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

**MODELOS LOGNORMALES DE
PRECIOS DE COMMODITIES Y
CALIBRACIÓN MEDIANTE EL FILTRO
DE KALMAN UTILIZANDO PANELES
DE DATOS INCOMPLETOS DE
FUTUROS DE COBRE Y PETRÓLEO**

LORENZO FRANCISCO NARANJO OLIVARES

Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:

GONZALO CORTAZAR S.

Santiago de Chile, Junio, 2002.



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

**MODELOS LOGNORMALES DE
PRECIOS DE COMMODITIES Y
CALIBRACIÓN MEDIANTE EL FILTRO
DE KALMAN UTILIZANDO PANELES DE
DATOS INCOMPLETOS DE FUTUROS
DE COBRE Y PETRÓLEO**

LORENZO FRANCISCO NARANJO OLIVARES

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

GONZALO CORTAZAR S.

ALDO CIPRIANO Z.

NICOLAS MAJLUF S.

CLAUDIO BEHNCKE C.

MARIO DURAN T.

Para completar las exigencias del grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Junio, 2002.

A mis padres Elba y Lorenzo, y a mis hermanas María Alicia y Patricia, que siempre han estado a mi lado.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecerle al profesor Gonzalo Cortázar por su paciencia, tiempo dedicado e importantes consejos que me ha entregado durante todo el desarrollo de esta tesis. No menos importante es también el hecho que él me ha dado la oportunidad y la inspiración para seguir dedicándome al excitante mundo de la investigación académica. He tenido la suerte y el placer de trabajar más de 2 años junto a él, tiempo durante el cual he podido disfrutar del entusiasmo que el profesor Cortázar pone en todo trabajo que realiza.

También quiero agradecer el apoyo y ayuda que me han entregado todos mis compañeros de Magíster. En particular agradezco a Alfonso Molinare, con quién he forjado una excelente amistad y me ha ayudado constantemente en mi investigación.

Este trabajo tampoco sería posible sin la ayuda de los profesores y de todo el personal que trabaja en el Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas. A todos ellos, que por razones de espacio no puedo mencionarlos personalmente, les doy las gracias.

Se agradece también el apoyo financiero recibido de los proyectos Fondecyt 1990109 y Fondef DI102400.

Finalmente quiero agradecerle a mi familia que ha estado siempre a mi lado, no sólo durante el tiempo que duró mi magíster, sino que a lo largo de toda mi vida.

INDICE GENERAL

	Pág.
DEDICATORIA	ii
AGRADECIMIENTOS	iii
INDICE DE TABLAS	viii
INDICE DE FIGURAS.....	xiii
RESUMEN.....	xviii
ABSTRACT	xix
I INTRODUCCIÓN.....	1
II MODELOS LOGNORMALES DE PRECIOS DE COMMODITIES	7
2.1 Modelo Lognormal de N-Factores	9
2.2 Identificación de Parámetros del Modelo Lognormal.....	13
2.3 Modelo Canónico Identificable.....	14
2.4 Momentos de la Distribución del Modelo Lognormal cuando el Vector de Estados es Estacionario	19
2.5 Momentos de la Distribución del Modelo Lognormal cuando el Vector de Estados es No-Estacionario	22
2.6 Clasificación de Modelos de Precios.....	23
III DINÁMICA AJUSTADA POR RIESGO Y VALORIZACIÓN DE CONTRATOS FUTUROS.....	27
3.1 Nociones Básicas	28
3.2 Valorización Teórica de un Contrato Futuro	30
3.3 Precio de Mercado del Riesgo.....	30
3.4 Valorización de Contratos Futuros para los Modelos Canónicos	32
3.5 Estructura de Volatilidad de los Contratos Futuros	34
3.6 Retorno por Conveniencia de un Commodity	35

3.7	Relación de la Representación Canónica con algunos de los Modelos de Precios Presentados en la Literatura	37
3.7.1	Modelos de 1 Factor Estocástico	37
3.7.2	Modelos de 2 Factores Estocásticos	40
3.7.3	Modelos de 3 Factores Estocásticos	44
3.7.4	Resumen del Análisis de Comparación de Modelos	48
IV	ESTIMACIÓN DE VARIABLES DE ESTADO Y DE PARÁMETROS UTILIZANDO EL FILTRO DE KALMAN	50
4.1	El Filtro de Kalman	52
4.1.1	El Espacio de Estados	53
4.1.2	Estimación Óptima en el Espacio de Estados	54
4.1.3	Extensión para Paneles de Datos Incompletos	57
4.2	Estimación de Parámetros	58
4.2.1	El Método de Máxima Verosimilitud	58
4.2.2	Convergencia Asintótica de los Parámetros Estimados	60
4.3	Aplicación a Modelos Canónicos de Precios con Paneles de Datos Incompletos	61
4.3.1	Representación en el Espacio de Estados de los Modelos Canónicos de Precios	61
4.3.2	Forma Funcional de la Matriz de Varianza-Covarianza de los Errores de Medición	64
4.3.3	Inicialización del Filtro de Kalman	65
4.4	Extensiones del Filtro de Kalman	67
4.5	Comparación del Filtro de Kalman con Otros Métodos de Estimación de Variables de Estado	69
V	RESULTADOS EMPÍRICOS PARA COBRE Y PETRÓLEO	73
5.1	Descripción de los Datos Utilizados	74
5.1.1	Contratos Futuros de Petróleo	75
5.1.2	Contratos Futuros de Cobre	79
5.2	Resultados para el Petróleo	82
5.2.1	Estimación de Variables de Estado	82
5.2.2	Estimación de Parámetros	88

5.2.3	Ajuste de los Modelos a los Precios Observados dentro de la Muestra	97
5.2.4	Ajuste de los Modelos a los Precios Observados fuera de la Muestra	108
5.2.5	Ajuste de los Modelos a la Estructura de Volatilidad Observada de los Retornos de los Precios Futuros.....	111
5.2.6	Valorización y Volatilidad de Futuros de Largo Plazo	118
5.2.7	Conclusiones Preliminares para el Petróleo.....	122
5.3	Resultados para el Cobre.....	123
5.3.1	Estimación de Variables de Estado	123
5.3.2	Estimación de Parámetros	126
5.3.3	Ajuste de los Modelos a los Precios Observados dentro de la Muestra	135
5.3.4	Ajuste de los Modelos a los Precios Observados fuera de la Muestra	141
5.3.5	Ajuste de los Modelos a la Estructura de Volatilidad Observada de los Retornos de los Precios Futuros.....	143
5.3.6	Valorización y Volatilidad de Futuros de Largo Plazo	148
5.3.7	Conclusiones Preliminares para el Cobre	151
VI	CONCLUSIONES.....	153
	BIBLIOGRAFÍA	156
	A N E X O S.....	162
	ANEXO A : DEMOSTRACIÓN DE LAS PROPOSICIONES	163
A.1	Transformación Invariante sobre el Vector de Estados	163
A.2	Demostración de la Proposición 2.1	165
A.3	Demostración del Corolario 2.1	169
A.4	Demostración de la Proposición 2.2	170
A.5	Demostración del Corolario 2.2	171
	ANEXO B : ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS LINEALES A COEFICIENTES CONSTANTES	173

B.1 Solución General de la Ecuación Diferencial Estocástica Lineal a Coeficientes Constantes	173
B.2 Diagonalización de la Matriz de Reversión	175
B.3 Momentos de una Combinación Lineal de Variables de Estado	177
ANEXO C : VALORIZACIÓN DE CONTRATOS FUTUROS.....	178
C.1 Valorización de Contratos Futuros.....	178
C.1.1 Modelo Estacionario	178
C.1.2 Modelo No-Estacionario	179
C.2 Estructura de Volatilidad de Contratos Futuros.....	180
ANEXO D : FILTRO DE KALMAN	182
D.1 Estimación Óptima, Proyecciones y Esperanza Condicional.....	182
D.2 Deducción del Filtro de Kalman	184
ANEXO E : DESCRIPCIÓN DE LOS DATOS	187
E.1 Descripción de Paneles de Datos Petróleo	187
E.2 Descripción de Paneles de Datos Cobre.....	191
ANEXO F : SIGNIFICANCIA ESTADÍSTICA DE LOS MODELOS.....	194
F.1 Descripción de los Tests.....	194
F.2 El Caso del Petróleo	196
F.3 El Caso del Cobre	201

INDICE DE TABLAS

	Pág.
Tabla III-1: Comparación del número de parámetros requeridos por tipo de modelo presentado en la literatura y su representación canónica equivalente.....	49
Tabla V-1: Caracterización de los contratos futuros de petróleo en función del número promedio anual de observaciones diarias y del vencimiento máximo disponible por año.....	76
Tabla V-2: Caracterización de los contratos futuros de cobre en función del número promedio anual de observaciones diarias y del vencimiento máximo disponible por año.....	80
Tabla V-3: Parámetros estimados del modelo estacionario (Modelo 1) con distintos números de factores a partir del Panel A (1992 – 2001) de datos de petróleo. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.	90
Tabla V-4: Parámetros estimados del modelo estacionario (Modelo 1) con distintos números de factores a partir del Panel B (1992 – 1996) de datos de petróleo. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.	91
Tabla V-5: Parámetros estimados del modelo estacionario (Modelo 1) con distintos números de factores a partir del Panel C (1997 – 2001) de datos de petróleo. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.	92
Tabla V-6: Parámetros estimados del modelo no-estacionario (Modelo 2) con distintos números de factores a partir del Panel A (1992 – 2001) de datos de petróleo. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.	94
Tabla V-7: Parámetros estimados del modelo no-estacionario (Modelo 2) con distintos números de factores a partir del Panel B (1992 – 1996) de datos de petróleo. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.	95

Tabla V-8: Parámetros estimados del modelo no-estacionario (Modelo 2) con distintos números de factores a partir del Panel C (1997 – 2001) de datos de petróleo. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.	96
Tabla V-9: RMSE porcentual del ajuste de ambos modelos a los precios futuros de petróleo observados utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.	104
Tabla V-10: Error absoluto medio (MAE), error absoluto máximo y sesgo porcentual del ajuste de ambos modelos a los precios futuros observados de petróleo utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.	107
Tabla V-11: Comparación del RMSE porcentual del ajuste de ambos modelos a los precios futuros de petróleo observados del año 2001, utilizando parámetros calibrados con datos dentro y fuera de la muestra.	109
Tabla V-12: Comparación del MAE porcentual del ajuste de ambos modelos a los precios futuros de petróleo observados del año 2001, utilizando parámetros calibrados con datos dentro y fuera de la muestra.	109
Tabla V-13: Comparación del error absoluto máximo porcentual del ajuste de ambos modelos a los precios futuros de petróleo observados del año 2001, utilizando parámetros calibrados con datos dentro y fuera de la muestra.	110
Tabla V-14: Comparación del sesgo porcentual del ajuste de ambos modelos a los precios futuros de petróleo observados del año 2001, utilizando parámetros calibrados con datos dentro y fuera de la muestra.	110
Tabla V-15: RMSE, MAE, Diferencia Absoluta Máxima y Sesgo de la diferencia entre los precios futuros teóricos de petróleo a 10 años entregados por el modelo estacionario y no-estacionario para el período 1992-2001. Valores en dólares.	119

Tabla V-16: RMSE, MAE, Error Absoluto Máximo y Sesgo de la diferencia entre los precios futuros teóricos de petróleo a 20 años entregados por el modelo estacionario y no-estacionario. Valores en dólares.....	120
Tabla V-17: Parámetros estimados del modelo estacionario (Modelo 1) con distintos números de factores a partir del Panel A (1992 – 2001) de datos de cobre. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.	128
Tabla V-18: Parámetros estimados del modelo estacionario (Modelo 1) con distintos números de factores a partir del Panel B (1992 – 1996) de datos de cobre. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.	129
Tabla V-19: Parámetros estimados del modelo estacionario (Modelo 1) con distintos números de factores a partir del Panel C (1997 – 2001) de datos de cobre. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.	130
Tabla V-20: Parámetros estimados del modelo no-estacionario (Modelo 2) con distintos números de factores a partir del Panel A (1992 – 2001) de datos de cobre. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.	132
Tabla V-21: Parámetros estimados del modelo no-estacionario (Modelo 2) con distintos números de factores a partir del Panel B (1992 – 1996) de datos de cobre. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.	133
Tabla V-22: Parámetros estimados del modelo no-estacionario (Modelo 2) con distintos números de factores a partir del Panel C (1997 – 2001) de datos de cobre. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.	134
Tabla V-23: RMSE porcentual del ajuste de ambos modelos a los precios futuros de cobre observados utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.....	138
Tabla V-24: Error absoluto medio (MAE), error absoluto máximo y sesgo porcentual del ajuste de ambos modelos a los precios futuros observados de cobre utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.....	140

Tabla V-25: Comparación del RMSE porcentual del ajuste de ambos modelos a los precios futuros de cobre observados del año 2001, utilizando parámetros calibrados con datos dentro y fuera de la muestra.	141
Tabla V-26: Comparación del MAE porcentual del ajuste de ambos modelos a los precios futuros de cobre observados del año 2001, utilizando parámetros calibrados con datos dentro y fuera de la muestra.	142
Tabla V-27: Comparación del error absoluto máximo porcentual del ajuste de ambos modelos a los precios futuros de cobre observados del año 2001, utilizando parámetros calibrados con datos dentro y fuera de la muestra.	142
Tabla V-28: Comparación del sesgo porcentual del ajuste de ambos modelos a los precios futuros de cobre observados del año 2001, utilizando parámetros calibrados con datos dentro y fuera de la muestra.	143
Tabla V-29: RMSE, MAE, Error Absoluto Máximo y Sesgo de la diferencia entre los precios futuros teóricos de cobre a 5 años entregados por el modelo estacionario y no-estacionario. Valores en centavos de dólar.	149
Tabla V-30: RMSE, MAE, Error Absoluto Máximo y Sesgo de la diferencia entre los precios futuros teóricos de cobre a 10 años entregados por el modelo estacionario y no-estacionario. Valores en centavos de dólar.	149
Tabla E-1: Descripción de los datos del Panel A para el petróleo.	188
Tabla E-2: Descripción de los datos del Panel B para el petróleo.	189
Tabla E-3: Descripción de los datos del Panel C para el petróleo.	190
Tabla E-4: Descripción de los datos del Panel A para el cobre.	191
Tabla E-5: Descripción de los datos del Panel B para el cobre.	192
Tabla E-6: Descripción de los datos del Panel C para el cobre.	193

Tabla F-1: Test estadístico de la razón de verosimilitud entre el modelo estacionario (hipótesis alternativa) y el modelo no-estacionario (hipótesis nula) para 1, 2, 3 y 4 factores y cada uno de los paneles de datos de futuros de petróleo.....	197
Tabla F-2: Test estadístico de la razón de verosimilitud entre el modelo de 1 factor (hipótesis nula) y el modelo de 2 factores (hipótesis alternativa) para los modelos estacionario (Modelo 1) y no-estacionario (Modelo 2) y cada uno de los paneles de datos de futuros de petróleo.	199
Tabla F-3: Test estadístico de la razón de verosimilitud entre el modelo de 2 factores (hipótesis nula) y el modelo de 3 factores (hipótesis alternativa) para los modelos estacionario (Modelo 1) y no-estacionario (Modelo 2) y cada uno de los paneles de datos de futuros de petróleo.	200
Tabla F-4: Test estadístico de la razón de verosimilitud entre el modelo de 3 factores (hipótesis nula) y el modelo de 4 factores (hipótesis alternativa) para los modelos estacionario (Modelo 1) y no-estacionario (Modelo 2) y cada uno de los paneles de datos de futuros de petróleo.	201
Tabla F-5: Test estadístico de la razón de verosimilitud entre el modelo estacionario (hipótesis alternativa) y el modelo no-estacionario (hipótesis nula) para 1 y 2 factores y cada uno de los paneles de datos de futuros de cobre.....	203
Tabla F-6: Test estadístico de la razón de verosimilitud entre el modelo de 1 factor (hipótesis nula) y el modelo de 2 factores (hipótesis alternativa) para los modelos estacionario (Modelo 1) y no-estacionario (Modelo 2) y cada uno de los paneles de datos de futuros de cobre.....	204
Tabla F-7: Test estadístico de la razón de verosimilitud entre el modelo de 2 factores (hipótesis nula) y el modelo de 3 factores (hipótesis alternativa) para los modelos estacionario y no-estacionario y cada uno de los paneles de datos de futuros de cobre.....	205

INDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 4-1: Diagrama del algoritmo de predicción y actualización del filtro de Kalman.	57
Figura 5-1: Descripción del Panel A (1992-2001) de precios futuros de petróleo en función del precio promedio observado y de la desviación estándar por tipo de contrato.	77
Figura 5-2: Descripción del Panel B (1992-1996) de precios futuros de petróleo en función del precio promedio y de la desviación estándar por tipo de contrato.	77
Figura 5-3: Descripción del Panel C (1997-2001) de precios futuros de petróleo en función del precio promedio y de la desviación estándar por tipo de contrato.	78
Figura 5-4: Descripción del Panel A (1992-2001) de precios futuros de cobre en función del precio promedio y de la desviación estándar por tipo de contrato.	81
Figura 5-5: Descripción del Panel B (1992-1996) de precios futuros de cobre en función del precio promedio y de la desviación estándar por tipo de contrato.	81
Figura 5-6: Descripción del Panel C (1997-2001) de precios futuros de cobre en función del precio promedio y de la desviación estándar por tipo de contrato.	82
Figura 5-7: Precio spot del petróleo y del futuro más cercano al vencimiento para el período 1992-2001.	84

Figura 5-8: Desviación estándar del error de estimación de la variable de estado con mayor reversión a la media del modelo estacionario de 4 factores para el petróleo.....	86
Figura 5-9: Desviación estándar del error de estimación de la variable de estado con menor reversión a la media del modelo estacionario de 4 factores para el petróleo.....	87
Figura 5-10: Precios observados y curva teórica de futuros de petróleo del modelo estacionario al día 31/03/1994.....	99
Figura 5-11: Precios observados y curva teórica de futuros de petróleo del modelo no-estacionario al día 31/03/1994.	99
Figura 5-12: Precios observados y curva teórica de futuros de petróleo del modelo estacionario al día 31/12/1996.....	100
Figura 5-13 Precios observados y curva teórica de futuros de petróleo del modelo no-estacionario al día 31/12/1996.	100
Figura 5-14: Precios observados y curva teórica de futuros de petróleo del modelo estacionario al día 30/06/1998.....	101
Figura 5-15: Precios observados y curva teórica de futuros de petróleo del modelo no-estacionario al día 30/06/1998.	101
Figura 5-16 Precios observados y curva teórica de futuros de petróleo del modelo estacionario al día 11/04/2001.....	102
Figura 5-17: Precios observados y curva teórica de futuros de petróleo del modelo no-estacionario al día 11/04/2001.	102
Figura 5-18: RMSE porcentual del ajuste del modelo estacionario a los precios futuros de petróleo observados del Panel A para cada vencimiento.	105
Figura 5-19: RMSE porcentual del ajuste del modelo no-estacionario a los precios futuros de petróleo observados del Panel A para cada vencimiento. ...	105

Figura 5-20: Estructura de volatilidades instantáneas de los retornos de futuros de petróleo para modelo estacionario – Panel A:1992-2001.....	114
Figura 5-21: Estructura de volatilidades instantáneas de los retornos de futuros de petróleo para modelo no-estacionario – Panel A:1992-2001.....	114
Figura 5-22: Estructura de volatilidades instantáneas de los retornos de futuros de petróleo para modelo estacionario – Panel B:1992-1996.....	115
Figura 5-23: Estructura de volatilidades instantáneas de los retornos de futuros de petróleo para modelo no-estacionario – Panel B:1992-1996.....	115
Figura 5-24: Estructura de volatilidades instantáneas de los retornos de futuros de petróleo para modelo estacionario – Panel C:1997-2001.....	116
Figura 5-25: Estructura de volatilidades instantáneas de los retornos de futuros de petróleo para modelo no-estacionario – Panel C:1997-2001.....	116
Figura 5-26: Precio futuro teórico a 20 años del petróleo para el modelo estacionario y no-estacionario de 4 factores: 1992-2001.....	120
Figura 5-27: Estructura de volatilidades de los retornos de futuros de petróleo para el modelo estacionario y no-estacionario de 4 factores utilizando parámetros calibrados con datos del Panel A: 1992-2001.	121
Figura 5-28: Precio spot del cobre y del futuro más cercano al vencimiento para el período 1992-2001.....	124
Figura 5-29: Desviación estándar del error de estimación de la variable de estado con mayor reversión a la media del modelo no-estacionario de 3 factores para cobre.....	125
Figura 5-30: Desviación estándar del error de estimación de la variable de estado sin reversión a la media del modelo no-estacionario de 3 factores para cobre.....	125

Figura 5-31: Precios observados y curva teórica de futuros de cobre del modelo estacionario al día 03/01/1997.....	136
Figura 5-32: Precios observados y curva teórica de futuros de cobre del modelo no-estacionario al día 03/01/1997.....	136
Figura 5-33: Precios observados y curva teórica de futuros de cobre del modelo estacionario al día 01/08/2001.....	137
Figura 5-34: Precios observados y curva teórica de futuros de cobre del modelo no-estacionario al día 01/08/2001.....	137
Figura 5-35: RMSE porcentual del ajuste del modelo estacionario a los precios futuros de cobre observados del Panel A para cada vencimiento.....	139
Figura 5-36: RMSE porcentual del ajuste del modelo no-estacionario a los precios futuros de cobre observados del Panel A para cada vencimiento.....	139
Figura 5-37: Estructura de volatilidades instantáneas de los retornos de futuros de cobre para modelo estacionario – Panel A:1992-2001.....	145
Figura 5-38: Estructura de volatilidades instantáneas de los retornos de futuros de cobre para modelo no-estacionario – Panel A:1992-2001.....	145
Figura 5-39: Estructura de volatilidades instantáneas de los retornos de futuros de cobre para modelo estacionario – Panel B:1992-1996.....	146
Figura 5-40: Estructura de volatilidades instantáneas de los retornos de futuros de cobre para modelo no-estacionario – Panel B:1992-1996.....	146
Figura 5-41: Estructura de volatilidades instantáneas de los retornos de futuros de cobre para modelo estacionario – Panel C:1997-2001.....	147
Figura 5-42: Estructura de volatilidades instantáneas de los retornos de futuros de cobre para modelo no-estacionario – Panel C:1997-2001.....	147

Figura 5-43: Precio futuro con vencimiento a 10 años del cobre para los modelos estacionario y no-estacionario de 3 factores: 1992-2001.	150
Figura 5-44: Estructura de volatilidades de los retornos de futuros de cobre para el modelo estacionario y no-estacionario de 3 factores utilizando parámetros calibrados con datos del Panel A: 1992-2001.	151

RESUMEN

En esta tesis se realiza un análisis teórico y empírico de un modelo lognormal multifactorial de precios de commodities aplicado al caso del cobre y del petróleo. El modelo presentado generaliza investigaciones previas del comportamiento estocástico de los precios de commodities (e.g. Gibson y Schwartz (1990), Schwartz (1997), Schwartz y Smith (2001), Cortazar y Schwartz (2002)), permitiendo distinguir entre especificaciones estacionarias y no-estacionarias de un número arbitrario de factores. Se estudian las condiciones bajo las cuales este modelo es económicamente identificable, en el espíritu de Dai y Singleton (2000).

El modelo es calibrado, para distintas especificaciones y número de factores, utilizando el filtro de Kalman a partir de observaciones diarias de precios de contratos futuros de cobre y petróleo, durante un período de 10 años. Se muestra que esta metodología de estimación puede ser aplicada aún cuando el panel de datos analizado es transversalmente incompleto. Esto permite incorporar todos los precios futuros observados, aún cuando algunos contratos no se transen diariamente. Se realiza un estudio de la capacidad de ajuste de los modelos a los precios observados y a la estructura de volatilidad empírica de los contratos futuros. Bajo estas medidas de bondad de ajuste, se encuentra que es necesario utilizar un modelo de 4 factores para el caso del petróleo mientras que para el cobre el modelo de 2 factores se comporta bien. No se encontró evidencia empírica relevante para rechazar la especificación no-estacionaria de precios en ambos commodities.

ABSTRACT

In this thesis we study and empirically test a lognormal multifactor model of commodity prices applied to copper and oil, which generalizes previous research (e.g. Gibson and Schwartz (1990), Schwartz (1997), Schwartz and Smith (2001), Cortazar and Schwartz (2002)). This model captures stationary and non-stationary features of commodity prices for an arbitrary number of factors. We also analyze the conditions for econometric identification of the parameters, in the spirit of Dai and Singleton (2000).

The model is calibrated, for stationary and non-stationary specifications and different number of factors, using the Kalman filter methodology with daily futures prices observations of copper and oil over a 10 years horizon. We show that the Kalman filter can still be used even when the data panel is incomplete, allowing for the incorporation of some futures prices, which do not trade every day. We perform tests of the ability of each model to price observed futures prices and to fit the volatility term structure of futures returns of all traded contracts. Under the above goodness-of-fit measures, we find that a 4-factor model is needed in the case of oil and that a 2-factor model performs well when applied to copper. We do not find strong empirical evidence against non-stationary behavior in copper and oil spot prices.

I INTRODUCCIÓN

Los mercados mundiales están continuamente recibiendo flujos de información relacionados con variaciones de oferta, demanda y niveles de inventario de los distintos commodities que hacen parte del sistema económico. En una economía competitiva, estas variaciones se traducen en movimientos de precios continuos e impredecibles debido a que en equilibrio, estos precios se determinan al igualarse los niveles de oferta y de demanda. El análisis y comprensión del comportamiento estocástico de los precios de commodities es de gran importancia al momento de valorizar instrumentos derivados y decisiones de inversión para extraer o producir algún commodity¹.

La literatura financiera moderna ha realizado importantes avances en la modelación estocástica de los precios de commodities. Los primeros estudios realizados en el espíritu del trabajo seminal de Black y Scholes (1973) asumen que el precio spot de un commodity sigue un movimiento browniano geométrico. Sin embargo, como indica Schwartz (1997), esta suposición no es realista ya que no incorpora la reversión a la media de largo plazo que exhiben los precios de ciertos commodities. Esto se debe a que en una economía competitiva, si los precios de un commodity aumentan, los productores de más altos costos entrarán al mercado produciendo un aumento de la oferta. Asimismo, en un escenario de precios altos, la demanda por el commodity puede disminuir al ser éste sustituido por otros commodities similares. Estos dos efectos, aumento de la oferta y disminución de la demanda, introducen pues una presión a la baja en los precios. Lo contrario ocurre si los precios de dichos commodities disminuyen.

¹ Ver por ejemplo Brennan y Schwartz (1985) y Cortazar y Schwartz (1993) donde se valorizan proyectos mineros utilizando el método de opciones reales.

Se han desarrollado numerosos estudios que analizan la reversión a la media en los precios de commodities² y plantean distintos modelos de precios para modelarla. La gran mayoría de ellos asumen que el precio spot del commodity sigue un proceso estocástico lognormal de 2 o 3 factores de riesgo, ya sea histórico o ajustado por riesgo. Aún cuando la suposición de que los precios de los commodities siguen un proceso lognormal pueda parecer restrictiva, existe una amplia gama de procesos que se pueden explorar dentro de este subconjunto de las especificaciones posibles.

El primer objetivo de esta tesis es analizar, dentro de un marco de estudio unificado, un modelo general de precios lognormales de commodities que incorpore como casos particulares varios de los distintos modelos que se han presentado en la literatura. Además, el marco de estudio presentado permite generalizar sin dificultad los modelos de precios existentes, así como analizar nuevas especificaciones que no han sido aún exploradas, como son los modelos estacionarios multifactoriales.

El modelo de precios que se presenta en esta tesis, así como muchos de los modelos que se han propuesto en la literatura, se construye sobre la base de ciertas variables explicativas que son latentes o no observables. La incorporación de estas variables se debe a que la determinación de los precios de commodities se produce en un sistema macroeconómico complejo. Es por lo tanto plausible que muchos factores económicos afecten la determinación de dichos precios. La incertidumbre asociada a estos factores está representada y resumida por las variables latentes o de estado del modelo. El número de variables de estado utilizadas para modelar los precios de commodities representa pues el número de factores estocásticos o fuentes de incertidumbre que afectan la determinación de dichos precios.

² Algunos trabajos donde se analiza la reversión a la media de los commodities son Gibson y Schwartz (1990), Brennan (1991), Laughton y Jacoby (1993), Cortazar y Schwartz (1994), Bessembinder et al. (1995), Schwartz (1997), Araya (1997) y Casassus y Collin-Dufresne (2001).

La dinámica de estas variables latentes, y por consiguiente la de los precios, está determinada por un cierto número de parámetros estructurales. La diferencia entre las variables de estado y los parámetros estructurales es que las primeras están cambiando continuamente en el tiempo a medida que se va resolviendo la incertidumbre de la economía. Los parámetros estructurales en cambio se suponen constantes y representan ciertas características más estables del sistema económico. Si uno quiere por ejemplo valorizar un contrato futuro con un cierto vencimiento escrito sobre algún commodity, es necesario estimar los parámetros del modelo, así como el valor de las variables de estado en ese momento.

Para que la estimación econométrica de los parámetros de un modelo con variables latentes sea consistente, o sea, que las propiedades asintóticas de los parámetros estimados converjan a los parámetros verdaderos, el modelo debe estar correctamente identificado. Esto significa que el modelo debe contener el mínimo número de parámetros necesarios para representar una cierta dinámica de precios.

El segundo objetivo de esta tesis es analizar las condiciones bajo las cuales los modelos de precios presentados son identificables. Esto lleva a plantear un modelo de precios canónico que contiene el mínimo número de parámetros, pero que a la vez mantiene la mayor generalidad en la especificación del modelo, preservando la lognormalidad de los precios. Este tipo de análisis no ha sido realizado en la literatura de commodities, en particular para procesos estocásticos que contienen raíces unitarias.

De acuerdo a Schwartz (1997), una herramienta que es particularmente útil para resolver problemas en los cuales las variables de estado no son observables, pero están generadas por un proceso markoviano, es el espacio de estados. Una vez que un modelo se plantea en el espacio de estados, se puede utilizar el filtro de Kalman para determinar el nivel de las variables de estado así como estimar los parámetros del modelo, a partir de otras variables que sí se observan. Esta metodología de estimación ha sido utilizada extensamente en finanzas no sólo para

modelos de precios de commodities³ sino también para analizar modelos de tasas de interés, inflación y tipos de cambio⁴.

Las variables observables de un modelo de precios de commodities son por lo general los precios de un derivado con distintos vencimientos. En mercados perfectos y eficientes, los precios de los derivados son una fuente valiosa de información para determinar las variables de estado de un modelo de precios así como sus parámetros. Este supuesto se cumple en la mayoría de los mercados de commodities en los cuales una gran cantidad de agentes económicos, ya sea por motivos de cobertura, diversificación, arbitraje o especulación, están constantemente transando estos instrumentos financieros.

Los contratos futuros sobre commodities son un tipo particular de instrumento derivado que se transa activamente en bolsas de comercio para distintos vencimientos. Es uno de los instrumentos derivados más antiguo e importante de los mercados de commodities. Los precios de los contratos futuros, a diferencia de las variables latentes, son fácilmente observables y entregan información valiosa acerca del comportamiento futuro de los precios de commodities. En esta tesis se utilizan observaciones diarias de precios de contratos futuros escritos sobre commodities a distintos vencimientos para estimar las variables de estado y los parámetros del modelo⁵.

³ En modelos de precios de commodities el filtro de Kalman ha sido utilizado por varios autores entre los que se puede mencionar Schwartz (1997), Pindyck (1999), Díaz (2000), Schwartz y Smith (2000) y Sørensen (2002).

⁴ Ver por ejemplo Pennacchi (1991), Lund (1994), Lund (1997), Duan y Simonato (1995), Ball y Torous (1996), Geyer y Pichler (1998), Babbs y Nowman (1999), de Jong y Santa-Clara (1999), de Jong (2000) y Dewachter y Maes (2001).

⁵ La metodología presentada en esta tesis se puede adecuar para incorporar en la estimación otros instrumentos financieros. Cortazar y Reyes (2001) estiman modelos de precios de commodities utilizando conjuntamente futuros y opciones sobre futuros. La incorporación de otros

Una deficiencia importante en la aplicación del filtro de Kalman en la mayoría de los trabajos presentados hasta la fecha es que sólo utilizan los contratos futuros para los vencimientos en los cuales se tienen observaciones en cada instante del tiempo. Esto presupone que el panel de datos utilizado en el proceso de estimación debe ser completo. Sin embargo, en la práctica existen futuros con ciertos vencimientos que se transan menos frecuentemente o que sólo se han incorporado al mercado recientemente. En un análisis tradicional, este tipo de contratos no se incluyen en el proceso de estimación aún cuando pueden llegar a representar un porcentaje importante de todos los precios disponibles⁶.

El tercer objetivo de esta tesis es plantear una metodología basada en el filtro de Kalman para estimar las variables de estado y los parámetros del modelo utilizando toda la información de precios futuros que se disponga para el período de tiempo que se quiera estudiar. Esto permite utilizar una gran cantidad de precios que de otro modo no serían incorporados en la estimación.

Esta metodología de estimación se aplica para estimar modelos de precios de 2 commodities comerciales: el petróleo y el cobre, utilizando las observaciones diarias de precios futuros durante un período de tiempo de 10 años. Para cada commodity, se estima un modelo estacionario y otro no estacionario de distintos factores de riesgo.

Para determinar qué tipo de modelo es más adecuado para representar el comportamiento de los precios de cada commodity, se realiza un análisis del ajuste de los modelos a los precios observados. Además, se compara la volatilidad teórica de los retornos de los futuros con la calculada directamente a partir de los precios

instrumentos puede agregar una valiosa información al proceso de estimación, en particular para ciertos instrumentos que pueden ser más sensibles a ciertos parámetros.

⁶ Cortazar y Schwartz (2002) indican que si se quiere estimar un modelo de precios de petróleo a partir de precios de contratos futuros, considerando sólo los vencimientos para los cuales se tiene un panel de datos completos, se estaría desaprovechando aproximadamente un tercio de todos los datos disponibles.

observados. Es deseable que un buen modelo de precios deba a la vez ajustarse correctamente a las observaciones empíricas, manteniendo la máxima simplicidad posible. En este caso por simplicidad se entiende determinar un modelo que contenga el mínimo número de variables de estado y por consiguiente de parámetros.

El resto de esta tesis se organiza de la siguiente manera. Los modelos de precios de commodities se analizan en el Capítulo 2. En el Capítulo 3 se explica cómo se pueden valorizar contratos futuros sobre un commodity cuando éste sigue un proceso lognormal. El Capítulo 4 se concentra en analizar el filtro de Kalman y cómo se puede aplicar cuando se dispone de paneles de datos incompletos de precios futuros de commodities. Los resultados de la estimación aplicados a precios de petróleo y cobre se presentan en el Capítulo 5. El Capítulo 6 finalmente concluye.

II MODELOS LOGNORMALES DE PRECIOS DE COMMODITIES

En este capítulo se presenta un modelo estocástico lognormal para caracterizar la dinámica del precio spot de un commodity. Este modelo es lo bastante general como para incorporar como casos particulares varios de los modelos más importantes que se han propuesto en la literatura⁷, pero que permite a su vez analizar nuevas especificaciones y aspectos que no han sido estudiados, como son los modelos estacionarios del precio spot.

La dinámica del precio spot es analizada bajo la ley de probabilidad histórica o estadística, o sea, la que se observa en la serie de tiempo del precio spot o de algún derivado financiero como un contrato futuro. El estudio de la dinámica bajo la ley de probabilidad ajustada por riesgo se posterga para el Capítulo 3.

La modelación del precio spot que se presenta en esta sección está basada en ciertas variables latentes que siguen un proceso estocástico pero que no son observadas en los mercados financieros. La introducción de estas variables tiene como objetivo modelar ciertas características estadísticas del precio spot tales como su varianza y su función de autocorrelación, así como las tendencias de largo plazo y si las perturbaciones son permanentes o transitorias. Estas variables latentes determinan pues el estado del precio spot en todo momento y se denominan variables de estado del modelo. El número de variables de estado utilizadas para modelar el precio spot de un commodity representa el número de factores de incertidumbre, o simplemente, factores del modelo.

Una posible interpretación de estas variables se obtiene del hecho que la determinación de los precios de commodities se produce en un sistema macroeconómico complejo. Es por lo tanto plausible que varios factores económicos, que pueden estar correlacionados entre sí, afecten la determinación de dichos precios.

⁷ Ver por ejemplo Brennan y Schwartz (1985), Gibson y Schwartz (1990), Gibson y Schwartz (1991), Schwartz (1997), Schwartz (1998), Schwartz y Smith (2000), Cortazar y Schwartz (2002) y Sørensen (2002).

La incertidumbre asociada a dichos factores económicos está representada y resumida por las variables de estado del modelo.

Uno de los objetivos principales de esta sección es determinar, dado una dinámica del precio spot, cuál es el mínimo número de parámetros necesarios para representar dicha dinámica si se asume que el precio spot sigue un proceso estocástico lognormal⁸. Este análisis llevará a identificar una representación canónica del precio spot que contiene el mínimo número de parámetros y que es por lo tanto económicamente identificable. La identificación de los parámetros del modelo permite que sus estimaciones sean consistentes, propiedad fundamental de todo método econométrico.

El análisis desarrollado para estudiar la identificación de los parámetros está principalmente basado en el que proponen Dai y Singleton (2000), quienes analizan modelos canónicos de la tasa de interés de corto plazo. La representación de los modelos de precios de commodities se ajusta a la introducida por Schwartz y Smith (2000).

En esta sección se presenta un análisis menos general que el de Dai y Singleton (2000) en el sentido que ellos también analizan procesos estocásticos en los cuales la volatilidad instantánea de las variables de estado puede depender del nivel de éstas⁹, y que por lo tanto no son procesos gaussianos.

Sin embargo, en esta tesis se extiende el resultado de los autores para procesos lognormales del precio spot de un commodity. Dai y Singleton (2000) analizan el comportamiento estocástico de la tasa de interés e implícitamente asumen un comportamiento estacionario para la tasa, lo cual es consistente con la teoría

⁸ Langetieg (1980) es el primero en analizar este tipo de procesos aplicados a la tasa de interés de corto plazo.

⁹ Estos tipos de procesos fueron propuestos por primera vez por Cox, Ingersoll y Ross (1985) y por lo general se abrevian como procesos de tipo CIR. La extensión para el caso multifactorial se analiza en Duffie y Kan (1996).

financiera existente. Los precios de commodities pueden en cambio exhibir tendencias o ciclos que introducen un comportamiento no estacionario en la dinámica. Se mostrará que cuando la tendencia es modelada mediante un proceso que contenga una raíz unitaria, los resultados de Dai y Singleton (2000) deben ser ajustados para obtener la identificación completa del modelo. Además, el modelo canónico que se presenta aquí es distinto al de estos autores (aunque equivalente) permitiendo calcular los momentos de la distribución del precio spot de una manera más simple. Finalmente, se demuestra explícitamente como transformar cualquier modelo lognormal de precios de commodities de un cierto número de factores al modelo canónico.

En un trabajo desarrollado recientemente por Casassus y Collin-Dufresne (2001), los autores presentan un modelo de precios de commodities muy similar al desarrollado en esta sección. Sin embargo, el análisis de los autores difiere en el presentado aquí en el sentido que sus resultados se concentran en modelar el comportamiento del precio spot con relación a la dinámica del retorno por conveniencia y de la tasa de interés de corto plazo.

2.1 Modelo Lognormal de N-Factores

Sea S_t el precio spot de un commodity y definamos $Y_t = \log S_t$ como el logaritmo del precio spot, definición que se mantendrá por el resto de esta tesis a menos que se indique lo contrario. La introducción de esta nueva variable será de gran utilidad, ya que el logaritmo de una variable aleatoria lognormal tiene una distribución normal.

El modelo que se analizará supone en su forma general que Y_t se puede representar de la siguiente manera:

$$Y_t = \tilde{\mathbf{h}}' \tilde{\mathbf{x}}_t + c_t \quad (2.1)$$

donde $\tilde{\mathbf{h}}$ es un vector de dimensión $N \times 1$, c_t es una función del tiempo y $\tilde{\mathbf{x}}_t$ es un vector de dimensión $N \times 1$ que sigue un proceso estocástico multivariado del tipo Ornstein-Uhlenbeck (O-U). Langetieg (1980) es el primero en analizar este tipo

de procesos en finanzas para estudiar el comportamiento de la tasa de interés de corto plazo.

La dinámica de $\tilde{\mathbf{x}}_t$ queda caracterizada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas lineales a coeficientes constantes:

$$d\tilde{\mathbf{x}}_t = (-\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}_t + \tilde{\mathbf{b}})dt + \tilde{\Sigma}d\tilde{\mathbf{w}}_t \quad (2.2)$$

donde $\tilde{\mathbf{A}}$ es una matriz de dimensión $N \times N$ que tiene N valores propios distintos y todos mayores o iguales a cero, $\tilde{\mathbf{b}}$ es un vector de constantes, $\tilde{\Sigma}$ es una matriz de dimensión $N \times N$ y $d\tilde{\mathbf{w}}_t$ es un vector de incrementos de un proceso de Wiener multivariado de dimensión $N \times 1$ que satisface $(d\tilde{\mathbf{w}}_t)(d\tilde{\mathbf{w}}_t)' = \tilde{\Theta}dt$. Es decir, los incrementos pueden estar correlacionados. Se supone además que la matriz de varianza-covarianza instantánea $\tilde{\Omega} = \tilde{\Sigma}\tilde{\Theta}\tilde{\Sigma}'$ debe ser estrictamente definida positiva¹⁰. El vector $\tilde{\mathbf{x}}_t$ se llamará vector de estados, sus elementos serán las variables de estado y la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ se llamará matriz de reversión.

La suposición bajo la cual los valores propios de la matriz de reversión son todos distintos no es estrictamente necesaria, ya que el análisis que se desarrollará puede ser ajustado para el caso en el cual no se cumple esta suposición. Sin embargo, la complejidad del análisis aumenta considerablemente si se permite que ciertos valores propios puedan ser iguales, en particular para encontrar expresiones analíticas simples de los momentos del precio spot así como para valorizar contratos futuros. Hasta donde abarca el conocimiento del autor de esta tesis, procesos en los cuales se tienen valores propios comunes en la matriz de reversión no han sido estudiados en la literatura de precios de commodities. Este punto será tratado nuevamente en secciones posteriores.

Como se muestra en el Anexo B, el vector de estados $\tilde{\mathbf{x}}_t$ definido por la ecuación (2.2) sigue una distribución normal multivariada. Luego, como Y_t es una

¹⁰ Esto implica que suponemos que todos los factores del vector de estados son estocásticos.

combinación lineal de los elementos de $\tilde{\mathbf{x}}_t$, se tiene pues que Y_t también distribuye normal. El precio spot debe seguir entonces una distribución lognormal como la exponencial de Y_t .

Los valores propios de la matriz de reversión $\tilde{\mathbf{A}}$ determinan la dinámica del proceso $\tilde{\mathbf{x}}_t$ a través de su distribución de probabilidad. Como se muestra en secciones posteriores, cuando esta matriz es estrictamente definida positiva, $\tilde{\mathbf{x}}_t$ es un proceso estacionario que revierte a una media de largo plazo dada por $\tilde{\mathbf{b}}$. Si por el contrario alguno de los valores propios de esta matriz es igual a cero, el proceso $\tilde{\mathbf{x}}_t$ tendrá una raíz unitaria y no será estacionario.

La media de largo plazo de Y_t estará determinada por la media de largo plazo de $\tilde{\mathbf{x}}_t$ pero también por la función c_t . Cuando el vector de estados sigue un proceso estacionario, la función c_t representa la tendencia a la cual revierte el logaritmo del precio spot en el largo plazo.

En esta tesis se analizarán y calibrarán con datos empíricos dos tipos particulares de procesos lognormales. El primero de ellos es un proceso estocástico estacionario para el precio spot en el cual el vector de estados $\tilde{\mathbf{x}}_t$ es estacionario y $c_t = \tilde{d}$. El segundo es un proceso no-estacionario para el precio spot en el cual $\tilde{\mathbf{x}}_t$ tiene una raíz unitaria. Este último tipo de procesos estocásticos ha sido de los más estudiados en la literatura de commodities. También se les conoce como “difference-stationary process”, ya que son procesos estacionarios cuando se toman diferencias¹¹. En su forma general, los dos tipos de modelos que se analizarán en esta tesis se pueden representar por las siguientes ecuaciones:

$$Y_t = \tilde{\mathbf{h}}' \tilde{\mathbf{x}}_t + \tilde{d} \quad (2.3)$$

$$d\tilde{\mathbf{x}}_t = (-\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}_t + \tilde{\mathbf{b}})dt + \tilde{\Sigma}d\tilde{\mathbf{w}}_t \quad (2.4)$$

¹¹ Estrictamente, esto ocurre cuando se trabaja en tiempo discreto. En tiempo continuo se deben tomar logaritmos sobre un proceso con raíz unitaria para obtener un proceso estacionario.

Sin embargo, estas no son las únicas especificaciones que podría tomar la tendencia a la cual revierte el modelo. Baker, Mayfield y Parsons (1998) investigan un modelo en el cual la tendencia de largo plazo a la cual revierte Y_t es una función lineal del tiempo, o sea, $c_t = \tilde{d} + \tilde{\mu}t$. Este tipo de procesos es lo que tradicionalmente se llama en la literatura econométrica un proceso estacionario entorno a una tendencia (“trend-stationary process”) y tienen la característica que cuando se le substraer al proceso Y_t su tendencia $\tilde{\mu}t$, el proceso resultante $Y_t - \tilde{\mu}t$ es estacionario. Este modelo es equivalente al que proponen Lo y Wang (1995) para modelar activos que exhiben cierto grado de predictibilidad en sus retornos, y también al propuesto por Laughton y Jacoby (1993). En este caso, el retorno instantáneo del commodity es $\tilde{\mu}$ ¹².

Pindyck (1999) extiende este tipo de análisis al proponer una especificación en la cual la tendencia de largo plazo es una función cuadrática del tiempo, o sea, $c_t = \tilde{d} + \tilde{\mu}t + \gamma t^2$.

Sørensen (2002) utiliza una tendencia cíclica para reflejar la estacionalidad de los retornos de los commodities agrícolas, al igual que Lucia y Schwartz (2001) para modelar el precio spot de la electricidad y Manoliu y Tompaidis (2002) para modelar el precio del gas natural. Cuando el modelo tiene sólo 1 factor estacionario y c_t es una función arbitraria del tiempo, el proceso definido por (2.1) y (2.2) es del tipo propuesto por Hull y White (1990)¹³.

Aún cuando en esta tesis no se analizarán empíricamente este tipo de especificaciones, la metodología propuesta permite adaptar fácilmente un modelo de

¹² Este no es el único modelo que se puede plantear para incorporar la reversión a la media de los commodities en torno a una tendencia. Véase por ejemplo Araya (1997), Cortazar y Schwartz (1997) y Cortazar y Schwartz (1998).

¹³ Hull y White (1990) también permiten que el coeficiente de reversión a la media y la volatilidad dependan del tiempo de manera arbitraria.

N factores de tal forma de incorporar tendencias temporales, y de esta forma generalizar los modelos presentados en los párrafos anteriores.

2.2 Identificación de Parámetros del Modelo Lognormal

El proceso estocástico del logaritmo del precio spot queda entonces determinado por una combinación lineal de los elementos de $\tilde{\mathbf{x}}_t$. Sin embargo, esta representación no es única en el sentido que cualquier transformación invariante $\mathbf{T}(\mathbf{x}_t) = \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{L}\mathbf{x}_t$ aplicada sobre $\tilde{\mathbf{x}}_t$ permite obtener un nuevo vector de estados $\mathbf{z}_t = \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{x}}_t)$ tal que Y_t mantiene las mismas propiedades estadísticas que el original¹⁴. Se requerirá que la transformación invariante $\mathbf{T}(\cdot)$ sea invertible, lo que equivale a suponer que la matriz \mathbf{L} debe ser invertible. Aplicando esta transformación al vector de estados original, se demuestra en el Anexo A que las ecuaciones (2.3) y (2.4) se pueden describir de la siguiente manera:

$$Y_t = \hat{\mathbf{h}}' \mathbf{z}_t + \hat{d} \quad (2.5)$$

$$d\mathbf{z}_t = (-\hat{\mathbf{A}}\mathbf{z}_t + \hat{\mathbf{b}})dt + \hat{\boldsymbol{\Sigma}}d\mathbf{w}_t \quad (2.6)$$

donde $\hat{\mathbf{h}}' = \tilde{\mathbf{h}}' \mathbf{L}^{-1}$, $\hat{d} = \tilde{d} - \tilde{\mathbf{h}}' \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\varphi}$, $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{L} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{L}^{-1}$, $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{L} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{L} \tilde{\mathbf{b}}$ y $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{L} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$. Esta representación es totalmente equivalente desde un punto de vista estadístico a la dada por las ecuaciones (2.3) y (2.4). La nueva matriz de reversión $\hat{\mathbf{A}}$, por ser una matriz similar a la matriz de reversión original, tiene sus mismos valores propios. Esto implica que si el vector de estados original es estacionario, también lo será bajo la nueva representación. Tampoco existe degeneración de ninguna variable de estado en el sentido que todas las variables del nuevo vector de estados son estocásticas. Esto proviene del hecho que la nueva matriz de varianza-covarianza dada por $(\mathbf{L} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}) \tilde{\boldsymbol{\Theta}} (\mathbf{L} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}})' = \mathbf{L} \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{L}'$ es una matriz congruente a la original y por lo tanto también es estrictamente definida positiva¹⁵.

¹⁴ Estas transformaciones invariantes se introducen en Dai y Singleton (2000).

¹⁵ En el Anexo A se explica con más detalle estas conclusiones.

Esta transformación se puede realizar ya que las variables de estado del modelo original no son observables y sólo se definen para explicar la dinámica del precio spot (media, volatilidad, autocorrelación), pero no se supone que se fijan exógenamente. Por lo tanto, cualquier conjunto de variables de estado que nos permita explicar una cierta dinámica del precio spot será adecuado.

Este simple resultado tiene implicancias importantes si los parámetros del modelo deben ser estimados, dado que el modelo en su forma general dada por las ecuaciones (2.3) y (2.4) no está identificado. Esto se debe a que dos conjuntos de parámetros distintos pueden explicar la misma dinámica del precio spot. En la siguiente sección se muestra como el modelo general puede ser rescrito de una manera canónica, en el espíritu de Dai y Singleton (2000), de tal forma que contenga el mínimo número de parámetros y pueda así ser identificado.

2.3 Modelo Canónico Identificable

En la sección anterior se vio que cualquier transformación invariante aplicada sobre el vector de estados permite obtener un modelo que es estadísticamente equivalente al modelo original. Si estas transformaciones se realizan de manera inteligente, se pueden obtener ciertos tipos de modelos, que llamaremos canónicos, que contienen el mínimo número de parámetros y mantienen la especificación estadística general dada por las ecuaciones (2.3) y (2.4).

A continuación se presentan algunas proposiciones que se demuestran en el Anexo A y que entregan representaciones del precio spot que son econométricamente identificables. En la demostración de estas proposiciones está implícita una metodología general que permite reducir cualquier modelo representado por las ecuaciones (2.3) y (2.4) a un modelo que contenga el mínimo número de parámetros. Esta metodología es muy útil cuando se quiera encontrar la relación entre las representaciones canónicas y otros modelos que se han planteado en la literatura reciente.

Proposición 2.1

Bajo el modelo estocástico de N factores definido para el precio spot de un commodity por las ecuaciones (2.3) y (2.4), si se cumple que la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ tiene todos sus valores propios distintos y estrictamente positivos, entonces el modelo para el precio spot puede ser reducido a:

$$Y_t = \mathbf{1}'\mathbf{x}_t + d \quad (2.7)$$

$$d\mathbf{x}_t = -\mathbf{A}\mathbf{x}_t dt + \Sigma d\mathbf{w}_t \quad (2.8)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

$$d\mathbf{w}_t d\mathbf{w}_t' = \Theta dt \quad \Theta = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

■

La proposición 2.1 se demuestra aplicando sucesivas transformaciones invariantes sobre el vector de estados original, lo que equivale a realizar rotaciones, escalamientos y translaciones. Esto muestra que se puede reducir el número de parámetros en forma significativa, y además identificar todos los parámetros, sin por ello afectar las propiedades estadísticas del modelo del precio spot original¹⁶.

¹⁶ En el caso que se considere un modelo en el cual ciertos valores propios son iguales, entonces la matriz de reversión, que es diagonal en el caso que sus valores propios son distintos, podría ser reemplazada por una matriz de Jordan.

Bajo esta representación canónica, se pueden interpretar las variables de estado del modelo de una manera simple e intuitiva. Supongamos que los elementos de la diagonal de la matriz de reversión están ordenados de menor a mayor, o sea, $a_N > a_{N-1} > \dots > a_1 > 0$. En este caso, la variable de estado $x_N(t)$ es la que revierte más rápido de todas. Esto significa que esta variable podría representar cualquier perturbación de muy corto plazo en el precio spot que se espera que desaparezca rápidamente y no tenga un impacto de largo plazo en el comportamiento futuro del precio spot. Asimismo, la variable de estado $x_1(t)$ es la que revierte más lenta de todas. En este caso, cualquier perturbación de largo plazo, que se espera que revierta en el futuro más lejano, podría ser representada por el valor de esta variable. En este modelo la información está modelada en función de la duración de su impacto sobre el precio spot de largo plazo del commodity. Sin embargo ninguna perturbación, aún cuando demore mucho tiempo en desaparecer, es permanente.

De acuerdo a la ecuación (2.8), se puede ver que todas las variables de estado revierten a cero. Esto implica que el logaritmo del precio spot revierte en todo instante a un precio promedio de largo plazo dado por d .

El modelo reducido de la proposición 2.1 no es la única representación posible, aún cuando contenga el mínimo número de parámetros. Una representación alternativa del precio spot, que es la presentada por Dai y Singleton (2000), se entrega en el siguiente corolario. Sin embargo, a diferencia del trabajo presentado por los autores citados anteriormente, la deducción del corolario que se presenta a continuación explicita todas las transformaciones necesarias para obtener la representación canónica de un modelo general.

Ciertamente, esta representación sigue siendo válida en el caso que algunos de los valores propios de la matriz de reversión sean iguales, aunque se requiere que sean reales. En un modelo general lognormal de precios, la matriz de reversión podría llegar a tener valor propios complejos conjugados. Por esto cuando se trabaja bajo la representación canónica automáticamente se prohíbe este tipo de casos.

Corolario 2.1: Representación Canónica de Dai y Singleton (2000)

Bajo el modelo estocástico de N factores definido para el precio spot de un commodity por las ecuaciones (2.3) y (2.4), si se cumple que la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ tiene todos sus valores propios distintos y estrictamente positivos, entonces el modelo para el precio spot puede ser reducido a:

$$Y_t = \mathbf{h}' \mathbf{x}_t + d \quad (2.9)$$

$$d\mathbf{x}_t = -\mathbf{A}\mathbf{x}_t dt + d\mathbf{w}_t \quad (2.10)$$

donde¹⁷

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{21} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \quad \Theta dt = d\mathbf{w}_t d\mathbf{w}_t' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} dt$$

■

Aún cuando cualquier representación del modelo es válida, se mostrará en la próxima sección que la presentada en la proposición 2.1 es más adecuada para calcular de manera fácil los momentos de la distribución del precio spot en forma explícita. Por lo demás, se verá también que dicha representación entrega fórmulas bastante simples para el precio de contratos futuros cuando se hacen suposiciones adecuadas acerca del precio de mercado del riesgo de las variables de estado.

La representación canónica de procesos del precio spot cuando el vector de estados tiene una raíz unitaria, o sea, que algún valor propio de la matriz de reversión $\tilde{\mathbf{A}}$ definida en (2.4) es igual a cero, se analiza en la siguiente proposición.

¹⁷ Esto muestra que los incrementos $d\mathbf{w}_t$ no están correlacionados y por lo tanto son independientes. La dependencia, sin embargo, viene dada por los términos fuera de la diagonal de la matriz de reversión.

La diferencia con el caso de un vector de estados estacionario se manifiesta en que ya no existe un nivel constante o una tendencia de largo plazo, a la cual revierten los precios.

Proposición 2.2

Bajo el modelo estocástico de N factores definido para el precio spot de un commodity por las ecuaciones (2.3) y (2.4), si la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ tiene 1 valor propio igual a cero, entonces el modelo para el precio spot puede ser reducido a:

$$Y_t = \mathbf{1}' \mathbf{x}_t \quad (2.11)$$

$$d\mathbf{x}_t = (-\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b})dt + \Sigma d\mathbf{w}_t \quad (2.12)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

$$\Theta dt = d\mathbf{w}_t d\mathbf{w}_t' \quad \Theta = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

■

El siguiente corolario muestra cómo se puede representar el proceso del precio spot con raíz unitaria de manera de eliminar el drift de la primera variable de estado incorporándolo en la ecuación (2.11).

Corolario 2.2

Bajo el modelo estocástico de N factores definido para el precio spot de un commodity por las ecuaciones (2.3) y (2.4), si la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ tiene 1 valor propio igual a cero, entonces el modelo para el precio spot puede ser reducido a:

$$Y_t = \mathbf{1}'\mathbf{x}_t + \mu t \quad (2.13)$$

$$d\mathbf{x}_t = -\mathbf{A}\mathbf{x}_t dt + \Sigma d\mathbf{w}_t \quad (2.14)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

$$\Theta dt = d\mathbf{w}_t d\mathbf{w}_t' \quad \Theta = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

■

Se puede ver que ahora el proceso para el precio spot depende del tiempo, dependencia que estaba implícita en la representación de la proposición 2.2. En este caso no existe una tendencia de largo plazo a la cual los precios reversionen ya que cualquier perturbación en la variable de estado $x_1(t)$ es permanente. Este hecho será analizado en la Sección 2.5.

2.4 Momentos de la Distribución del Modelo Lognormal cuando el Vector de Estados es Estacionario

En la Sección 2.1 sólo se entregó una descripción cualitativa de la distribución de probabilidades del vector de estados y del precio spot del commodity. En esta sección se calcula explícitamente la distribución de probabilidades del modelo de precios definido en la sección anterior cuando el vector de estados es estacionario. Para todos los análisis de esta sección, se considera la representación canónica del modelo de precios dada por la proposición 2.1:

$$Y_t = \mathbf{1}'\mathbf{x}_t + d \quad (2.15)$$

$$d\mathbf{x}_t = -\mathbf{A}\mathbf{x}_t dt + \Sigma d\mathbf{w}_t \quad (2.16)$$

donde $\mathbf{A} = \text{diag}(a_i)$ es una matriz diagonal tal que $a_i \neq 0$ y el vector de estados está definido por $\mathbf{x}_t = (x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_N(t))'$.

Sea $\mathbf{E}_t(\cdot)$ y $\mathbf{Cov}_t(\cdot)$ el valor esperado y la varianza-covarianza condicional a la información en el tiempo t . Como se demuestra en el Anexo B, los momentos condicionales del vector de estados son:

$$\mathbf{E}_t(x_i(T)) = e^{-a_i(T-t)} x_i(t) \quad i = 1, \dots, N \quad (2.17)$$

$$\mathbf{Cov}_t(x_i(T), x_j(T)) = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(a_i + a_j)(T-t)}}{a_i + a_j} \quad i, j = 1, \dots, N \quad (2.18)$$

donde $\mathbf{E}_t(x_i(T))$ es el elemento i del vector $\mathbf{E}_t(\mathbf{x}_T)$ y $\mathbf{Cov}_t(x_i(T), x_j(T))$ es el elemento (i, j) de la matriz de varianza-covarianza $\mathbf{Cov}_t(\mathbf{x}_T)$.

De las ecuaciones (2.17) y (2.18) se puede ver que el vector de estados sigue un proceso estacionario. Si hasta el tiempo t este vector ha seguido una cierta trayectoria debido a una infinidad de pequeñas perturbaciones, y se encuentra en un nivel dado por \mathbf{x}_t , el valor esperado de largo plazo no depende del nivel actual. O sea, las perturbaciones son transitorias y se espera que siempre el vector de estados vuelva a su media de largo plazo que en este caso es $\mathbf{0}$. Formalmente se tiene que:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_t(x_i(T)) = 0 \quad (2.19)$$

Además, dado que el nivel de equilibrio del vector de estados es constante, se espera que la incertidumbre acerca de este vector en el largo plazo no aumente indefinidamente. Esto se traduce en que la matriz de varianza-covarianza del vector de estados converge a una matriz constante independiente del valor actual de \mathbf{x}_t :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \mathbf{Cov}_t(x_i(T), x_j(T)) = \frac{\sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}{a_i + a_j} \quad (2.20)$$

A su vez, Y_t distribuye normal con media y varianza dadas por:

$$E_t(Y_T) = \sum_{i=1}^N e^{-a_i(T-t)} x_i(t) + d \quad (2.21)$$

$$V_t(Y_T) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(a_i + a_j)(T-t)}}{a_i + a_j} \quad (2.22)$$

Nótese que el precio spot está dado por $S_t = e^{Y_t}$, y su valor esperado condicional es:

$$\begin{aligned} E_t(S_T) &= \exp(E_t(Y_T) + \frac{1}{2} V_t(Y_T)) \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^N e^{-a_i(T-t)} x_i(t) + d + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(a_i + a_j)(T-t)}}{a_i + a_j}\right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Se puede ver entonces a partir de los momentos calculados en (2.21) y (2.22) que el modelo definido por las ecuaciones (2.15) y (2.16) es estacionario para Y_t . Cualquier perturbación en el vector de estados es absorbida en el largo plazo y el logaritmo del precio spot revierte siempre a una media dada por:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} E_t(Y_T) = d \quad (2.24)$$

cuya varianza en estado estacionario se mantiene constante:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} V_t(Y_T) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}{a_i + a_j} \quad (2.25)$$

El valor esperado del precio spot de largo plazo también es constante:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} E_t(S_T) = \exp\left(d + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}{a_i + a_j}\right) \quad (2.26)$$

2.5 Momentos de la Distribución del Modelo Lognormal cuando el Vector de Estados es No-Estacionario

De acuerdo al corolario 2.2, si la matriz \mathbf{A} definida en (2.4) tiene alguno de sus valores propios igual a cero, entonces el modelo de precios es:

$$Y_t = \mathbf{1}' \mathbf{x}_t + \mu t \quad (2.27)$$

$$d\mathbf{x}_t = -\mathbf{A}\mathbf{x}_t dt + \Sigma d\mathbf{w}_t \quad (2.28)$$

donde $\mathbf{A} = \text{diag}(a_i)$ es una matriz diagonal tal que $a_1 = 0$ y $\mathbf{x}_t = (x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_N(t))'$. Como se demuestra en el Anexo B, los momentos condicionales del vector de estados en este caso son:

$$E_t(x_i(T)) = \begin{cases} x_1(t) & i = 1 \\ e^{-a_i(T-t)} x_i(t) & i = 2, \dots, N \end{cases} \quad (2.29)$$

$$\text{Cov}_t(x_i(T), x_j(T)) = \begin{cases} \sigma_1^2(T-t) & i = 1, j = 1 \\ \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(a_i + a_j)(T-t)}}{a_i + a_j} & i \neq 1, j \neq 1 \end{cases} \quad (2.30)$$

donde $E_t(x_i(T))$ es el elemento i del vector $\mathbf{E}_t(\mathbf{x}_T)$ y $\text{Cov}_t(x_i(T), x_j(T))$ es el elemento (i, j) de la matriz de varianza-covarianza $\mathbf{Cov}_t(\mathbf{x}_T)$.

De las ecuaciones (2.29) y (2.30) se puede ver que el vector de estados sigue un proceso no-estacionario. Cualquier perturbación en el tiempo t , que queda manifestada por el valor que tenga el vector de estados \mathbf{x}_t en ese momento, influye y modifica de manera permanente su comportamiento de largo plazo. Formalmente:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} E_t(x_i(T)) = \begin{cases} x_1(t) & i = 1 \\ 0 & i = 2, \dots, N \end{cases} \quad (2.31)$$

Esto tiene consecuencias importantes para la varianza del vector de estados en el largo plazo. Como las perturbaciones que van ocurriendo a lo largo del tiempo modifican de manera permanente el comportamiento futuro de la primera

variable del vector de estados, la incertidumbre acerca del valor esperado que tendrá este vector en el largo plazo, condicional en la información conocida a un cierto momento, también aumenta. La varianza del vector de estados en el largo plazo está entonces dada por:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \text{Cov}_t(x_i(T), x_j(T)) = \begin{cases} +\infty & i = 1, j = 1 \\ \frac{\sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}{a_i + a_j} & i \neq 1, j \neq 1 \end{cases} \quad (2.32)$$

De este análisis se desprende que Y_t distribuye normal con media y varianza dadas por:

$$E_t(Y_T) = x_1(t) + \sum_{i=2}^N e^{-a_i(T-t)} x_i(t) + \mu T \quad (2.33)$$

$$V_t(Y_T) = \sigma_1^2(T-t) + \sum_{i,j \neq 1}^N \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(a_i+a_j)(T-t)}}{a_i + a_j} \quad (2.34)$$

y el valor esperado del precio spot es:

$$E_t(S_T) = \exp(x_1(t) + \sum_{i=2}^N e^{-a_i(T-t)} x_i(t) + \mu T) \left(\frac{1}{2} \sigma_1^2(T-t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(a_i+a_j)(T-t)}}{a_i + a_j} \right) \quad (2.35)$$

2.6 Clasificación de Modelos de Precios

De acuerdo a los resultados presentados anteriormente para procesos estacionarios y no-estacionarios del vector de estados, se pueden clasificar los modelos estudiados en 2 clases distintas:

Modelo Estacionario (Modelo I):

$$Y_t = \mathbf{1}' \mathbf{x}_t + d \quad (2.36)$$

$$d\mathbf{x}_t = -\mathbf{A}\mathbf{x}_t dt + \Sigma d\mathbf{w}_t \quad (2.37)$$

donde $\mathbf{A} = \text{diag}(a_i)$ y todos sus elementos son estrictamente mayores que cero.

Modelo No-Estacionario con Raíz Unitaria (Modelo II):

$$Y_t = \mathbf{1}'\mathbf{x}_t + \mu t \quad (2.38)$$

$$d\mathbf{x}_t = -\mathbf{A}\mathbf{x}_t dt + \Sigma d\mathbf{w}_t \quad (2.39)$$

donde $\mathbf{A} = \text{diag}(a_i)$, $a_1 = 0$ y los demás elementos son estrictamente mayores que cero.

Una de las ventajas de esta clasificación de los modelos de precios es que existe una jerarquía de generalización en cuanto algunos modelos más simples se obtienen restringiendo los parámetros de otros modelos más complicados. Esto se conoce en la literatura econométrica como conjuntos de modelos que están anidados unos dentro de los otros.

Por ejemplo, considérese un modelo estacionario de 2 factores dado por las ecuaciones:

$$Y_t = x_1(t) + x_2(t) + d \quad (2.40)$$

$$dx_1 = -a_1 x_1 dt + \sigma_1 dw_1 \quad (2.41)$$

$$dx_2 = -a_2 x_2 dt + \sigma_2 dw_2 \quad (2.42)$$

$$\text{donde } (dw_1)(dw_2) = \rho_{21} dt .$$

De las ecuaciones (2.17) y (2.18), se tiene que los momentos de las variables de estado están dados por:

$$E_t(x_1(T)) = e^{-a_1(T-t)} x_1(t) \quad (2.43)$$

$$E_t(x_2(T)) = e^{-a_2(T-t)} x_2(t) \quad (2.44)$$

$$\text{Var}_t(x_1(T)) = \sigma_1^2 \frac{1 - e^{-2a_1(T-t)}}{2a_1} \quad (2.45)$$

$$\text{Var}_t(x_2(T)) = \sigma_2^2 \frac{1 - e^{-2a_2(T-t)}}{2a_2} \quad (2.46)$$

$$\text{Cov}_t(x_1(T), x_2(T)) = \sigma_1 \sigma_2 \rho_{21} \frac{1 - e^{-(a_1+a_2)(T-t)}}{a_2 + a_2} \quad (2.47)$$

Si $a_2 \rightarrow +\infty$ y $\sigma_2 \rightarrow 0$, entonces los momentos de la segunda variable de estado son:

$$E_t(x_2(T)) = 0 \quad (2.48)$$

$$\text{Var}_t(x_2(T)) = 0 \quad (2.49)$$

$$\text{Cov}_t(x_1(T), x_2(T)) = 0 \quad (2.50)$$

Por lo tanto, se puede ver que la segunda variable de estado en este caso extremo desaparece ya que es siempre igual a cero. El modelo de 2 factores quedó reducido a un modelo de sólo 1 factor. El parámetro de correlación ρ_{21} puede tomar cualquier valor sin afectar en este caso el comportamiento del precio spot. El hecho que el modelo de 1 factor esté anidado en el modelo de 2 factores tiene implicancias importantes desde un punto de vista estadístico. En general, un modelo estacionario de $N-1$ factores estará anidado dentro de un modelo estacionario de N factores. El mismo fenómeno ocurre para los modelos no-estacionarios. Si se realizan tests de restricción de parámetros se puede determinar si la inclusión de un factor adicional es significativa.

Por lo general los tests de restricción de parámetros consideran la hipótesis nula que ciertos parámetros son iguales a cero. Para evitar el problema de testear que la restricción es $a_2 \rightarrow +\infty$, sólo basta con realizar el cambio de variable $a_2 = 1/\tilde{a}_2$. El hecho de utilizar el parámetro a_2 o \tilde{a}_2 no produce ninguna diferencia. Sin embargo, si $a_2 \rightarrow +\infty$ entonces $\tilde{a}_2 \rightarrow 0$, lo que permite realizar los tests estadísticos en su forma habitual.

Además, se tiene que para un mismo número de factores, el modelo no-estacionario está anidado dentro del modelo estacionario. Esto se debe a que el modelo no-estacionario restringe el parámetro de reversión de la primera variable de

estado a cero. Por lo tanto, se pueden también realizar tests de significancia estadística, bajo la hipótesis nula que el modelo es no-estacionario, de que exista la posibilidad que el modelo de precios sea estacionario.

Para terminar esta sección, cabe mencionar que en la introducción de este capítulo se indicó que los modelos presentados en esta tesis incorporan como casos particulares algunos de los modelos de precios más conocidos de la literatura de commodities. La presentación de la relación explícita existente entre los modelos de precios canónicos y los propuestos en la literatura se postergará sin embargo para la sección 3.7. Esto se debe a que algunos de los modelos estudiados en la literatura se plantean bajo la medida de probabilidad ajustada por riesgo, que será estudiada con más detalle en el próximo capítulo.

III DINÁMICA AJUSTADA POR RIESGO Y VALORIZACIÓN DE CONTRATOS FUTUROS

Como se mencionó en la introducción, la calibración de los modelos de precios presentados en esta tesis se hará utilizando los precios de los contratos futuros que se transan en los mercados financieros. Por lo tanto, uno de los objetivos principales de este capítulo es calcular fórmulas explícitas de valorización de contratos futuros escritos sobre un commodity cuando el precio spot sigue un proceso lognormal, como fue analizado en el Capítulo 2.

Un contrato futuro es un tipo particular de instrumento derivado. En su forma más simple, un derivado es un instrumento financiero cuyo pago depende del valor que tome otro activo al vencimiento¹⁸. Esto implica que existirá una relación directa entre el precio del derivado y del activo al cual está ligado. La valorización de instrumentos derivados es en la actualidad un área de activa investigación en la cual se han realizados importantes avances desde la aparición del trabajo seminal de Black y Scholes (1973).

La valorización moderna de instrumentos derivados está basada en el concepto que en equilibrio no deben existir oportunidades de arbitraje. Este enfoque permitió a Black y Scholes (1973) encontrar el valor de una opción escrita sobre una acción y desde entonces ha sido la base de todos los desarrollos posteriores en el área de valorización de instrumentos derivados.

Bajo ciertas condiciones de regularidad, la ausencia de oportunidades de arbitraje implica que el valor de cualquier activo se puede calcular como el valor esperado de sus flujos bajo una medida de probabilidad equivalente, descontados a la tasa de interés libre de riesgo. A esta medida de probabilidad por lo general se le llama medida ajustada por riesgo, medida neutral al riesgo o medida de la martingala equivalente. Para ajustar por riesgo un proceso estocástico gobernado por una

¹⁸ Existen derivados más complejos que dependen de la trayectoria que haya seguido el precio del activo subyacente durante la vida del contrato.

ecuación diferencial estocástica, sólo basta con ajustar el drift o tendencia del proceso. El ajuste del drift del proceso se realiza a través de una variable llamada precio de mercado del riesgo.

En este capítulo se entrega además una breve introducción acerca de las características principales de los contratos futuros y se discuten las suposiciones utilizadas en esta tesis acerca de la forma que toma el precio de mercado del riesgo. Otro tópico de interés analizado en este capítulo es la estructura de volatilidad de los retornos de los contratos futuros, que puede ser relevante al momento de valorizar otros instrumentos derivados como son las opciones escritas sobre futuros. Finalmente, se discute acerca de las relaciones existentes entre los modelos estudiados en esta tesis y otros modelos que han sido presentados en la literatura.

3.1 Nociones Básicas

Antes de estudiar las características de un contrato futuro es conveniente analizar el contrato forward, que es otro tipo de contrato muy similar al contrato futuro pero que es más simple de entender. Un forward es un contrato entre dos partes que fija el precio al cual se va a transar un activo (financiero o real) en una fecha futura predeterminada. El activo sobre el cual está escrito el forward se llama activo subyacente y la fecha futura a la cual se comprometen las partes a transar el activo se llama el vencimiento, madurez o plazo del contrato. La parte que se compromete a comprar el activo subyacente se dice que tiene una posición larga en el forward, mientras que la contraparte que se compromete a vender este activo se dice que tiene una posición corta.

En este tipo de contratos no se realiza ninguna transferencia de fondos hasta el vencimiento. Ninguna de las partes paga un precio inicial por entrar en el contrato. Este hecho introduce una incertidumbre adicional en cuanto a que ambas partes están expuestas al riesgo que la contraparte pueda no disponer de los fondos necesarios para pagar lo que corresponda al vencimiento del forward. Este tipo de

contratos se realiza privadamente entre las partes involucradas en lo que se denomina el mercado OTC¹⁹.

Un contrato futuro es muy similar a un contrato forward ya que también fija hoy el precio al cual se va a transar el activo subyacente al vencimiento. Sin embargo, en un contrato futuro las pérdidas o ganancias que se generen se pagan o se reciben diariamente durante la vida del contrato. Estos contratos se transan en bolsas de comercio y es responsabilidad de la bolsa garantizar que los pagos se realicen oportunamente. Para esto, cada parte que entra en un contrato futuro debe depositar un margen inicial de manera de garantizar la disponibilidad de fondos en caso que se originen pérdidas. Este margen se debe mantener por sobre un mínimo establecido por la bolsa de comercio respectiva, para cada uno de los activos sobre los cuales existen contratos futuros.

Cox, Ingersoll y Ross (1981) demostraron que cuando las tasas de interés no son estocásticas o no tienen correlación con el activo subyacente, los precios de un forward y un futuro son iguales. Sin embargo, cuando se consideran tasas de interés estocásticas y correlacionadas con el activo subyacente, los precios de ambos contratos difieren.

Independiente de si las tasas de interés son estocásticas o no, al vencimiento siempre se debe tener que el precio de un forward es igual a un futuro, si las condiciones de entrega del activo subyacente son las mismas. El precio de un contrato futuro a punto de vencer se llamará precio spot del activo subyacente.

El spot es entonces el precio que tendría el activo subyacente para entrega inmediata bajo los términos del contrato futuro. En el caso de commodities físicos, como por ejemplo petróleo o cobre, el precio spot puede ser distinto al precio contado dado que por lo general en un contrato futuro se especifican sólo algunos lugares específicos de entrega del commodity. En el caso de commodities financieros

¹⁹ OTC es la sigla de "Over-the-Counter".

como son las monedas, este problema es menor ya que no existen costos asociados de transporte del commodity pero sólo pequeñas comisiones por transferencia de fondos.

Un análisis más detallado de las características de los contratos futuros se puede encontrar en Hull (1999) y en Duffie (1989).

3.2 Valorización Teórica de un Contrato Futuro

Sea $F(S_t, t, T)$ el precio de un contrato futuro en la fecha t con vencimiento en la fecha T . La madurez del contrato es entonces $\tau = T - t$. Como se demuestra en Cox, Ingersoll y Ross (1981), el precio de este contrato futuro es simplemente el valor esperado del precio spot en T bajo la medida de probabilidad ajustada por riesgo. Formalmente, se tiene que:

$$F(S_t, t, T) = E_t^Q(S_T) \quad (3.1)$$

donde $E_t^Q(\cdot)$ representa el valor esperado bajo la probabilidad ajustada por riesgo Q , que es una medida de probabilidad artificial que se obtiene ajustando la media de las variables estocásticas que caracterizan a una economía. Este ajuste se realiza a través de ciertas variables llamadas precios de mercado del riesgo que se definen en la Sección 3.3. La introducción de esta metodología de valorización de instrumentos derivados ha sido un gran avance teórico.

En este trabajo asumiremos la existencia y unicidad de dicha medida de probabilidad. Para una discusión acerca de las condiciones bajo las cuales existe esta medida de probabilidad y de cómo su existencia garantiza la ausencia de oportunidades de arbitraje en la economía se recomienda ver Duffie (2001). También se presentan discusiones muy interesantes sobre de la medida de probabilidad ajustada por riesgo para commodities en Gibson y Schwartz (1990) y Brennan (1991).

3.3 Precio de Mercado del Riesgo

En su forma más general pero conservando la distribución normal de las variables de estado bajo la medida de probabilidad ajustada por riesgo, el vector de precios de mercado del riesgo se puede representar como se indica en Casassus y Collin-Dufresne (2001) por:

$$\lambda = \lambda_c + \Lambda \mathbf{x} \quad (3.2)$$

donde λ_c es un vector y Λ es una matriz de constantes²⁰ que relaciona el valor del precio de mercado del riesgo con el nivel de las variables de estado del modelo. Si la dinámica bajo la medida de probabilidad histórica está dada por:

$$d\mathbf{x}_t = -\mathbf{A}\mathbf{x}_t dt + \Sigma d\mathbf{w}_t \quad (3.3)$$

bajo la medida de probabilidad ajustada por riesgo será:

$$d\mathbf{x}_t = (-\lambda_c - \mathbf{A}^* \mathbf{x}_t) dt + \Sigma d\mathbf{w}_t^* \quad (3.4)$$

donde $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \Lambda$.

Nótese que bajo esta especificación del precio de mercado del riesgo, la dinámica del precio spot bajo la medida de probabilidad ajustada por riesgo es distinta a la dinámica bajo la medida histórica. En este sentido, si bajo la medida histórica la matriz de reversión \mathbf{A} tenía algún valor propio igual a cero, bajo la medida ajustada por riesgo esta matriz puede tener todos sus valores propios estrictamente mayores que cero y ser un proceso estacionario. Sin embargo, lo contrario también puede ocurrir. Si la matriz \mathbf{A} tiene sus valores propios estrictamente mayores que cero, el proceso ajustado por riesgo puede tener una raíz unitaria. De hecho, para una especificación general del precio de mercado del riesgo, si se supone que bajo la medida de probabilidad histórica los valores propios de la matriz de reversión son todos distintos, esto puede no cumplirse bajo la medida de probabilidad ajustada por riesgo.

Para efectos de simplificar la estimación de los modelos de precios, en esta tesis se supondrá que el precio de mercado del riesgo es constante e independiente del nivel de las variables de estado²¹:

²⁰ λ_c puede ser también función del tiempo para modelar, por ejemplo, el ciclo económico como se menciona en Schwartz (1997).

²¹ Como en Schwartz (1997) y Schwartz y Smith (2000).

$$\lambda = \lambda_c \quad (3.5)$$

Esta simplificación busca por un lado evitar los problemas mencionados anteriormente (y por lo tanto simplificar el problema de la estimación) y disminuir considerablemente el número de parámetros a estimar. Además, cuando se supone que el precio de mercado del riesgo es constante, lo que implica que la matriz de reversión \mathbf{A} es la misma tanto para el proceso histórico como para el ajustado por riesgo, se puede utilizar la información contenida en la estructura de término de los contratos futuros así como la información de las series de tiempo para estimar la matriz de reversión. Esto puede simplificar y robustecer de manera considerable la estimación como se menciona en Ball y Torous (1996).

Sin embargo, el análisis realizado permite extender sin problema los modelos para el precio spot de manera de incorporar una especificación más general del precio de mercado del riesgo, como se propone en Casassus y Collin-Dufresne (2001).

3.4 Valorización de Contratos Futuros para los Modelos Canónicos

Sea $F(\mathbf{x}_t, t, T)$ el precio de un futuro escrito en t y que vence en T dado un cierto valor del vector de estados \mathbf{x}_t y sea $\tau = T - t$ la madurez del contrato²². El valor de un futuro estará entonces dado por²³:

$$F(\mathbf{x}_t, t, T) = E_t^Q(S_T) = \exp\left(E_t^Q(Y_T) + \frac{1}{2}V_t^Q(Y_T)\right) \quad (3.6)$$

²² Lo común es suponer que un contrato futuro depende de su madurez y del precio spot vigente en ese momento. Sin embargo, esta dependencia está implícita en cuanto el contrato futuro depende del vector de estados, que especifica completamente al precio spot.

²³ Existe una forma alternativa de encontrar el precio de un contrato futuro que se basa en la resolución de una ecuación diferencial parcial. La equivalencia de ambos enfoques está garantizada por la fórmula de Feynman-Kac que se puede encontrar en Øksendal (1998) o Duffie (2001).

donde Q representa la medida de probabilidad neutral al riesgo. Como se demuestra en el Anexo C, la fórmula explícita de valorización para un futuro bajo cada uno de los modelos presentados anteriormente será:

Modelo Estacionario (Modelo I):

$$F(\mathbf{x}_t, t, T) = \exp \left(\sum_{i=1}^N e^{-a_i(T-t)} x_i(t) - \sum_{i=1}^N \frac{1 - e^{-a_i(T-t)}}{a_i} \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(a_i+a_j)(T-t)}}{a_i + a_j} + d \right) \quad (3.7)$$

Modelo No-Estacionario con Raíz Unitaria (Modelo II):

$$F(\mathbf{x}_t, t, T) = \exp \left(x_1(t) + \sum_{i=2}^N e^{-a_i(T-t)} x_i(t) + \mu t + (\mu - \lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2)(T-t) - \sum_{i=2}^N \frac{1 - e^{-a_i(T-t)}}{a_i} \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq 1} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(a_i+a_j)(T-t)}}{a_i + a_j} \right) \quad (3.8)$$

Se puede apreciar de las ecuaciones (3.7) y (3.8) que las fórmulas analíticas para un contrato futuro bajo el modelo canónico son muy simples aún cuando éste pueda tener muchos factores, a diferencia de otros modelos presentados en la literatura financiera.

Como una forma de ejemplificar estas formulas de valorización, considérese un modelo no-estacionario de 1 factor presentado en su forma clásica. En este modelo, el precio spot S_t bajo la medida de probabilidad histórica sigue el siguiente proceso:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \bar{\mu} dt + \sigma dw_t \quad (3.9)$$

y el proceso ajustado por riesgo es:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\bar{\mu} - \lambda) dt + \sigma dw_t \quad (3.10)$$

Si se define:

$$x(t) = \log(S_t) - \left(\bar{\mu} - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t = \log(S_t) - \mu t \quad (3.11)$$

donde $\mu = \bar{\mu} - \frac{1}{2}\sigma^2$, aplicando el lema de Ito este proceso se puede representar bajo la medida de probabilidad ajustada por riesgo como:

$$dx(t) = \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2}\left(\frac{dS_t}{S_t}\right)^2 - \mu dt = -\lambda dt + \sigma dw_t \quad (3.12)$$

Luego, a partir de la ecuación (3.8), se tiene que el precio de un futuro bajo este modelo es:

$$F(x(t), t, T) = \exp\left(x(t) + \mu t + \left(\mu - \lambda + \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)(T-t)\right) \quad (3.13)$$

y como $S_t = \exp(x(t) + \mu t)$ y $\bar{\mu} = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$, se obtiene finalmente:

$$F(S_t, t, T) = S_t e^{(\bar{\mu} - \lambda)(T-t)} \quad (3.14)$$

Esta es la fórmula tradicional de valorización de un futuro cuando el precio spot sigue un proceso browniano geométrico.

3.5 Estructura de Volatilidad de los Contratos Futuros

En conjunto a la estructura de precios futuros calculada en la sección anterior, es de interés determinar la estructura de volatilidad de los contratos futuros. Por estructura de volatilidad se entenderá la volatilidad instantánea de los retornos de los contratos futuros para cada uno de los vencimientos. Como se muestra en el Anexo C, la estructura de volatilidad para cada uno de los modelos presentados será la siguiente:

Modelo I:

$$\sigma_F^2(t, T) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} e^{-(a_i + a_j)(T-t)} \quad (3.15)$$

Modelo II:

$$\sigma_F^2(t, T) = \sigma_1^2 + \sum_{i, j \neq 1} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} e^{-(a_i + a_j)(T-t)} \quad (3.16)$$

Una propiedad del modelo estacionario es que la volatilidad instantánea de los retornos de un futuro de muy largo plazo converge a cero mientras que en el modelo no-estacionario, esta volatilidad converge a un valor constante dado por la volatilidad instantánea de $x_1(t)$:

$$\sigma_F^2(t, \infty) = \sigma_1^2 \quad (3.17)$$

Estos resultados son consistentes con la naturaleza estadística de ambos modelos, ya que el primero tiene un vector de estados ajustado por riesgo estacionario y por lo tanto el valor esperado de muy largo plazo, condicional en la información conocida hasta un cierto instante de tiempo, es constante. Para el caso del modelo no-estacionario, toda la incertidumbre recae sobre la variable de estado $x_1(t)$ que no revierte a ninguna media de largo plazo. Por lo tanto, la volatilidad instantánea de los futuros de largo plazo debe converger a un valor constante dado por la volatilidad de $x_1(t)$.

Este hecho puede tener implicancias significativas al momento de valorizar opciones sobre contratos futuros así como proyectos de inversión dentro del marco de las opciones reales, cuando los plazos considerados son muy lejanos.

3.6 Retorno por Conveniencia de un Commodity

Para poder entender algunos de los modelos que se han presentado en la literatura²⁴ y que se analizan en la sección 3.7, es conveniente analizar primero el

²⁴ Como el de Gibson y Schwartz (1990).

concepto de retorno por conveniencia, que se define como el flujo de servicios que recibe el dueño de un inventario físico del commodity pero no el tenedor de un contrato futuro.

Este retorno tiene su origen en la teoría del almacenamiento. El poseedor de un inventario físico del commodity puede elegir donde almacenarlo y cuando vender o liquidar el inventario. El retorno por conveniencia se genera pues de la reducción de costos de adquirir el inventario (dado que existe un retraso en encargar el commodity y un costo de transporte de llevarlo de un lugar a otro) y por el valor generado en aprovechar una escasez local del commodity manteniendo un gran inventario (se pueden aprovechar fluctuaciones de precios locales o mantener un proceso productivo aún cuando haya una escasez de materia prima). Para un tratamiento más exhaustivo del tema se recomienda ver Brennan (1991) y las referencias citadas al interior de dicho artículo.

En los modelos tradicionales de valorización de contratos futuros, el retorno por conveniencia es un concepto que emerge naturalmente. Se puede demostrar que la ausencia de oportunidades de arbitraje en una economía implica que el retorno instantáneo del precio de un commodity, bajo la medida de probabilidad ajustada por riesgo, debe ser igual a:

$$dS_t = (r_t - \delta_t)S_t dt + \sigma_s S_t dv_t^* \quad (3.18)$$

donde δ_t es el retorno por conveniencia y r_t es la tasa de interés libre de riesgo de corto plazo.

El retorno instantáneo de un commodity bajo la ley de probabilidad ajustada por riesgo, está determinado pues por la diferencia entre el costo de oportunidad de almacenar el commodity (la tasa de interés libre de riesgo r_t) y los beneficios netos de poseer un inventario del commodity (el retorno por conveniencia δ_t). La diferencia $r_t - \delta_t$ es lo que tradicionalmente se llama en la literatura como “cost-of-carry” del commodity.

Sin embargo, nótese de la ecuación (3.18) que lo relevante para modelar la dinámica del precio spot ajustado por riesgo es la diferencia $r_t - \delta_t$ entre la tasa de

interés de corto plazo y el retorno por conveniencia. Luego, no es necesario modelar y conocer independientemente ambas variables para modelar el precio spot y determinar la estructura de vencimiento de los contratos futuros, sino que sólo bastaría modelar la diferencia existente entre ellas.

3.7 Relación de la Representación Canónica con algunos de los Modelos de Precios Presentados en la Literatura

En esta sección se presenta una revisión bibliográfica de algunos de los modelos más importantes de precios de commodities que han sido propuestos en la literatura y se muestra cómo se pueden representar de manera canónica. Esto permitirá, entre otras cosas, ejemplificar el uso de los modelos canónicos que se han propuesto en esta tesis.

3.7.1 Modelos de 1 Factor Estocástico

a) Modelo de Brennan y Schwartz (1985)

Uno de los modelos más simples que se han estudiado para representar la dinámica del precio spot de un commodity es el de Brennan y Schwartz (1985)²⁵. En dicho artículo los autores suponen que el precio spot S_t de un commodity sigue un proceso browniano geométrico:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dw_t \quad (3.19)$$

En este modelo, el precio spot de un commodity entrega una tasa esperada de rentabilidad neta μ , la que estaría determinada por la oferta y la demanda del commodity en un mercado competitivo.

Aplicando el lema de Ito a $Y_t = \log S_t$, el proceso (3.19) se puede representar en términos de la proposición 2.2 de la siguiente manera:

²⁵ Este modelo ha sido frecuentemente utilizado en la literatura de opciones reales debido a su simpleza, como por ejemplo en Cortazar y Schwartz (1993), Cortazar, Schwartz y Löwener (1998) y Cortazar y Casassus (2000).

$$Y_t = x_t \quad (3.20)$$

$$dx_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dw_t \quad (3.21)$$

Es claro pues que este modelo del precio spot es no-estacionario debido a la raíz unitaria característica del movimiento browniano geométrico.

Como muestran los autores, el proceso ajustado por riesgo del precio spot debe ser entonces:

$$dS_t = (r - \delta)S_t dt + \sigma S_t dw_t \quad (3.22)$$

donde δ es el retorno por conveniencia del commodity y r es la tasa de interés libre de riesgo de corto plazo, que se asumen constantes. El retorno ajustado por riesgo es entonces igual al retorno de un activo libre de riesgo, que representa el costo de oportunidad de poseer físicamente un inventario del commodity, por sobre los beneficios obtenidos al poseer el inventario, que están representados por el retorno por conveniencia²⁶. La ecuación (3.22) también se puede representar en forma logarítmica:

$$Y_t = x_t \quad (3.23)$$

$$dx_t = \left(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dw_t \quad (3.24)$$

Nótese que en este caso se cumple que $r - \delta = \mu - \lambda$, donde λ es el precio de mercado del riesgo del commodity.

Un punto interesante a notar es que no es posible determinar δ y r solamente a partir del precio de un contrato futuro, ya que sólo se puede determinar

²⁶ Este retorno es equivalente a los dividendos de una acción en el caso que ésta fuera el activo subyacente.

la diferencia $r - \delta$. Dado un valor de r , siempre existe un valor adecuado de δ tal que $r - \delta$ se mantiene constante.

Se debe pues especificar r exógenamente para poder encontrar δ , como por ejemplo a partir de un bono de corto plazo. Sin embargo, si el interés apunta a determinar la estructura de los precios de los contratos futuros, sólo se necesita estimar la diferencia $r - \delta = \mu - \lambda$.

b) Modelo de Schwartz (1997)²⁷

Otro modelo de 1 factor, que presenta Schwartz (1997), es un proceso con reversión a la media del tipo Ornstein-Uhlenbeck:

$$Y_t = x_t \quad (3.25)$$

$$dx_t = \kappa(\alpha - x_t)dt + \sigma dw_t \quad (3.26)$$

Como este modelo es estacionario, se puede representar como se indica en la proposición 2.1 de la siguiente manera:

$$Y_t = x_t + \alpha \quad (3.27)$$

$$dx_t = -\kappa x_t dt + \sigma dw_t \quad (3.28)$$

El proceso ajustado por riesgo del precio spot es entonces:

$$Y_t = x_t + \alpha \quad (3.29)$$

$$dx_t = (-\lambda - \kappa x_t)dt + \sigma dw_t \quad (3.30)$$

De las ecuaciones (3.24) y (3.30), se ve que este modelo supone que la diferencia entre la tasa de interés de corto plazo y el retorno por conveniencia depende del logaritmo del precio spot:

²⁷ Este es el modelo 1 que presenta Schwartz (1997).

$$r_t - \delta_t - \frac{1}{2}\sigma^2 = -\lambda - \kappa x_t = -\lambda - \kappa \log S_t \quad (3.31)$$

Si se asume pues que la tasa de interés es constante, entonces el retorno por conveniencia depende positivamente del precio spot. Esto tiene una interpretación económica ya que si los inventarios del commodity en la economía están bajos, significa que la oferta será menor y por lo tanto los precios debieran ser más altos. Pero también el retorno por conveniencia del commodity debiera ser alto, ya que quién necesite mantener un proceso productivo en ese momento valorizará más cada unidad de inventario que posea²⁸.

3.7.2 Modelos de 2 Factores Estocásticos

a) Modelo de Schwartz y Smith (2000)

Este modelo supone que la dinámica del precio spot puede ser representada por 2 factores estocásticos caracterizado por las siguientes ecuaciones:

$$Y_t = \xi(t) + \chi(t) \quad (3.32)$$

$$d\xi_t = \mu_\xi dt + \sigma_\xi dW_\xi(t) \quad (3.33)$$

$$d\chi_t = -\kappa\chi_t dt + \sigma_\chi dW_\chi(t) \quad (3.34)$$

El primer factor $\xi(t)$ representa el nivel de equilibrio del precio spot, que crece a una tasa esperada de largo plazo dada por μ_ξ . Las variaciones de esta variable de estado representan cambios que se espera que persistan en el tiempo. Por sobre este nivel de equilibrio, se introduce un segundo factor $\chi(t)$ que representa perturbaciones de corto plazo, que se espera que no persistan en el tiempo. Para modelar este fenómeno, la variable de estado $\chi(t)$ sigue un proceso estocástico con reversión a una media cero.

Este modelo se puede representar en forma matricial como:

²⁸ Ver Casassus y Collin-Dufresne (2001) y las referencias citadas en ese artículo.

$$Y_t = \mathbf{h}' \mathbf{x}_t \quad (3.35)$$

$$d\mathbf{x}_t = (-\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b})dt + \Sigma d\mathbf{w}_t \quad (3.36)$$

$$\text{donde } \mathbf{h}' = (1 \ 1), \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mu_\xi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_\xi & 0 \\ 0 & \sigma_\chi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix},$$

$$d\mathbf{w}_t = \begin{pmatrix} dw_\xi(t) \\ dw_\chi(t) \end{pmatrix} \text{ y } (dw_\xi)(dw_\chi) = \rho_{\xi\chi} dt.$$

El proceso ajustado por riesgo es:

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbf{h}' \mathbf{x}_t \\ d\mathbf{x}_t &= (-\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \hat{\mathbf{b}})dt + \Sigma d\mathbf{w}_t \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\text{donde } \hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \mu_\xi - \lambda_\xi \\ -\lambda_\chi \end{pmatrix}.$$

El modelo de 2 factores de Schwartz y Smith (2000) se ajusta a la representación canónica dada por la proposición 2.2, que contiene el mínimo número de parámetros dentro de los modelos no-estacionarios. Es por lo tanto un caso particular de un modelo no-estacionario, ya que sólo considera 2 factores estocásticos.

b) Modelo de Gibson y Schwartz (1990)

Uno de los modelos de 2 factores estocásticos para precios de commodities más conocidos es el de Gibson y Schwartz (1990), que es anterior al propuesto por Schwartz y Smith (2000). Sin embargo, la motivación económica del modelo de Gibson y Schwartz (1990) es distinta a la presentada en Schwartz y Smith (2000), ya que el precio spot en el primer caso se caracteriza a partir del retorno por conveniencia introducido en la Sección 3.6.

Este modelo supone que el precio spot de un commodity sigue un proceso browniano geométrico como el presentado en la ecuación (3.19), pero se permite que el retorno por conveniencia del commodity siga un proceso con reversión a la media. El modelo propuesto por los autores es el siguiente:

$$dS_t = (\mu - \delta_t)S_t dt + \sigma_1 S_t dw_1(t) \quad (3.38)$$

$$d\delta_t = \kappa(\alpha - \delta_t)dt + \sigma_2 dw_2(t) \quad (3.39)$$

donde $(dw_1)(dw_2) = \rho dt$.

Aplicando el lema de Ito, este modelo es equivalente a:

$$Y_t = x_t \quad (3.40)$$

$$dx_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_1^2 - \delta_t\right)dt + \sigma_1 dw_1(t) \quad (3.41)$$

$$d\delta_t = \kappa(\alpha - \delta_t)dt + \sigma_2 dw_2(t) \quad (3.42)$$

Esto se puede representar matricialmente en el espacio de estados como:

$$Y_t = \mathbf{h}' \mathbf{x}_t \quad (3.43)$$

$$d\mathbf{x}_t = (-\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b})dt + \mathbf{\Sigma}d\mathbf{w}_t \quad (3.44)$$

$$\text{donde } \mathbf{h}' = (1 \ 0), \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mu - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \\ \kappa\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ \delta_t \end{pmatrix}, d\mathbf{w}_t = \begin{pmatrix} dw_1(t) \\ dw_2(t) \end{pmatrix} \text{ y } (dw_1)(dw_2) = \rho dt.$$

El proceso ajustado por riesgo es:

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbf{h}' \mathbf{x}_t \\ d\mathbf{x}_t &= (-\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \hat{\mathbf{b}})dt + \mathbf{\Sigma}d\mathbf{w}_t \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\text{donde } \hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} r - \delta_t - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \\ \kappa\alpha - \lambda \end{pmatrix}$$

Como es de esperarse, este modelo tiene una representación canónica. Schwartz y Smith (2000) demuestran que su modelo es equivalente al modelo de

Gibson y Schwartz (1990), dado que las variables de estado de cada modelo se pueden representar como combinaciones lineales de los factores del otro.

Un hecho que no plantean los autores explícitamente es el problema de la identificación de los parámetros del modelo. Aún cuando ambos modelos son equivalentes, en el modelo de Schwartz y Smith (2000) la dinámica del precio spot del commodity está representada por sólo 7 parámetros $\kappa, \mu_\xi, \sigma_\xi, \sigma_\chi, \rho_{\xi\chi}, \lambda_\xi, \lambda_\chi$ mientras que en el caso del modelo de Gibson y Schwartz (1990) el precio spot queda representado por 8 parámetros $\kappa, \alpha, \mu, \sigma_1, \sigma_2, \rho, r, \lambda$. Esto tiene implicancias importantes desde un punto de vista econométrico ya que no se pueden identificar todos los parámetros. La identificación de los parámetros es posible si por ejemplo, la tasa de interés libre de riesgo es fijada exógenamente. Sin embargo, este hecho no tendría implicancias en la valorización de un contrato futuro, ya que como se vio en la sección 3.6, lo relevante es la diferencia que existe entre la tasa de interés y el retorno por conveniencia.

La manera explícita en que estos dos modelos son equivalentes se puede encontrar en Schwartz y Smith (2000), donde los autores muestran como las variables de estado de cada modelo se pueden representar como combinaciones lineales de los factores del otro. Sin embargo, los autores no detallan el procedimiento que los lleva a plantear la relación lineal específica entre las variables de estado del modelo. La metodología desarrollada en el Anexo A permite encontrar la relación lineal entre las variables de ambos modelos a partir de un procedimiento general.

Como conclusión para los modelos de 2 factores estocásticos, ambos modelos recién presentados son interpretaciones equivalentes de un mismo modelo no estacionario de 2 factores para el precio spot del commodity. El modelo estacionario de 2 factores presentado en esta tesis extiende pues el análisis desarrollado hasta la fecha.

3.7.3 Modelos de 3 Factores Estocásticos

a) Modelo de Cortazar y Schwartz (2002)

Este modelo supone que el precio spot de un commodity se puede representar por 3 factores estocásticos caracterizados por las siguientes ecuaciones:

$$dS_t = (\mu_t - y_t)S_t dt + \sigma_1 S_t dw_1(t) \quad (3.46)$$

$$dy_t = -\kappa y_t dt + \sigma_2 dw_2(t) \quad (3.47)$$

$$d\mu_t = a(\bar{\mu} - \mu_t) dt + \sigma_3 dw_3(t) \quad (3.48)$$

donde $(dw_1)(dw_2) = \rho_{12} dt$, $(dw_2)(dw_3) = \rho_{23} dt$ y $(dw_1)(dw_3) = \rho_{13} dt$.

La motivación económica de este modelo es que se espera que en una economía competitiva, el precio spot del commodity obtenga un retorno esperado instantáneo μ_t que es estocástico, pero que a su vez esté afectado por perturbaciones de corto plazo que revierten a una media cero representadas por y_t . Se supone que el retorno instantáneo revierte a un retorno promedio de largo plazo dado por $\bar{\mu}$.

Este proceso se puede representar de forma logarítmica:

$$Y_t = x_t \quad (3.49)$$

$$dx_t = (\mu_t - y_t - \frac{1}{2}\sigma_1^2) dt + \sigma_1 dw_1(t) \quad (3.50)$$

$$dy_t = -\kappa y_t dt + \sigma_2 dw_2(t) \quad (3.51)$$

$$d\mu_t = a(\bar{\mu} - \mu_t) dt + \sigma_3 dw_3(t) \quad (3.52)$$

y a su vez en forma matricial como:

$$Y_t = \mathbf{h}' \mathbf{x}_t \quad (3.53)$$

$$d\mathbf{x}_t = (-\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b})dt + \mathbf{\Sigma}d\mathbf{w}_t \quad (3.54)$$

$$\text{donde } \mathbf{h}' = (1 \ 0 \ 0), \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1/2\sigma_1^2 \\ 0 \\ a\bar{\mu} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ \mu_t \end{pmatrix} \text{ y } d\mathbf{w}_t d\mathbf{w}_t' = \boldsymbol{\Theta} dt = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{31} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{23} & 1 \end{pmatrix} dt.$$

La matriz de reversión tiene un valor propio igual a cero y por lo tanto el modelo tiene una raíz unitaria. Aplicando paso a paso la metodología indicada en el Anexo A, este modelo se puede representar en su forma canónica aplicando la siguiente transformación invariante al vector de estados original \mathbf{x}_t :

$$\boldsymbol{\zeta}_t = \mathbf{L}\mathbf{x}_t + \boldsymbol{\varphi} \quad (3.55)$$

$$\text{donde } \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & -1/\kappa & 1/a \\ 0 & 0 & -1/a \\ 0 & 1/\kappa & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} -\bar{\mu}/\kappa + d - (\bar{\mu} - 1/2\sigma_1^2)t \\ \bar{\mu}/\kappa \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De esta forma, se obtiene que:

$$Y_t = \mathbf{1}'\boldsymbol{\varphi}_t + \left(\bar{\mu} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \right) t \quad (3.56)$$

$$d\boldsymbol{\varphi}_t = -\mathbf{K}\mathbf{x}_t dt + \boldsymbol{\Gamma} d\tilde{\mathbf{w}}_t \quad (3.57)$$

donde

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma}_3 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$d\tilde{\mathbf{w}}_t d\tilde{\mathbf{w}}_t' = \boldsymbol{\Psi} dt = \begin{pmatrix} 1 & \bar{\rho}_{12} & \bar{\rho}_{31} \\ \bar{\rho}_{12} & 1 & \bar{\rho}_{23} \\ \bar{\rho}_{31} & \bar{\rho}_{23} & 1 \end{pmatrix} dt.$$

Los parámetros de varianza-covarianza de la nueva representación están relacionados con los antiguos por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{\Gamma\Psi\Gamma} = \mathbf{L\Sigma\Theta\Sigma L'} \quad (3.58)$$

Asumiendo precios de mercado del riesgo constantes, el proceso ajustado por riesgo del modelo de Cortazar y Schwartz (2002) es:

$$Y_t = \mathbf{h}' \mathbf{x}_t \quad (3.59)$$

$$d\mathbf{x}_t = (-\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b} - \boldsymbol{\lambda})dt + \boldsymbol{\Sigma}d\mathbf{w}_t \quad (3.60)$$

Y el proceso ajustado por riesgo del modelo canónico es:

$$Y_t = \mathbf{1}'\boldsymbol{\varphi}_t + \left(\bar{\mu} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \right) t \quad (3.61)$$

$$d\boldsymbol{\varphi}_t = -(\bar{\boldsymbol{\lambda}} + \mathbf{K}\mathbf{x}_t)dt + \boldsymbol{\Gamma}d\tilde{\mathbf{w}}_t \quad (3.62)$$

La relación entre los precios de mercado del riesgo de ambos modelos está entonces dada por la siguiente ecuación:

$$\bar{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{L}\boldsymbol{\lambda} \quad (3.63)$$

A partir de las ecuaciones (3.56) y (3.57) se puede ver que el modelo recién presentado puede reinterpretarse bajo otra perspectiva. En efecto, se puede ver que el precio spot crece a una tasa esperada de largo plazo dada por $\bar{\mu}$, y que recibe perturbaciones a distintos plazos representadas por las variables de estado $\zeta_1(t)$, $\zeta_2(t)$ y $\zeta_3(t)$. Las perturbaciones caracterizadas por la variable $\zeta_1(t)$ son en realidad permanentes (de muy largo plazo) ya que no revierten a ninguna media. El modelo presentado por Cortazar y Schwartz (2002) es entonces un modelo no-estacionario de 3 factores.

b) Modelo de Schwartz (1997)

Otro modelo de 3 factores para el precio spot de un commodity es el que presenta Schwartz (1997) como su modelo 3. Este modelo extiende el de Gibson y

Schwartz (1990) al permitir un comportamiento estocástico de la tasa de interés. El proceso ajustado por riesgo que propone el autor es:

$$dS_t = (r_t - \delta_t)S_t dt + \sigma_1 S_t dw_1^*(t) \quad (3.64)$$

$$d\delta_t = \kappa(\hat{\alpha} - \delta_t)dt + \sigma_2 dw_2^*(t) \quad (3.65)$$

$$dr_t = a(m^* - r_t)dt + \sigma_3 dw_3^*(t) \quad (3.66)$$

donde $(dw_1^*)(dw_2^*) = \rho_1 dt$, $(dw_2^*)(dw_3^*) = \rho_2 dt$ y $(dw_1^*)(dw_3^*) = \rho_3 dt$.

Si uno asume precios de mercado del riesgo constantes, entonces el proceso histórico del precio spot también queda representado por un modelo de 3 factores:

$$dS_t = (\mu_t - \delta_t)S_t dt + \sigma_1 S_t dw_1(t) \quad (3.67)$$

$$d\delta_t = \kappa(\alpha - \delta_t)dt + \sigma_2 dw_2(t) \quad (3.68)$$

$$d\mu_t = a(m - \mu_t)dt + \sigma_3 dw_3(t) \quad (3.69)$$

donde $\mu_t = r_t + \lambda_1$, $\alpha = \hat{\alpha} + \frac{\lambda_2}{\kappa}$ y $m = m^* + \frac{\lambda_3}{a}$.

Este modelo se puede interpretar desde dos perspectivas distintas. La primera de ellas es considerar como dado un modelo ajustado por riesgo caracterizado por las ecuaciones (3.64), (3.66) y (3.65), en el cual se tiene una variable de estado que tiene un significado económico específico que en este caso es la tasa de interés. Bajo esta perspectiva, la estimación de la tasa de interés de corto plazo puede realizarse con instrumentos financieros que no dependen del precio del commodity como pueden ser bonos del tesoro norteamericano. Esto significa que la estimación de las variables de estado se realiza conjuntamente a través de 2 tipos de instrumentos distintos. En este caso la dinámica de la tasa de interés así como la de las otras variables de estado está plenamente identificada.

Una segunda perspectiva que se puede analizar es considerar el modelo bajo la ley de probabilidad histórico dado por las ecuaciones (3.67), (3.68) y (3.69) en

el cual las variables de estado δ_t y μ_t pueden o no tener una interpretación económica. De esta forma, se obtiene un proceso ajustado por riesgo que no tiene porqué depender de la tasa de interés de corto plazo. Por lo tanto, en ese caso el modelo puede ser calibrado sólo con información proporcionada por futuros escritos sobre el commodity y ciertamente se obtendrá un mejor ajuste de las curvas de precios futuros. Bajo esta segunda perspectiva, este modelo es equivalente al modelo de Cortazar y Schwartz (2002) como se demuestra en Reyes (2000). Sin embargo, el modelo está sobre-identificado en el sentido que alguna de las medias de largo plazo de δ_t y μ_t no pueden ser determinadas independientemente.

3.7.4 Resumen del Análisis de Comparación de Modelos

En las sub-secciones anteriores se pudo ver que varios de los modelos de precios de la literatura son casos especiales del modelo canónico presentado en esta tesis. Además, se mostró que en algunos casos, ciertos parámetros no se pueden estimar solamente a partir de la información entregada por los precios de los contratos futuros. La tabla III-1 indica el número total de parámetros que se deben estimar para cada uno de los modelos analizados en las sub-secciones anteriores y se compara con el número de parámetros del modelo canónico equivalente. Por ejemplo, el modelo de Gibson y Schwartz (1990) es un modelo no-estacionario de 2 factores, por lo que se compara el número de parámetros de este modelo con los del modelo canónico no-estacionario de 2 factores.

Se puede ver que los modelos de Brennan y Schwartz (1985), Gibson y Schwartz (1990) y Schwartz (1997), Modelo 3 tienen un parámetro más que la representación canónica equivalente. Por lo tanto, si uno quisiera estimar los parámetros de estos modelos solamente a partir de precios de contratos futuros, se debe especificar uno de los parámetros exógenamente.

Tabla III-1: Comparación del número de parámetros requeridos por tipo de modelo presentado en la literatura y su representación canónica equivalente.

	Modelo	Número de Parámetros	Número de Parámetros del Modelo Canónico Equivalente
1 Factor	Brennan y Schwartz (1985)	4	3
	Schwartz (1997), Modelo 1	4	4
2 Factores	Schwartz y Smith (2000)	7	7
	Gibson y Schwartz (1990)	8	7
3 Factores	Cortazar y Schwartz (2002)	12	12
	Schwartz (1997), Modelo 3	13	12

IV ESTIMACIÓN DE VARIABLES DE ESTADO Y DE PARÁMETROS UTILIZANDO EL FILTRO DE KALMAN

En el capítulo anterior se analizaron modelos de precios de commodities a partir de los cuales se obtuvieron fórmulas analíticas para los precios de contratos futuros. Para poder aplicar estos resultados, como por ejemplo en el caso que se requiera calcular el precio de un futuro con un vencimiento que no se transe en los mercados, se necesitan dos cosas. Una de ellas es estimar las variables de estado que determinan el precio spot del commodity en ese momento. Además, se requiere estimar los parámetros estructurales del modelo que caracterizan la dinámica del precio spot. Por lo tanto, en este capítulo se desarrollará un método de estimación que permita resolver estos dos problemas simultáneamente utilizando la mayor cantidad de información disponible contenida en los mercados de futuros.

El filtro de Kalman es un método que permite estimar variables de estado no-observables a partir de observaciones que pueden contener algún error de medición. En su forma tradicional, el filtro de Kalman requiere que exista una relación lineal entre las variables observables y las no observables²⁹. En el contexto de esta tesis, las variables observadas que se utilizarán en la estimación de las variables de estado serán precios de contratos futuros escritos sobre algún commodity. Para los modelos de precios estudiados, el logaritmo del precio teórico de un contrato futuro es lineal en las variables de estado.

Una característica muy atractiva del filtro de Kalman es que las estimaciones de las variables de estado se realizan en base a la dinámica de estas variables (dimensión temporal) así como de las mediciones que se van obteniendo en cada instante del tiempo (dimensión transversal). De esta forma, la estimación de las variables de estado utiliza toda la información disponible hasta ese momento, y no sólo la información de precios del momento al cual se realiza la estimación. Esto puede ser relevante en los días de la muestra para los cuales se disponga de muy poca información de precios.

²⁹ Este supuesto puede ser relajado como se describe en la Sección 4.4.

La dinámica de las variables de estado juega un rol muy importante al determinar la dimensión temporal del filtro. El filtro de Kalman asume que la dinámica de las variables de estado está generada por un proceso lineal. Este supuesto se cumple en los modelos analizados en esta tesis aunque también puede ser relajado.

Otra característica importante de esta metodología es que a partir del filtro de Kalman se obtiene la distribución de probabilidad de las innovaciones de las observaciones del proceso. Por innovación se considera el cambio en los precios observados para un día determinado, con respecto a la curva de futuros teórica observada el día anterior. Esta distribución de probabilidad permite luego encontrar la función de verosimilitud de las innovaciones. Al maximizar esta función con respecto a los parámetros estructurales del modelo, se encuentran estimaciones consistentes de dichos parámetros y del error de estimación de los mismos.

El filtro de Kalman ha sido extensamente utilizado en las áreas de economía y finanzas. De acuerdo a Harvey (1989), el filtro de Kalman es una metodología extremadamente poderosa que permite manejar una gran variedad de modelos de series de tiempo. En particular, en finanzas se ha visto un creciente uso de esta metodología en la última década.

En el área de precios de commodities, Schwartz (1997) parece ser el primero en utilizar el filtro de Kalman. Sin embargo, han habido varios trabajos posteriores donde se ocupa esta metodología, entre los que se puede mencionar Pindyck (1999), Schwartz y Smith (2000), Manoliu y Tompaidis (2002) y Sørensen (2002).

En el área de tasas de interés, Pennacchi (1991) es uno de los primeros en utilizar el filtro de Kalman para extraer tasas de interés reales e inflación esperada a partir de instrumentos nominales. Otros trabajos en los cuales se utiliza el filtro de Kalman para estimar variables no-observables y parámetros en modelos de tasas de

interés son³⁰ Duan y Simonato (1995), Lund (1994), Lund (1997), Geyer y Pichler (1998), Babbs y Nowman (1999), de Jong y Santa-Clara (1999) y de Jong (2000).

Por lo general, los trabajos mencionados anteriormente utilizan para la estimación de las variables de estado y de los parámetros del modelo un número restringido de contratos futuros. Esto se debe principalmente a que los autores incorporan en la estimación sólo los contratos futuros de ciertos vencimientos para los cuales se tienen observaciones en cada instante de tiempo, lo que equivale a requerir un panel completo de datos. Sin embargo, como se menciona en Sørensen (2002) y se muestra en este capítulo, esto no es necesario y una de las contribuciones principales de esta tesis será realizar estimaciones utilizando todos los contratos futuros que se dispongan en el período de tiempo que se quiera estudiar.

En la Sección 4.1 se describe la formulación del filtro de Kalman en su forma general. La Sección 4.2 detalla el procedimiento de estimación de los parámetros utilizando el método de máxima verosimilitud. En la Sección 4.3 se explica cómo se puede aplicar el filtro de Kalman para los modelos de precios descritos en el Capítulo 2. La Sección 4.4 muestra cómo se puede extender el filtro de Kalman cuando se utilizan observaciones, como por ejemplo contratos de opciones, para los cuales la ecuación de medida no es lineal. Finalmente, la Sección 4.5 compara el filtro de Kalman con otros métodos de estimación propuestos en la literatura.

4.1 El Filtro de Kalman

El filtro de Kalman es un método que se utiliza para estimar variables no observables a partir de observaciones que dependen de estas variables, pero que pueden contener errores de medición. Esta metodología fue desarrollada inicialmente por Kalman (1960) para controlar procesos de ingeniería y ha sido ampliamente utilizada en áreas como la navegación satelital.

³⁰ Algunos de los modelos analizados en dichos trabajos son no-lineales y no-gaussianos y son estimados con una extensión del filtro de Kalman llamada el “Filtro de Kalman Extendido” (Extended Kalman Filter) que se analiza en la Sección 4.4.

En esta sección se detalla y explica el funcionamiento y las características principales del filtro de Kalman.

4.1.1 El Espacio de Estados

El filtro de Kalman se define para procesos lineales gaussianos que están representados en el espacio de estados. En esta representación se tiene una ecuación de medida que relaciona las variables observadas con las no observadas en forma lineal:

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{d}_t + \mathbf{v}_t \quad \mathbf{v}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_t) \quad (4.1)$$

El vector \mathbf{z}_t , de dimensión $m \times 1$, representa las variables observadas. Es decir, estamos asumiendo que observamos en cada instante de tiempo m variables que podrían ser por ejemplo, precios futuros de algún commodity. Sin embargo, como se mostrará más adelante, m puede depender del tiempo. Esto es muy útil al utilizar contratos futuros como observaciones, ya que es común que en estos mercados ciertos futuros no se transen todos los días.

El vector \mathbf{x}_t es de dimensión $n \times 1$ y representa las variables no observadas. Esto significa que cada una de las m variables observadas es explicada por n variables no observadas. La matriz \mathbf{H}_t debe ser por lo tanto de dimensión $m \times n$ y representa al operador lineal que relaciona \mathbf{x}_t con \mathbf{z}_t . Esta matriz en su forma más simple es una matriz de constantes, aunque sus elementos pueden también ser funciones del tiempo. Asimismo, el vector \mathbf{d}_t es de dimensión $m \times 1$. El vector \mathbf{v}_t es una variable aleatoria de dimensión $m \times 1$ con distribución $N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_t)$. Esta variable aleatoria se incluye para indicar que las variables observadas contienen algún error de medición.

En el espacio de estados también se tiene una ecuación de transición que caracteriza la evolución de las variables no observadas en el tiempo:

$$\mathbf{x}_t = \bar{\mathbf{A}}_t \mathbf{x}_{t-\Delta t} + \mathbf{c}_t + \mathbf{w}_t \quad \mathbf{w}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_t) \quad (4.2)$$

Esta ecuación de transición relaciona el nuevo estado \mathbf{x}_t con el estado anterior $\mathbf{x}_{t-\Delta t}$ en forma lineal a través de la matriz $\bar{\mathbf{A}}_t$ que es de dimensión $n \times n$. El

vector \mathbf{w}_t es una variable aleatoria de dimensión $m \times 1$ con distribución $N(0, \mathbf{Q}_t)$ que modela la incertidumbre de las variables de estado. Es importante señalar que por lo general los modelos de precios de commodities se definen en tiempo continuo y para obtener la ecuación (4.2) en tiempo discreto se debe primero discretizar una ecuación diferencial estocástica. Estas discretizaciones se discuten en la sección 4.3.

4.1.2 Estimación Óptima en el Espacio de Estados

La estimación óptima en el espacio de estados fue desarrollada inicialmente por Kalman (1960) y se conoce como el filtro de Kalman. Por estimación óptima se entenderá el proceso de encontrar un estimador del vector de estados que minimice el valor esperado del error cuadrático entre el vector de estados y su estimación, dada toda la información que se disponga hasta ese momento. Este error representaría la varianza del estimador si es insesgado, lo que se verifica en este caso. Formalmente, si $\hat{\mathbf{x}}_t$ denota el estimador de \mathbf{x}_t , se tiene que:

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \mathbf{E}_t(\mathbf{x}_t) \quad (4.3)$$

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{E}_t(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)' \quad (4.4)$$

donde \mathbf{E}_t representa la esperanza condicional a la información disponible hasta t . La estimación del vector de estados también permite encontrar su varianza.

El filtro de Kalman es un método de estimación recursivo en el sentido que dado $\hat{\mathbf{x}}_t$ y \mathbf{P}_t , si se tiene un nuevo conjunto de información dado por $\mathbf{z}_{t+\Delta}$, entonces se puede encontrar $\hat{\mathbf{x}}_{t+\Delta}$ y $\mathbf{P}_{t+\Delta}$. Nótese que en cada instante del tiempo $\hat{\mathbf{x}}_t$ contiene toda la información hasta ese momento, ya que para estimarlo se utilizó $\hat{\mathbf{x}}_{t-\Delta}$ y \mathbf{z}_t , pero para encontrar $\hat{\mathbf{x}}_{t-\Delta}$ se utilizó $\hat{\mathbf{x}}_{t-2\Delta}$ y $\mathbf{z}_{t-\Delta}$, y así sucesivamente. Este hecho ilustra la naturaleza bayesiana del filtro de Kalman. En el anexo D se explica con mayor detalle la forma explícita en que el filtro de Kalman es un método de estimación bayesiano. Esto se basa en la equivalencia existente entre la esperanza condicional y la minimización cuadrática de errores.

Para encontrar la relación entre $\hat{\mathbf{x}}_t$, \mathbf{P}_t y $\hat{\mathbf{x}}_{t+\Delta}$, $\mathbf{P}_{t+\Delta}$, recordemos que el modelo en el espacio de estados se define como:

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{d}_t + \mathbf{v}_t \quad \mathbf{v}_t \sim N(0, \mathbf{R}_t) \quad (4.5)$$

$$\mathbf{x}_t = \bar{\mathbf{A}}_t \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{c}_t + \mathbf{w}_t \quad \mathbf{w}_t \sim N(0, \mathbf{Q}_t) \quad (4.6)$$

Por lo general, se considera que el vector de observaciones \mathbf{z}_t es de dimensión $m \times 1$ lo que implica que se dispone de m observaciones cada día. Esta restricción será relajada más adelante.

Si se tiene en algún instante del tiempo una estimación del vector de estados y de su varianza dados por $\hat{\mathbf{x}}_{t-\Delta t}$ y $\mathbf{P}_{t-\Delta t}$, entonces la predicción del vector de estados $\hat{\mathbf{x}}_t^-$ y su varianza \mathbf{P}_t^- en el siguiente instante es:

$$\hat{\mathbf{x}}_t^- = \bar{\mathbf{A}}_t \hat{\mathbf{x}}_{t-\Delta t} + \mathbf{c}_t \quad (4.7)$$

$$\mathbf{P}_t^- = \bar{\mathbf{A}}_t \mathbf{P}_{t-\Delta t} \bar{\mathbf{A}}_t' + \mathbf{Q}_t \quad (4.8)$$

La predicción del vector de estados permite a su vez realizar una predicción sobre las variables observadas:

$$\mathbf{z}_t^- = \mathbf{H}_t \hat{\mathbf{x}}_t^- + \mathbf{d}_t \quad (4.9)$$

Estas predicciones se comparan luego con la nueva información que se hace disponible a través de \mathbf{z}_t y esto permite encontrar la nueva estimación del vector de estados³¹:

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \hat{\mathbf{x}}_t^- + \mathbf{K}_t (\mathbf{z}_t - \mathbf{z}_t^-) \quad (4.10)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t) \mathbf{P}_t^- \quad (4.11)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad y \mathbf{K}_t es lo que tradicionalmente se llama la ganancia de Kalman y se define como:

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t' (\mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t' + \mathbf{R}_t)^{-1} \quad (4.12)$$

³¹ En el Anexo E se demuestran las ecuaciones del filtro de Kalman.

O sea, la estimación de la variable de estado es un promedio entre las observaciones que se tienen en t y la historia reflejada por el valor de la variable de estado en el tiempo $t - \Delta t$. La figura 4-1 resume las etapas de predicción y actualización del filtro de Kalman.

La varianza de la predicción de las innovaciones está dada por el término que se invierte en la fórmula de la ganancia de Kalman³²:

$$\mathbf{\Omega}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^{-1} \mathbf{H}_t' + \mathbf{R}_t \quad (4.13)$$

Esta varianza junto al valor esperado de la predicción de las observaciones será la base para calcular la función de verosimilitud de las innovaciones, lo que permitirá desarrollar un método para estimar los parámetros estructurales del modelo.

Debido a la naturaleza recursiva del filtro de Kalman, se necesita un conjunto de valores iniciales para el vector de estados así como para la matriz de varianza-covarianza del error de estimación. Cuando el vector de estados es estacionario, se utilizan sus momentos incondicionales para inicializar el filtro, como se indica en Harvey (1989). En el caso que el vector de estados tenga una raíz unitaria, se utiliza el enfoque de inicialización difusa. Este tópico se analiza con mayor detalle en la Sección 4.3.

³² En el caso que esta matriz no sea invertible, puede ser reemplazada por una pseudo-inversa de Moore-Penrose.

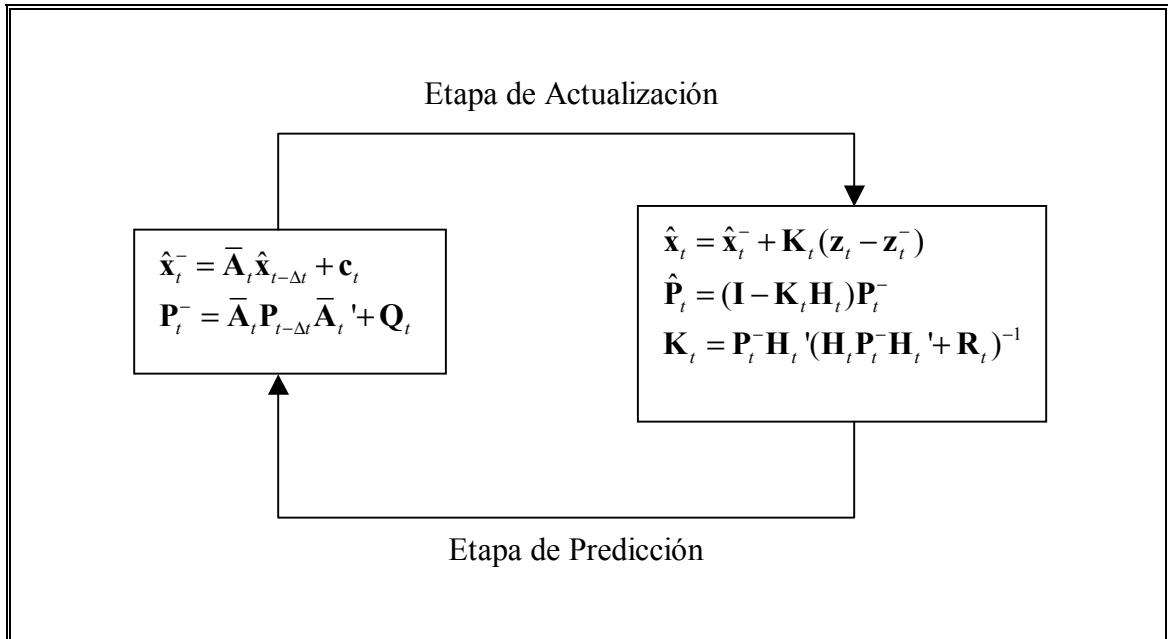


Figura 4-1: Diagrama del algoritmo de predicción y actualización del filtro de Kalman.

4.1.3 Extensión para Paneles de Datos Incompletos

La naturaleza recursiva de las ecuaciones del filtro de Kalman permite extender bajo ciertas condiciones el análisis anterior cuando el panel de datos es transversalmente incompleto. Formalmente, esto se traduce en que la dimensión del vector de observaciones de la ecuación de medida puede depender del tiempo:

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{d}_t + \mathbf{v}_t \quad \mathbf{v}_t \square N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_t) \quad (4.14)$$

donde \mathbf{z}_t , \mathbf{d}_t y \mathbf{v}_t son vectores de dimensión $m_t \times 1$, \mathbf{H}_t es una matriz de dimensión $m_t \times n$ y \mathbf{R}_t es una matriz de dimensión $m_t \times m_t$. No se está suponiendo que el panel de datos es incompleto temporalmente, o sea, que para algunos instantes de tiempo no hay observación alguna. Sin embargo, este supuesto también podría ser relajado.

En la sección anterior, se mostró que el filtro de Kalman itera en cada instante del tiempo sobre los valores anteriores del estimador del vector de estado y de su varianza para incorporar las nuevas observaciones que se hacen disponibles.

Esto significa que independientemente del número de observaciones que se hayan tenido para encontrar $\hat{\mathbf{x}}_{t-\Delta t}$ y $\mathbf{P}_{t-\Delta t}$, si uno ya dispone de estos valores, se puede entonces aplicar el filtro de Kalman sin problema para un nuevo conjunto de observaciones. Al término de la iteración se encontrarán nuevos valores para $\hat{\mathbf{x}}_t$ y \mathbf{P}_t , lo que permitirá realizar una nueva iteración cuando se disponga de un nuevo conjunto de observaciones³³.

4.2 Estimación de Parámetros

En esta sección se muestra cómo se puede utilizar el método de máxima verosimilitud para estimar los parámetros desconocidos de un modelo de precios de commodities. Además, se entregan resultados asintóticos de convergencia cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito.

4.2.1 El Método de Máxima Verosimilitud

Uno de los métodos más populares en estadística para estimar parámetros es el método de máxima verosimilitud. Básicamente, este método consiste en encontrar el conjunto de parámetros que garantiza que las observaciones que se observan son las más probables. Bajo ciertas condiciones de regularidad, el método de máxima verosimilitud entrega estimaciones consistentes y asintóticamente normales de los parámetros, que es una característica deseable en cualquier método de estimación. Esto implica que el método entrega una estimación del error cometido en la estimación de los parámetros, lo que permite en la práctica realizar tests estadísticos de significancia de los parámetros estimados. En esta sección se considerará que $\boldsymbol{\psi}$ representa el vector de parámetros a estimar.

Como se indica en la Sección 4.1.1, las observaciones están caracterizadas por la siguiente ecuación de medida:

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{d}_t + \mathbf{v}_t \quad \mathbf{v}_t \sim N(0, \mathbf{R}_t) \quad (4.15)$$

³³ Este método se propone en Sørensen (2002) aunque fue desarrollado independientemente por el autor de esta tesis.

Sean $\mathbf{z}_{t|t-\Delta t}$, $\mathbf{x}_{t|t-\Delta t}$ y $\mathbf{v}_{t|t-\Delta t}$ las variables aleatorias \mathbf{z}_t , \mathbf{x}_t y \mathbf{v}_t condicionales en la información disponible hasta el tiempo $t - \Delta t$. Como $\mathbf{x}_{t|t-\Delta t}$ y $\mathbf{v}_{t|t-\Delta t}$ son variables aleatorias normales, también lo es entonces $\mathbf{z}_{t|t-\Delta t}$ como combinación lineal de estas variables y una constante. La media y varianza de $\mathbf{z}_{t|t-\Delta t}$ están dadas por:

$$\mathbf{z}_t^- = \mathbf{H}_t \hat{\mathbf{x}}_t^- + \mathbf{d}_t \quad (4.16)$$

$$\mathbf{\Omega}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t' + \mathbf{R}_t \quad (4.17)$$

De esta forma, se tiene que la distribución de probabilidad de $\mathbf{z}_{t|t-\Delta t}$ es:

$$f_{\mathbf{z}_{t|t-\Delta t}}(\mathbf{z}_t) = \frac{1}{2\pi |\mathbf{\Omega}_t|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{z}_t - \mathbf{z}_t^-)' \mathbf{\Omega}_t^{-1} (\mathbf{z}_t - \mathbf{z}_t^-) \right] \quad (4.18)$$

Como además se tiene que $\{\mathbf{x}_{t_i|t_{i-1}} : t_i = t_{i-1} + \Delta t, i = 1, 2, \dots\}$ y $\{\mathbf{v}_{t_i|t_{i-1}} : t_i = t_{i-1} + \Delta t, i = 1, 2, \dots\}$ son conjuntos de variables aleatorias independientes, la distribución de probabilidad conjunta de $\{\mathbf{z}_{t_i|t_{i-1}} : t_i = t_{i-1} + \Delta t, i = 1, 2, \dots\}$ se puede calcular fácilmente como el producto de las distribuciones condicionales calculadas en la ecuación (4.18), o en forma logarítmica:

$$\log L(\boldsymbol{\psi}) = \sum_t \left(\log \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2} \log |\mathbf{\Omega}_t| - \frac{1}{2} (\mathbf{z}_t - \mathbf{z}_t^-)' \mathbf{\Omega}_t^{-1} (\mathbf{z}_t - \mathbf{z}_t^-) \right) \quad (4.19)$$

Esta es la distribución de probabilidad de las innovaciones de las observaciones del proceso y que si se maximiza con respecto a los parámetros desconocidos de la dinámica del precio spot y de los futuros, permite encontrar estimaciones consistentes de los parámetros. Como la maximización de la función de verosimilitud es invariante con respecto a una constante, es equivalente entonces a maximizar:

$$\log \bar{L}(\boldsymbol{\psi}) = -\frac{1}{2} \sum_t \log |\mathbf{\Omega}_t| - \frac{1}{2} \sum_t (\mathbf{z}_t - \mathbf{z}_t^-)' \mathbf{\Omega}_t^{-1} (\mathbf{z}_t - \mathbf{z}_t^-) \quad (4.20)$$

Por lo tanto, los parámetros estimados $\hat{\psi}$ se obtienen de:

$$\hat{\psi} = \arg \max_{\psi} \{\log \bar{L}(\psi)\} \quad (4.21)$$

Salvo en casos muy particulares, la maximización de la función de verosimilitud no se puede resolver analíticamente y se debe utilizar un método numérico de maximización.

4.2.2 Convergencia Asintótica de los Parámetros Estimados

Sea $\mathbf{I}(\psi)$ la matriz de información definida por:

$$\mathbf{I}(\psi) = \frac{\partial^2 \log L(\psi)}{\partial \psi \partial \psi'} \quad (4.22)$$

Bajo ciertas condiciones de regularidad³⁴ se tiene que $\hat{\psi}$ distribuye asintóticamente normal con media ψ (los parámetros verdaderos) y varianza dada por $\mathbf{I}(\psi)^{-1}$. Por lo tanto, una estimación de la varianza del estimador $\hat{\psi}$ de los parámetros está dada por $\mathbf{I}(\hat{\psi})^{-1}$. Como $\hat{\psi}$ maximiza $\log L(\psi)$, la matriz $\mathbf{I}(\hat{\psi})$ es definida positiva y de esto se concluye que también $\mathbf{I}(\hat{\psi})^{-1}$ es definida positiva, lo que garantiza que esta última matriz es efectivamente una matriz de varianza-covarianza. La diagonal de la matriz $\mathbf{I}(\hat{\psi})^{-1}$ contiene entonces las varianzas de los errores de estimación, lo que entrega información importante respecto a la confiabilidad de los parámetros estimados. También se pueden calcular las correlaciones entre los distintos parámetros estimados.

La función de verosimilitud $\log L(\psi)$ es por lo general muy complicada y una fórmula explícita de la matriz de información es difícil de obtener. Sin embargo, se pueden calcular las derivadas parciales de $\log L(\psi)$ con respecto a los parámetros de manera numérica sin ninguna dificultad.

³⁴ Ver por ejemplo Hamilton (1994) o Harvey (1989).

La evaluación de la matriz de información entrega detalles adicionales sobre la identificación del modelo. Si la matriz de información es invertible, entonces los parámetros del modelo son localmente identificables como se menciona en Hamilton (1994).

4.3 Aplicación a Modelos Canónicos de Precios con Paneles de Datos Incompletos

El método de estimación recién planteado se aplicará considerando como mediciones los precios de contratos futuros que se observan en los mercados financieros. En el capítulo 2 se determinaron fórmulas explícitas de los precios teóricos de contratos futuros para cada uno de los modelos canónicos. En esta sección se mostrará cómo se pueden representar ambos modelos en el espacio de estados.

4.3.1 Representación en el Espacio de Estados de los Modelos Canónicos de Precios

La ecuación de transición del vector de estados en el modelo estacionario está representada por la siguiente ecuación diferencial estocástica en tiempo continuo:

$$dx_t = -Ax_t dt + \Sigma dw_t \quad (4.23)$$

donde $\mathbf{A} = \text{diag}(a_i)$, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_i)$

$$dw_t dw_t' = \Theta dt \quad \Theta = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Si el intervalo de tiempo Δt entre observaciones es pequeño³⁵, entonces la ecuación (4.23) se puede discretizar de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{A}\Delta t)\mathbf{x}_{t-\Delta t} + \mathbf{w}_t \quad (4.24)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad y \mathbf{w}_t es un vector aleatorio que distribuye normal con media cero y matriz de varianza-covarianza dada por:

$$\mathbf{Cov}_t(\mathbf{w}_t) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \cdots & \sigma_1\sigma_N\rho_{1N} \\ \sigma_2\sigma_1\rho_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_2\sigma_N\rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_N\sigma_1\rho_{N1} & \sigma_N\sigma_2\rho_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix} \Delta t \quad (4.25)$$

Por lo tanto, en la nomenclatura de la Sección 4.1.1 se tiene que la ecuación de transición está caracterizada por los siguientes parámetros:

$$\bar{\mathbf{A}}_t = \mathbf{I} - \mathbf{A}\Delta t \quad (4.26)$$

$$\mathbf{c}_t = \mathbf{0} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{Q}_t = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \cdots & \sigma_1\sigma_N\rho_{1N} \\ \sigma_2\sigma_1\rho_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_2\sigma_N\rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_N\sigma_1\rho_{N1} & \sigma_N\sigma_2\rho_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix} \Delta t \quad (4.28)$$

Una vez que se tiene la ecuación de transición representada en el espacio de estados, se procede a obtener la ecuación de medida del filtro de Kalman. Sin embargo, es necesario antes establecer la nomenclatura que permita aplicar el filtro de Kalman cuando el panel de datos es incompleto.

³⁵ Por intervalo de tiempo pequeño se entenderá un valor tal que la diferencia entre la discretización dada por la ecuación (4.24) y la que se puede obtener a partir de las ecuaciones (2.17) y (2.18) sea despreciable.

Para cada instante de tiempo que se tienen datos, tanto el número de futuros observados como los vencimientos de estos instrumentos varía. Esto es, en el instante t se tienen M_t observaciones distintas de contratos futuros para distintos vencimientos $T_{t,1}, T_{t,2}, \dots, T_{t,M_t}$. La variabilidad del número de contratos futuros observados se debe a que ciertos instrumentos no son transados todos los días en los mercados financieros.

Otro punto importante a notar es que en cada observación se está considerando la madurez exacta de cada contrato dada por $\tau = T - t$. Este hecho no es por lo general utilizado en la literatura existente de commodities ya que es común que se utilice sólo una madurez genérica o aproximada para cada tipo de contrato.

El análisis anterior también es válido cuando se disponen de otros tipos de contratos como por ejemplo opciones sobre futuros. Sin embargo, en ese caso la ecuación de medida requiere ser modificada y ese punto será analizado en la siguiente sección.

Como se mostró en el capítulo 3, para el modelo estacionario, el precio de un contrato futuro en forma logarítmica está dado por:

$$\begin{aligned} \log F(\mathbf{x}_t, t, T) = & \sum_{i=1}^N e^{-a_i(T-t)} x_i(t) - \sum_{i=1}^N \frac{1 - e^{-a_i(T-t)}}{a_i} \lambda_i \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(a_i+a_j)(T-t)}}{a_i + a_j} + d \end{aligned} \quad (4.29)$$

Se tiene pues en la nomenclatura de la Sección 4.1.1 que la ecuación de medida es:

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{d}_t + \mathbf{v}_t \quad \mathbf{v}_t \square N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_t) \quad (4.30)$$

donde

$$\mathbf{z}_t = \begin{pmatrix} \log F(\mathbf{x}_t, t, T_{t,1}) \\ \vdots \\ \log F(\mathbf{x}_t, t, T_{t,M_t}) \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{H}_t = \begin{pmatrix} e^{-a_1(T_{t,1}-t)} & \dots & e^{-a_N(T_{t,1}-t)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-a_1(T_{t,M_t}-t)} & \dots & e^{-a_N(T_{t,M_t}-t)} \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{d}_t = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^N \frac{1-e^{-a_i(T_{t,1}-t)}}{a_i} \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1-e^{-(a_i+a_j)(T_{t,1}-t)}}{a_i+a_j} + d \\ \vdots \\ -\sum_{i=1}^N \frac{1-e^{-a_i(T_{t,M_t}-t)}}{a_i} \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1-e^{-(a_i+a_j)(T_{t,M_t}-t)}}{a_i+a_j} + d \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

La representación en el espacio de estados que se acaba de presentar está hecha para el modelo estacionario de precios. La extensión para el modelo no-estacionario es directa ya que sólo es necesario restringir el parámetro $a_i = 0$ en la ecuación de transición y utilizar la fórmula de valorización de un contrato futuro entregada en el capítulo 3 para modelos no-estacionarios para obtener la ecuación de medida.

4.3.2 Forma Funcional de la Matriz de Varianza-Covarianza de los Errores de Medición

Como por lo general se trabajará en modelos que tienen muchos parámetros que deberán ser estimados con una gran cantidad de datos, se propone una forma muy simple para la matriz de varianza-covarianza de los errores de medición como proponen Babbs y Nowman (1999) y Sørensen (2002). Esto es, se supone que esta matriz es diagonal con un solo parámetro de la forma:

$$\mathbf{R}_t = \begin{pmatrix} r & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & r \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Este supuesto considera que cada una de las observaciones se mide con un error que tiene la misma varianza y que no está correlacionado con el error de las

demás observaciones. Se definirá la desviación estándar de la estimación como $\varepsilon = \sqrt{r}$. Aún cuando esto pueda ser una aproximación de lo que pasa en la realidad, se realizaron pruebas con ciertas formas funcionales³⁶ que podría tomar $r(T-t)$ en función de la madurez de cada contrato, pero no se encontraron diferencias sustanciales en la estimación de los demás parámetros. Por lo tanto, r representa la varianza promedio de los errores de medición.

4.3.3 Inicialización del Filtro de Kalman

Otro punto que se debe resolver antes de poder utilizar el filtro de Kalman, es definir qué valores iniciales tomarán tanto el vector de estados así como la matriz de varianza-covarianza del error de estimación. Como se mencionó en la Sección 4.1.3, cuando el vector de estados es estacionario, entonces el filtro se puede inicializar utilizando sus momentos incondicionales. Como se analizó en la Sección 2.4, la media y la matriz de varianza-covarianza de largo plazo del vector de estados están dadas por:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E_0(x_i(t)) = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (4.35)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Cov}_0(x_i(t), x_j(t)) = \frac{\sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}{a_i + a_j} \quad i, j = 1, \dots, N \quad (4.36)$$

donde $E_0(x_i(t))$ es el elemento i del vector $\mathbf{E}_0(\mathbf{x}_t)$ que representa el valor esperado del vector de estados en $t=0$ y $\text{Cov}_0(x_i(t), x_j(t))$ es el elemento (i, j) de la matriz de varianza-covarianza $\mathbf{Cov}_0(\mathbf{x}_t)$ del vector de estados en $t=0$. Estos momentos coinciden con los momentos incondicionales $\mathbf{E}(\mathbf{x}_t)$ y $\mathbf{Cov}(\mathbf{x}_t)$ del vector de estados.

Dado esto, en el caso estacionario el filtro se inicializa de la siguiente manera:

³⁶ Se realizaron pruebas utilizando cubic-splines para representar la varianza de los errores de medición.

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{E}(\mathbf{x}_t) \quad (4.37)$$

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{Cov}(\mathbf{x}_t) \quad (4.38)$$

La razón por la cual se utilizan los momentos incondicionales del vector de estados para inicializar el filtro proviene del hecho que si no se dispone de información a priori del valor de las variables de estado, la mejor estimación para el valor del vector de estados es su esperanza incondicional. Dado este valor del vector de estados, el error que uno está cometiendo en la estimación es justamente la matriz de varianza-covarianza de largo plazo. De todas formas, se verificó empíricamente que el filtro no es sensible al valor inicial que tomen las variables de estado ni a la varianza del error de estimación, lo que concuerda con el análisis realizado por Schwartz y Smith (2000). Además, dado que el vector de estados es controlable³⁷, el error de estimación del filtro de Kalman converge exponencialmente a sus valores de largo plazo. Este punto será analizado en mayor detalle en el Capítulo 5 donde se presentan los resultados de la estimación para cobre y petróleo.

Para inicializar el filtro de Kalman para el caso del modelo no-estacionario, se utiliza el método de inicialización difusa como se mencionó en la sección 4.1.3. Esto se debe a que como se mostró en la sección 2.5, en el modelo no-estacionario el vector de estados contiene una variable que tiene una raíz unitaria y por lo tanto los momentos incondicionales de esa variable de estado no están bien definidos. En efecto, los momentos de largo plazo, que coinciden con los momentos incondicionales del vector de estados, están caracterizados por:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E_0(x_i(t)) = \begin{cases} x_1(0) & i = 1 \\ 0 & i = 2, \dots, N \end{cases} \quad (4.39)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Cov}_0(x_i(t), x_j(t)) = \begin{cases} +\infty & i = 1, j = 1 \\ \frac{\sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}{a_i + a_j} & i \neq 1, j \neq 1 \end{cases} \quad (4.40)$$

³⁷ Ver Harvey (1989) donde se define la controlabilidad del vector de estados.

Para inicializar las variables de estado que son estacionarias, se utilizó la media incondicional de estas variables que es cero. Como valor inicial de la variable de estado no-estacionaria, se utilizó el valor del logaritmo del precio del contrato futuro más cercano al vencimiento. Esto es consistente con la fórmula de valorización de contratos futuros para este modelo cuando se comienza en $t = 0$:

$$\log F(\mathbf{x}_0, t = 0, T) = x_1(0) + (\mu - \lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2)T - \sum_{i=2}^N \frac{1 - e^{-a_i T}}{a_i} \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq 1} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(a_i + a_j)T}}{a_i + a_j} \quad (4.41)$$

Cuando se considera el futuro más cercano al vencimiento, se puede aproximar su madurez por $T = 0$, de donde se obtiene que:

$$\log F(\mathbf{x}_0, t = 0, T = 0) = x_1(0) \quad (4.42)$$

La varianza de largo plazo de la variable de estado x_1 es infinita, como se puede ver de la ecuación (4.40). En la práctica, el enfoque de inicialización difusa considera que esta varianza puede aproximarse por un valor bastante grande en comparación a la varianza de las demás variables de estado, que es lo que se realizó en esta tesis³⁸.

4.4 Extensiones del Filtro de Kalman

El filtro de Kalman también puede ser utilizado cuando no se cumplen los supuestos de linealidad tanto en las ecuaciones de transición como en las de medida. En esta sección se analiza el caso en el cual la relación entre las variables de estado y las observaciones en la ecuación de medida no es lineal. Este caso se tendría, por ejemplo, si se quisiera utilizar contratos de opciones sobre un contrato futuro cuando el precio spot del commodity sigue un proceso lognormal. Cortazar y Reyes (2001) realizan estimaciones de modelos de precios de commodities con contratos futuros y

³⁸ Tal como se indicó anteriormente, la estimación de los parámetros no es sensible a la elección de este valor.

opciones sobre futuros utilizando una metodología basada en la minimización de los errores de medición³⁹. Los autores concluyen que la utilización de los precios de contratos de opciones entrega mejores estimaciones de la estructura de volatilidad de los contratos futuros. En general, la inclusión en el panel de datos utilizado de instrumentos financieros que son particularmente sensibles a ciertos parámetros puede entregar estimaciones más robustas de dichos parámetros. El precio de una opción, por ejemplo, es muy sensible a la volatilidad del activo subyacente. La incorporación de contratos de opciones en el panel de datos utilizado debiera pues entregar información más precisa acerca de la estructura de volatilidad del precio spot de los commodities.

Sin entrar en detalles acerca de la valorización de otros derivados financieros escritos sobre el commodity, en el caso general uno espera que el precio de un derivado $P(\mathbf{x}_t, \tau)$ dependa a través de alguna forma funcional de las variables de estado y de su madurez o vencimiento τ . En este caso, la ecuación de medida queda representada por:

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{P}(\mathbf{x}_t) + \mathbf{v}_t \quad \mathbf{v}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_t) \quad (4.43)$$

donde \mathbf{z}_t son los precios observados del derivado genérico y $\mathbf{P}(\mathbf{x}_t)$ es una función vectorial tal que:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}_t) = \begin{pmatrix} P(\mathbf{x}_t, \tau_1) \\ \vdots \\ P(\mathbf{x}_t, \tau_m) \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

La dimensión de la función vectorial puede depender del tiempo para así poder utilizar paneles de datos incompletos como se vio en la Sección 4.1.3.

Como se indica en Harvey (1989), la función de valorización del derivado puede ser linealizada aplicando un desarrollo de Taylor de primer orden en torno al primer momento del vector de estados:

³⁹ Este artículo está basado en la tesis de Reyes (2000).

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}_t) = \mathbf{P}(\hat{\mathbf{x}}_t^-) + \left. \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{x}_t)}{\partial \mathbf{x}_t'} \right|_{\mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}}_t^-} (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t^-) \quad (4.45)$$

Esta nueva ecuación de medida es lineal en el vector de estados y por lo tanto permite calcular la ganancia del filtro de Kalman en su forma tradicional. Sin embargo, no es necesario utilizar esta fórmula linealizada para calcular la predicción de las innovaciones \mathbf{z}_t^- definida en la ecuación (4.9), a partir de la cual se obtiene la estimación de las variables de estado. La linealización sólo es necesaria para calcular la ganancia del filtro. Este método de linealizar la ecuación de medida para obtener la ganancia del filtro de Kalman es también conocido como filtro de Kalman Extendido.

4.5 Comparación del Filtro de Kalman con Otros Métodos de Estimación de Variables de Estado

Si bien es cierto que el filtro de Kalman ha sido utilizado extensamente en la literatura financiera para estimar modelos de precios, no es el único método disponible para estimar las variables de estado y los parámetros de los modelos de precios con datos de panel.

Chen y Scott (1993) proponen un método de estimación de las variables de estado del modelo basado en la inversión de la fórmula de valorización de algún derivado. Por ejemplo, en un modelo estacionario de N factores estocásticos, la ecuación de medida para los contratos futuros está dada por:

$$\begin{aligned} \hat{z}_t &= \log F(\mathbf{x}_t, t, T) \\ &= \sum_{i=1}^N e^{-a_i(T-t)} x_i(t) + \varphi(T-t) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Luego, si se disponen de $i=1, \dots, N$ observaciones $z_i(t)$ para vencimientos T_i , la ecuación (4.46) se puede representar en forma matricial como:

$$\hat{\mathbf{z}}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \boldsymbol{\varphi}_t \quad (4.47)$$

donde

$$\hat{\mathbf{z}}_t = \begin{pmatrix} \log F(\mathbf{x}_t, t, T_1) \\ \vdots \\ \log F(\mathbf{x}_t, t, T_N) \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

$$\mathbf{H}_t = \begin{pmatrix} e^{-a_1(T_1-t)} & \dots & e^{-a_N(T_1-t)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-a_1(T_N-t)} & \dots & e^{-a_N(T_N-t)} \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_t = \begin{pmatrix} \varphi(T_1-t) \\ \vdots \\ \varphi(T_N-t) \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

Invirtiendo la ecuación (4.47) y considerando las observaciones de precios futuros se obtiene la siguiente estimación para las variables de estado:

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \mathbf{H}_t^{-1}(\mathbf{z}_t - \boldsymbol{\varphi}_t) \quad (4.51)$$

Este método de inversión de la fórmula de valorización asume que las observaciones no contienen ningún error de medición. En cierta medida, es como realizar una regresión lineal sobre los precios futuros cuando se tiene el mismo número de observaciones que de factores de riesgo.

Para estimar los parámetros del modelo, los autores calculan la distribución de las innovaciones de precios y maximizan la función de verosimilitud obtenida. Esto se hace de manera similar al desarrollo realizado para el filtro de Kalman en la Sección 4.2.1. También los autores consideran que fuera de los precios que se observan sin error de medición, pueden haber otros que sí tienen error. Estos otros precios no entran en la fórmula de inversión para calcular las estimaciones de las variables de estado pero sí se utilizan en la función de verosimilitud para estimar los parámetros del modelo.

Este método ha sido utilizado para calibrar modelos de commodities por Casassus y Collin-Dufresne (2001) y para calibrar modelos de tasas de interés con algunas variantes por Pearson y Sun (1994) y Duffie y Singleton (1997).

La gran desventaja de este método es que la elección de los instrumentos que se considera que se observan sin error es totalmente arbitraria. La estimación de las variables de estado está determinada pues por la elección particular que se haga. En la práctica, se utilizan por lo general modelos de 2 o 3 factores, pero se pueden observar muchos más instrumentos a distintos vencimientos transados diariamente. El método anterior supone que sólo se considerarán 2 o 3 precios de entre los muchos instrumentos disponibles para obtener una estimación de las variables de estado. El filtro de Kalman permite, con un poco más de complejidad, eliminar esta arbitrariedad al permitir que la estimación de las variables de estado sea obtenida utilizando todos los datos.

Otro método de estimación para las variables de estado ha sido propuesto por Schwartz (1998), Riera (1999), Cortazar y Schwartz (2002) y Reyes (2000). Cuando los precios están relacionados linealmente con las variables de estado, la estimación de estas variables se puede obtener a partir de una regresión lineal entre los precios observados y ciertas funciones de parámetros. Esto permite, entre otras cosas, aprovechar la información disponible de todos los precios observados en algún instante de tiempo sin tener que elegir ningún conjunto de ellos en particular. El método de Chen y Scott (1993) equivale a realizar una regresión cuando el número de variables de estados es igual al número de precios utilizados.

Supongamos que se considera un modelo estacionario de N factores estocásticos y que se dispone de $i = 1, \dots, M$ futuros $z_i(t)$ para vencimientos T_i , tal que $N < M$. O sea, se disponen de más observaciones que factores de incertidumbre. Nuevamente, se tiene la ecuación de medida (4.47), sólo que en este caso la matriz \mathbf{H}_t no es cuadrada, sino que tiene más filas que columnas. Si el rango de la matriz \mathbf{H}_t es máximo, entonces la fórmula de inversión (4.51) sigue siendo válida pero la inversa \mathbf{H}_t^{-1} debe ser reemplazada por una pseudo-inversa. La estimación de las variables de estado realizada de esta forma coincide pues con la obtenida al hacer una regresión lineal entre estas variables y los precios observados:

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \mathbf{H}_t^+ (\mathbf{z}_t - \boldsymbol{\phi}_t) \quad (4.52)$$

$$\mathbf{H}_t^+ = (\mathbf{H}_t' \mathbf{H}_t)^{-1} \mathbf{H}_t' \quad (4.53)$$

La matriz \mathbf{H}_t^+ se conoce como pseudo-inversa o inversa generalizada. La regresión lineal generaliza pues la estimación de las variables de estado realizada a través del método de inversión de la fórmula de valorización del futuro. La ventaja de este método de estimación radica en que puede utilizar toda la información de precios observada en un cierto instante de tiempo para estimar las variables de estado del modelo y no necesita realizar ninguna suposición acerca de qué contratos utilizar.

Sin embargo, este método tiene el inconveniente que no utiliza la información contenida en los precios observados con anterioridad al momento en el que se realiza la estimación. Esto puede ser particularmente relevante en mercados en los cuales algunos días se transan sólo instrumentos de corto plazo y otros días se tienen sólo observaciones de instrumentos de largo plazo. La estimación de una variable de estado de largo plazo a partir de instrumentos de corto plazo puede introducir un sesgo significativo en su valor. El filtro de Kalman permite utilizar toda la información anterior para realizar estimaciones de las variables de estado cuando ocurre un caso como el descrito anteriormente.

Por otro lado, como indican Schwartz y Smith (2000), el método de la regresión es un caso particular del filtro de Kalman cuando se supone que no existe error de medición. Por lo tanto el filtro de Kalman incorpora como casos particulares los dos métodos de estimación de variables de estado recién presentados.

Para encontrar estimaciones de los parámetros del modelo, Riera (1999), Cortazar y Schwartz (2002) y Reyes (2000) proponen un método que busca encontrar los parámetros que mejor se ajustan a los precios de contratos futuros observados. Además, se incorpora la restricción que los parámetros de varianzas y correlaciones coincidan con las varianzas y correlaciones observadas de las variables de estado. El problema con este método es que no existen distribuciones de probabilidad de los parámetros estimados que permitan conocer, por ejemplo, el error de estimación de los parámetros. El método de maximizar la función de verosimilitud de las innovaciones permite por el contrario disponer de toda una teoría estadística que entrega la distribución asintótica de los parámetros estimados.

V RESULTADOS EMPÍRICOS PARA COBRE Y PETRÓLEO

En este capítulo se presentan y analizan los resultados obtenidos al calibrar los modelos de precios de commodities presentados en el Capítulo 2 con observaciones diarias de precios futuros de cobre y petróleo durante un período de 10 años. La calibración de los modelos se realizó utilizando la metodología del filtro de Kalman para paneles de datos incompletos descrita en el Capítulo 4.

Para ambos commodities, se obtuvieron estimaciones de los parámetros del modelo estacionario y no-estacionario utilizando distintos números de factores. En el caso del petróleo, se analizaron modelos de 1, 2, 3 y 4 factores de riesgo mientras que para el cobre se estimaron modelos de 1, 2 y 3 factores. La razón por la cual para el petróleo se analizaron más factores es que en ese caso se disponen de muchas más observaciones por día para un rango más amplio de vencimientos.

La estimación de las variables de estado fue realizada con el filtro de Kalman y la estimación de los parámetros se realizó maximizando la función de verosimilitud de las innovaciones de los precios futuros con respecto a los parámetros desconocidos. Los errores de estimación de los parámetros se obtuvieron a partir de la matriz de información de la función de verosimilitud, como se describe en la sección 4.2.2.

En este capítulo también se estudia el ajuste de los precios futuros teóricos de cada modelo a los precios observados. El hecho que un modelo realice valorizaciones precisas de los precios observados aumenta la certidumbre que obtenga en la valorización de ciertos futuros de más largo plazo para los cuales no se tienen observaciones. Esto es particularmente relevante cuando se requiere valorizar proyectos de exploración, extracción o producción de yacimientos de petróleo o cobre, que por lo general se extienden sobre horizontes muy largos de tiempo. Este análisis fue realizado tanto para precios dentro de la muestra como para precios fuera de la muestra. El análisis del ajuste a los datos fuera de la muestra es particularmente relevante para analizar el buen comportamiento de los modelos como menciona Schwartz (1997).

Además de estudiar el ajuste de los modelos a los precios futuros observados, se analizó que tan bien se comporta la volatilidad teórica de los retornos de los futuros con respecto a la que puede ser calculada directamente de los datos. Este hecho también puede ser relevante cuando se aplican las estimaciones para valorizar ciertos proyectos que dependen del precio del commodity. De acuerdo a la teoría financiera moderna, algunos proyectos de inversión que dependen del precio de un commodity son más parecidos a un portafolio de opciones que a un portafolio de bonos, como supone el valor presente neto. En tal caso, la estructura de volatilidades que se estime para el precio del commodity afectará el valor del proyecto. Una introducción al tema de opciones reales para la valorización de proyectos de recursos naturales se puede encontrar en Cortazar (1999).

Por último, para ambos commodities se analizaron las divergencias entre los precios teóricos de los futuros de largo plazo que entregan los modelos estacionario y no-estacionario.

El filtro de Kalman y la función de verosimilitud se implementaron utilizando el lenguaje de programación Fortran. La maximización de esta función se realizó en una planilla de cálculo Excel utilizando el método de Newton disponible en la herramienta Solver de Excel. La conexión entre la rutina programada en Fortran y la planilla de cálculo se logró a través de la creación de una librería dinámica. La ventaja de este tipo de implementación es que se pueden aprovechar las potencialidades de cálculo numérico del lenguaje Fortran y a la vez utilizar la poderosa interfaz gráfica de la planilla de cálculo.

5.1 Descripción de los Datos Utilizados

Los datos utilizados consisten en observaciones diarias de precios de cierre de contratos futuros de petróleo (energía) y cobre (metal) desde enero de 1992 hasta diciembre de 2001, lo que representa una muestra total de 10 años de datos. En cada caso, se utilizaron todos los precios de mercado disponibles al cierre de cada día laboral. De esta forma, no se realizan decisiones arbitrarias de cuáles contratos se utilizan y cuáles se dejan fuera, como se ha realizado en otros trabajos de investigación.

5.1.1 Contratos Futuros de Petróleo

Los contratos futuros de petróleo utilizados para calibrar los modelos de precios corresponden a futuros transados en el NYMEX⁴⁰ del tipo “Light Sweet Crude Oil”. Actualmente se transan 35 contratos para distintos vencimientos. Existen contratos con vencimientos que van desde 1 a 30 meses y a 3,4,5,6 y 7 años.

Una caracterización de los datos en función del número promedio anual de observaciones diarias y del mayor vencimiento para el cual se tienen observaciones para cada año se presenta en la Tabla V-1. Se puede observar que desde el año 1992 hasta el año 1996, se disponía de contratos futuros de petróleo con un vencimiento máximo de 4,6 años. A partir del año 1997 y hasta el año 2001, se dispone de observaciones de contratos futuros con vencimientos mucho mayores de hasta 7,1 años.

Por esto, se decidió calibrar los modelos de precios tomando en consideración 3 paneles de datos. El Panel A comprende las observaciones del período completo que se extiende desde el año 1992 hasta el año 2001. El Panel B está representado por las observaciones que van desde el año 1992 hasta el año 1996. El Panel C abarca los años en los cuales se disponen de observaciones de más largo plazo y va desde el año 1997 hasta el año 2001, lo que representa un período de 5 años de datos.

Las figuras 5-1, 5-2 y 5-3 caracterizan los datos de cada panel en función del valor promedio del precio futuro para cada madurez así como la desviación estándar del precio, que está representada por el precio promedio menos y más una desviación estándar. Se mantuvo la misma escala de precios y de vencimientos en cada uno de los gráficos para poder realizar comparaciones de magnitud entre los precios de los distintos paneles. Las tablas de datos utilizadas para construir estos gráficos se entregan en el Anexo E de esta tesis, donde se indica además el número

⁴⁰ NYMEX es la sigla del “New York Mercantile Exchange”.

total de observaciones disponibles agrupadas por contratos para distintos vencimiento.

Tabla V-1: Caracterización de los contratos futuros de petróleo en función del número promedio anual de observaciones diarias y del vencimiento máximo disponible por año.

		Año	Obs. Diarias (Promedio)	Vencimiento Máximo (Años)
Panel A	Panel B	1992	22	3.1
		1993	22	3.1
		1994	21	3.1
		1995	25	4.6
		1996	31	4.0
	Panel C	1997	34	7.1
		1998	31	7.0
		1999	31	7.1
		2000	33	7.1
		2001	34	7.1

Se puede apreciar de la figura 5-1 que el precio promedio de los contratos futuros de petróleo para cada uno de los vencimientos en el período 1992-2001 estuvo entre los US\$19 y US\$21. La desviación estándar de los precios es bastante grande para los contratos con vencimientos más cortos, pudiendo llegar a ser casi un 24% del precio promedio para el contrato de más corto plazo. Esta desviación estándar disminuye a medida que se consideran contratos con vencimientos mayores, la que llega a ser cercana al 7% del precio promedio para el contrato con mayor vencimiento.

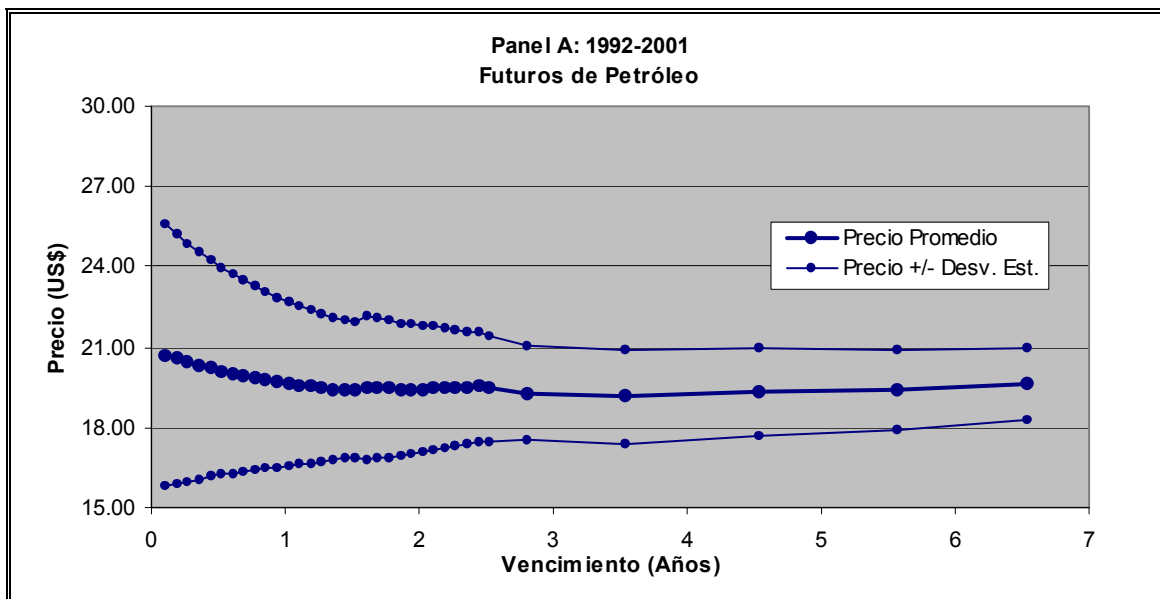


Figura 5-1: Descripción del Panel A (1992-2001) de precios futuros de petróleo en función del precio promedio observado y de la desviación estándar por tipo de contrato.

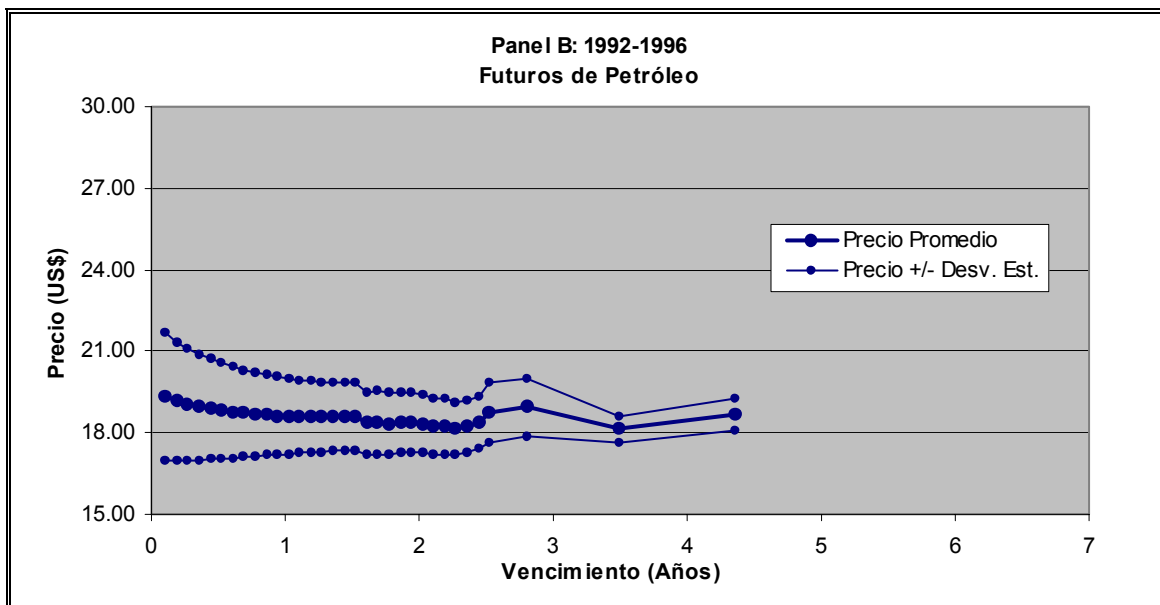


Figura 5-2: Descripción del Panel B (1992-1996) de precios futuros de petróleo en función del precio promedio y de la desviación estándar por tipo de contrato.

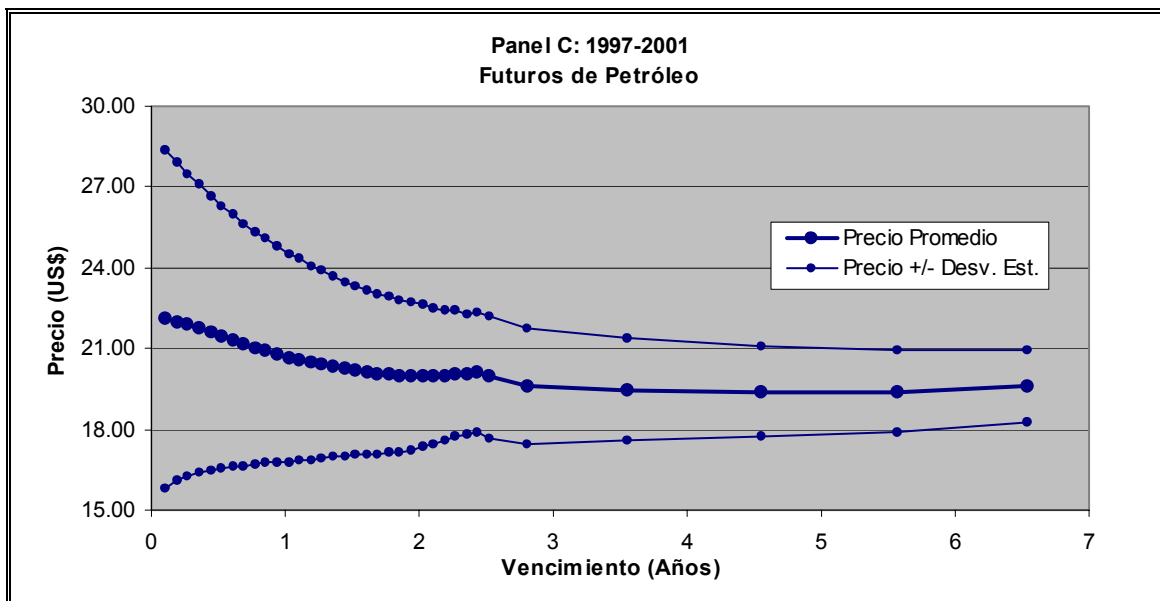


Figura 5-3: Descripción del Panel C (1997-2001) de precios futuros de petróleo en función del precio promedio y de la desviación estándar por tipo de contrato.

La figura 5-2 muestra la caracterización de los datos del Panel B. Se puede ver que el promedio de datos para todos los contratos futuros es menor que para el Panel A. El precio promedio de los contratos futuros oscila entre los US\$18 y los US\$19. La desviación estándar del precio de los futuros de más corto plazo es también menor que para los datos del panel A, siendo de aproximadamente 12%. Los futuros de más largo plazo tienen en este período una desviación estándar cercana al 3%.

Los datos del Panel C muestran precios promedios más altos que los del Panel B, que se mueven entre los US\$19 y US\$22. La desviación estándar de los futuros de corto plazo es mayor que en el Panel B y llega a ser cercana al 28%, mientras que para los futuros de mayor vencimiento es de aproximadamente 7%.

5.1.2 Contratos Futuros de Cobre

Los contratos futuros de cobre utilizados en esta tesis corresponden a futuros transados en el NYMEX⁴¹ del tipo “High Grade Copper”. Se transan actualmente 24 contratos para distintos vencimientos que van desde 1 a 24 meses.

Para la calibración de los modelos con futuros de cobre, también se utilizaron 10 años de datos y se analizaron 3 paneles de datos distintos que como en el caso del petróleo abarcan los períodos 1992-2001, 1992-1996 y 1997-2001 respectivamente.

Una caracterización de los datos en función del número promedio anual de observaciones diarias y del mayor vencimiento para el cual se tienen observaciones para cada año se presenta en la Tabla V-2. A diferencia del petróleo, los contratos futuros con mayor vencimiento se observan durante todo el período de análisis. Sin embargo, se puede observar que desde el año 1992 hasta el año 1995 se tiene un promedio de entre 9 y 10 observaciones diarias, mientras que a partir del año 1996 se tiene un promedio de entre 23 y 24 observaciones diarias.

Las figuras 5-4, 5-5 y 5-6 caracterizan los datos de cada panel en función del valor promedio del precio futuro para cada madurez así como la desviación estándar del precio.

La figura 5-4 analiza los datos del período 1992-2001. Los precios promedios de la mayoría de los contratos futuros de cobre están en el rango de los US\$0,88 y US\$0,91, salvo para el contrato a 24 meses que su promedio se encuentra en US\$0,85. La desviación estándar de los precios es de aproximadamente 22% para el contrato de más corto plazo y baja a cerca del 11% para el contrato con mayor vencimiento.

⁴¹ Actualmente los futuros de cobre se transan en la división COMEX (Commodity Exchange) del NYMEX..

Durante el período 1992-1996, el precio promedio para el contrato con menor madurez fue de aproximadamente US\$1,07 y de US\$0,95 para el contrato de más largo plazo. La desviación estándar del contrato de más corto plazo es de aproximadamente 16,5% mientras que para el de más largo plazo desciende a 7,4%.

Los precios promedios del período siguiente son sustancialmente más bajos, moviéndose en una banda entre los US\$0,81 y US\$0,83. Las desviaciones estándar son similares a las del período anterior, siendo cercana al 17% para los futuros de menor madurez y de 9% para los de más largo plazo.

Tabla V-2: Caracterización de los contratos futuros de cobre en función del número promedio anual de observaciones diarias y del vencimiento máximo disponible por año.

		Año	Promedio Obs. Diarias	Vencimiento Máximo (Años)
Panel A	Panel B	1992	10	1.9
		1993	9	1.9
		1994	10	1.9
		1995	10	1.9
		1996	24	2.0
	Panel C	1997	23	2.0
		1998	23	2.0
		1999	22	2.0
		2000	23	2.0
		2001	24	2.0

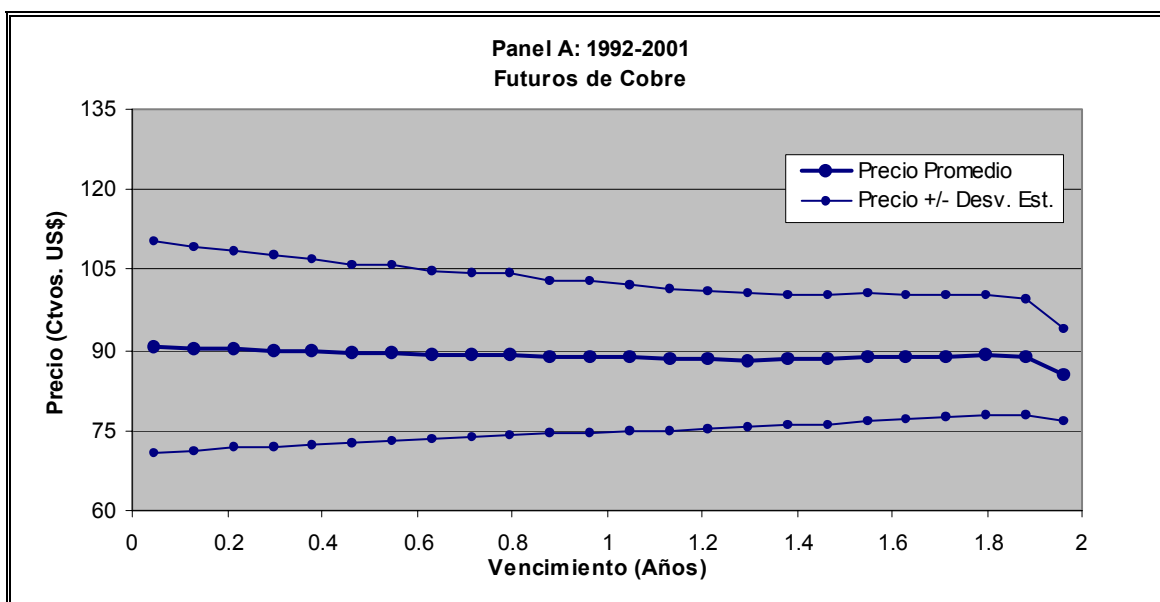


Figura 5-4: Descripción del Panel A (1992-2001) de precios futuros de cobre en función del precio promedio y de la desviación estándar por tipo de contrato.

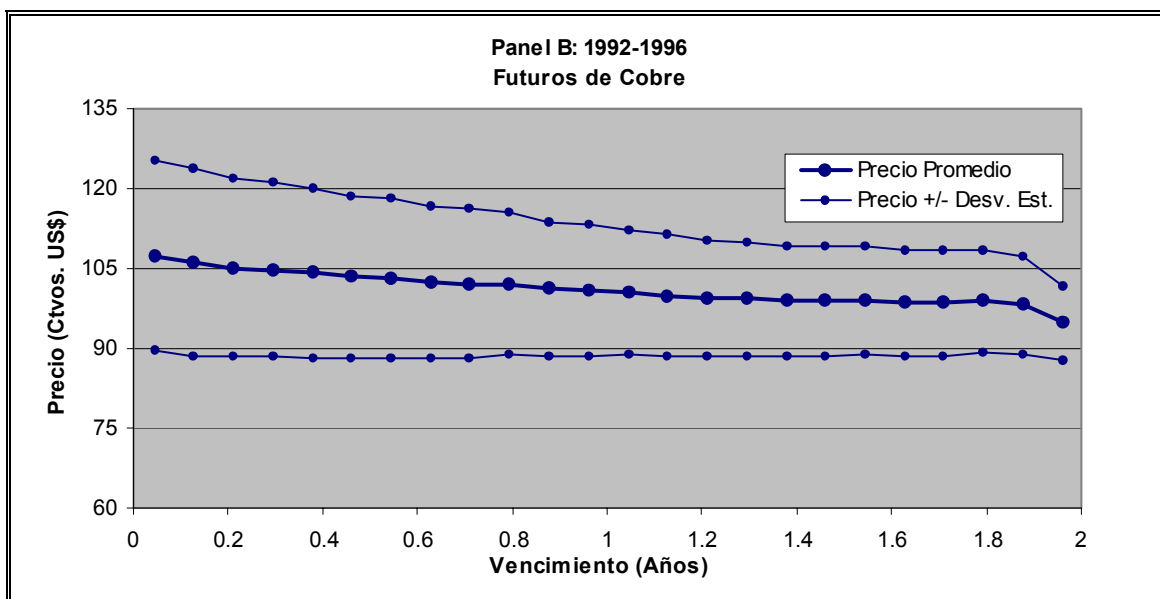


Figura 5-5: Descripción del Panel B (1992-1996) de precios futuros de cobre en función del precio promedio y de la desviación estándar por tipo de contrato.

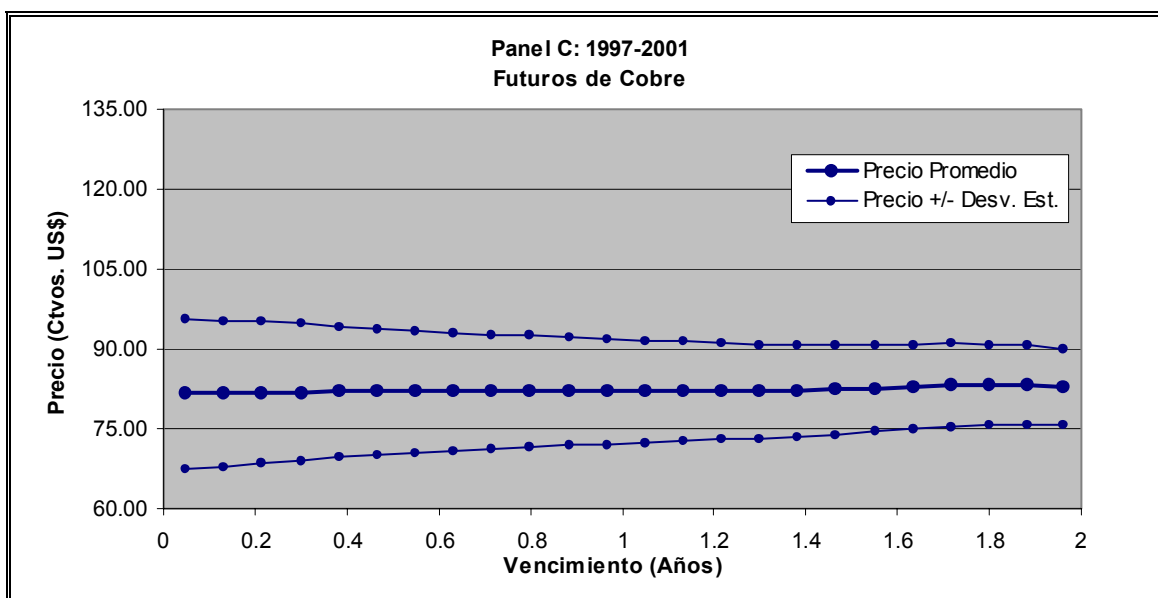


Figura 5-6: Descripción del Panel C (1997-2001) de precios futuros de cobre en función del precio promedio y de la desviación estándar por tipo de contrato.

5.2 Resultados para el Petróleo

5.2.1 Estimación de Variables de Estado

Como se mencionó en el capítulo 4, el filtro de Kalman entrega las estimaciones de las variables de estado no observables así como la función de verosimilitud que permite encontrar los parámetros estructurales del modelo al ser maximizada con respecto a estos parámetros.

Antes de presentar los resultados de las estimaciones de los parámetros para los distintos modelos y paneles de datos⁴², en esta sección se analizan ciertas características relacionadas con las variables de estado, el filtro de Kalman y el hecho que se trabaje con un panel de datos que varía en el tiempo.

⁴² Ver sección 5.2.2.

En el capítulo 3 se vio que el precio de un contrato futuro para cualquier vencimiento en un cierto instante del tiempo está determinado por el valor que tengan las variables de estado en ese momento. Esa relación fue deducida a partir del comportamiento estadístico del precio spot bajo la medida de probabilidad ajustada por riesgo. Junto con determinar el valor de un futuro, las variables de estado también determinan el valor del precio spot en ese momento. Dado que el precio spot se define como el valor de un contrato futuro a punto de vencer, se espera pues que el precio spot no sea muy distinto del valor de un futuro que está muy cercano al vencimiento.

La figura 5-7 muestra la evolución que ha tenido el precio spot estimado con el filtro de Kalman utilizando todos los contratos futuros durante el período 1992-2001. También en esta figura se grafica el valor del futuro más cercano al vencimiento. Se puede ver que efectivamente el precio spot estimado a partir de los contratos futuros sigue muy de cerca el comportamiento de dicho futuro. También se puede apreciar la alta volatilidad que ha experimentado el precio spot durante ese período de tiempo.

El precio spot alcanzó su nivel más bajo a fines del año 1998 llegando a los US\$10 por barril. A fines del año 2000, sólo 2 años después, se puede apreciar que el precio spot alcanzó su nivel más alto llegando a los US\$40 el barril, lo que representa 4 veces el nivel más bajo alcanzado. Como fue mencionado en la introducción, estas variaciones se producen al alterarse los niveles de los inventarios, de la oferta y la demanda. Esta información es rápidamente capturada por los mercados financieros y se manifiesta a través de estas variaciones de precios.

Sin ser el objetivo de esta tesis analizar las razones económicas particulares que llevan al precio del petróleo a exhibir un cierto comportamiento, la baja del precio del petróleo registrada a fines de 1998 podría explicarse por las condiciones económicas adversas que imperaban por ese entonces a raíz de la crisis asiática. Una economía en recesión implica por lo general una disminución de la demanda por combustibles para llevar a cabo procesos productivos. Si esta disminución de la demanda no se acompaña de una disminución de la oferta entonces es plausible que los precios tiendan a la baja.

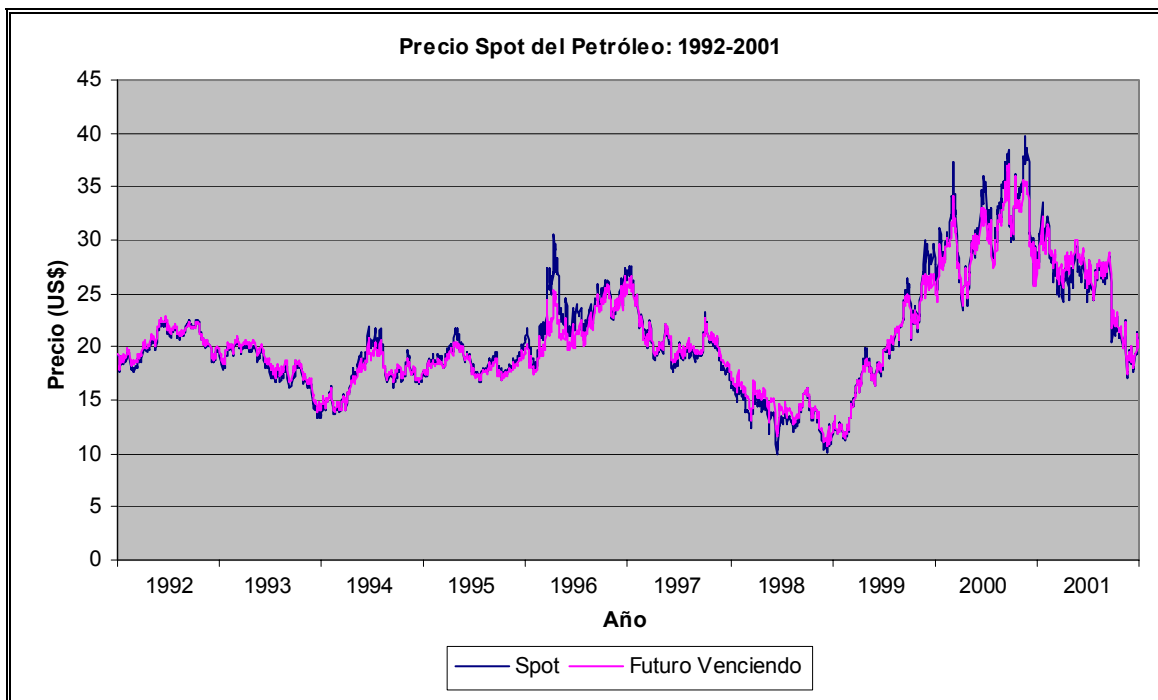


Figura 5-7: Precio spot del petróleo y del futuro más cercano al vencimiento para el período 1992-2001.

Sin embargo, nótese que el precio spot del petróleo a principios de 1992 es muy parecido al nivel que se observa al final del período de estudio a fines del año 2001. Este comportamiento de precios podría ser un indicio de que el precio del petróleo sigue un proceso estocástico con reversión a una media de largo plazo, al menos para el período de tiempo estudiado. Aunque ciertamente no es una razón concluyente ya que perfectamente se podría haber considerado como período de estudio los años 1992-2000, en cuyo caso el precio inicial hubiera sido de US\$20 mientras que el final hubiera llegado a los US\$40. Sin embargo, a simple vista parece ser que el precio del petróleo tiende a revertir a una media de largo plazo.

Una de las grandes ventajas del filtro de Kalman es que entrega junto con la estimación de las variables de estado la varianza del error cometido en dicha estimación. Recuérdese que en el capítulo 2 se mencionó que las variables de estado, vistas como perturbaciones del precio spot, se podían interpretar en función del tiempo que uno espera que dichas perturbaciones perduren en el tiempo. Así, la

variable de estado que revierte más rápido de todas representaría perturbaciones muy transitorias mientras que la que revierte más lenta estaría asociada a las perturbaciones más permanentes.

Una propiedad del filtro de Kalman cuando se trabaja con paneles de datos completos y con modelos dinámicos controlables, cuyos parámetros en el espacio de estados son constantes, es que la varianza del error de estimación de las variables de estado converge exponencialmente a un valor constante.

En esta tesis no se cumple el supuesto que el panel de datos sea completo ni que los parámetros de la ecuación de medida sean constantes, aún cuando los parámetros de las ecuaciones de transición sí lo sean. Como fue explicado en la introducción, los contratos futuros para ciertos vencimientos no se transan todos los días y esto hace que el panel de datos que se disponga sea necesariamente incompleto. Además, dado que la fecha de expiración de cada contrato futuro está fijada, el tiempo que le queda a un futuro para expirar varía con el tiempo. Esto implica que la ecuación de medida, representada por el precio teórico de un futuro para un cierto vencimiento, no tiene parámetros constantes. Las implicancias para la varianza de la estimación de las variables de estado, de trabajar con un panel de datos incompleto y con parámetros que no son constantes en el tiempo, se presentan en las figuras 5-8 y 5-9.

La figura 5-8 muestra la evolución en el tiempo de la desviación estándar del error de estimación de la variable de estado con mayor reversión a la media en el caso del modelo estacionario de 4 factores. Se puede apreciar del gráfico que la evolución de la desviación estándar a lo largo del tiempo tiene forma de sierra, bajando progresivamente para luego volver a subir en forma abrupta. Estas variaciones que se producen mensualmente se deben a la evolución en el tiempo de la madurez de los contratos futuros de corto plazo. La variable de estado con mayor reversión, al representar las perturbaciones de corto plazo, estará pues mejor estimada si se dispone de contratos futuros más cercanos al vencimiento. A medida que pasa el tiempo, los contratos futuros van teniendo cada vez menor madurez y por lo tanto disminuye el error de estimación de la variable de estado que los representa. Sin embargo, cuando estos contratos expiran, se emiten nuevos contratos con

vencimientos en una fecha posterior. Esto hace que el error de estimación vuelva a aumentar abruptamente.

También se puede apreciar que el error de estimación no representa perfectamente una sierra y tiene algunas irregularidades. Estas se producen cuando alguno de los contratos de corto plazo no se transa en los mercados. De todas maneras, el error de estimación vuelve a disminuir cuando se dispone nuevamente de observaciones de precios de futuros de corto plazo.

Aún cuando el error de estimación oscile constantemente a raíz de la madurez variable de los contratos, se puede apreciar que se mantiene constante dentro de un cierto rango provisto que se disponga de las observaciones de futuros de corto plazo.

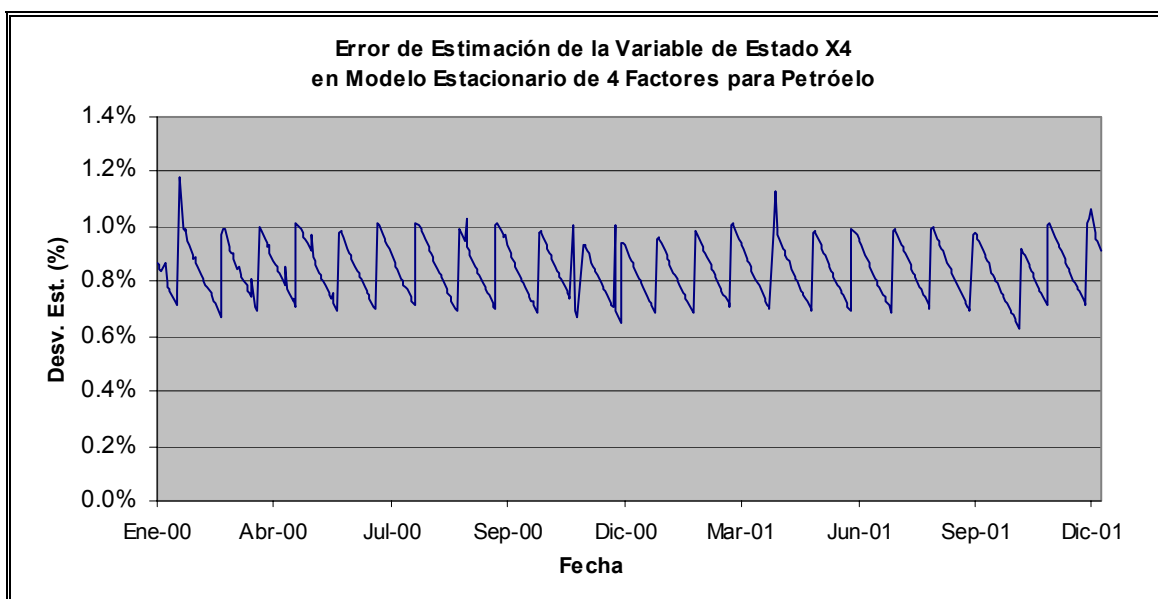


Figura 5-8: Desviación estándar del error de estimación de la variable de estado con mayor reversión a la media del modelo estacionario de 4 factores para el petróleo.

La figura 5-9 muestra la evolución en el tiempo de la desviación estándar del error de estimación de la variable de estado con menos reversión a la media para

un modelo estacionario de 4 factores. El error de estimación mantiene la forma de sierra de la figura 5-8 aunque de manera distinta. En este caso el error de estimación aumenta progresivamente a medida que pasa el tiempo durante intervalos de tiempo anuales para luego caer abruptamente. A diferencia del caso anterior, la variable de estado con menor reversión se estima mejor cuando se disponen de contratos futuros de mayor plazo. Esto ocurre cuando recién se emiten este tipo de contratos. Recuérdese que los contratos futuros de petróleo de mayor plazo se emiten anualmente. Por lo tanto, el menor error de estimación se obtiene justamente cuando los contratos de más largo plazo están recién emitidos. La desviación estándar del error aumenta a medida que estos contratos disminuyen su vencimiento. En esta figura también se puede ver una mayor cantidad de aumentos puntuales del error de estimación. Esto es debido a que los contratos de más largo plazo se transan menos frecuentemente que los de corto plazo y cuando esto ocurre el error de estimación aumenta considerablemente.

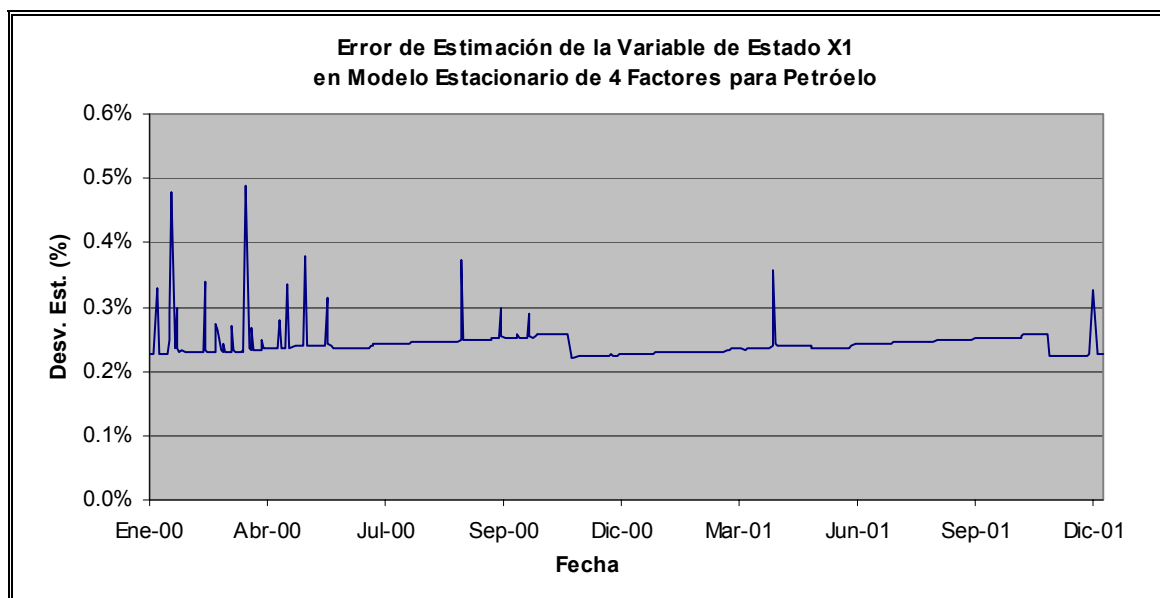


Figura 5-9: Desviación estándar del error de estimación de la variable de estado con menor reversión a la media del modelo estacionario de 4 factores para el petróleo.

5.2.2 Estimación de Parámetros

En esta sección se presentan las estimaciones realizadas para el modelo estacionario y no-estacionario con 1, 2, 3 y 4 variables de estado en cada caso. La calibración de los modelos fue realizada con 3 paneles de datos distintos que abarcan el período 1992-2001 (Panel A) y los sub-períodos 1992-1996 (Panel B) y 1997-2001 (Panel C), como fue descrito en la sección 5.1.

a) Modelo Estacionario

Los parámetros estimados para el modelo estacionario se presentan en las tablas V-3, V-4 y V-5 para el Panel A, B y C respectivamente. Se puede apreciar que en todos los paneles, independientemente del número de factores que tenga el modelo analizado, los parámetros de reversión a la media son estadísticamente distintos de cero.

Los valores de los parámetros de reversión a la media cambian significativamente con respecto al panel de datos utilizado en la estimación. Esto se debe a que los datos no son los mismos entre ambos paneles. Una conclusión preliminar que se puede realizar es que la incorporación de los contratos futuros de largo plazo puede entregar información adicional en la estimación de los parámetros de reversión a la media del modelo, información que puede ser capturada utilizando la metodología de estimación propuesta en esta tesis. Los parámetros de volatilidad y correlación también varían con respecto al período de estimación.

El parámetro d influye en la determinación del precio de largo plazo del commodity y determina el valor esperado del logaritmo del precio spot. Este parámetro es estimado con un alto error en todos los casos. Como la distribución del precio spot es lognormal, el valor esperado de largo plazo del precio spot tiene un componente adicional que está dado por la varianza de largo plazo que tenga el commodity. De los datos empíricos se puede apreciar que la estimación de este parámetro es bastante estable con respecto al panel de datos utilizado y al número de factores del modelo. Varía entre 2,982 y 3,128, lo que representa una variación equivalente en dólares de US\$19,7 y US\$22.

Los premios por riesgo para cada panel de datos y distintos factores de los modelos no son estadísticamente distintos de cero. Esto tiene una relevancia en sí, ya que el hecho que los premios por riesgo sean iguales a cero implica que el precio futuro coincide con el verdadero valor esperado del precio spot y sería en tal caso un estimador insesgado de éste.

La desviación estándar de los errores de medición, representada por el parámetro ε , para un número de factores dados, se mantiene estable con respecto al panel de datos considerado. Sin embargo, como es de esperarse, los modelos con un menor número de factores tienen un mayor error de medición ya que tienen una menor posibilidad de ajustar la curva de precios futuros. El filtro de Kalman considera pues que el menor ajuste es producto de un mayor error de medición.

Tabla V-3: Parámetros estimados del modelo estacionario (Modelo 1) con distintos números de factores a partir del Panel A (1992 – 2001) de datos de petróleo. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.

	4 Factores	3 Factores	2 Factores	1 Factor
a_1	0.025 (0.001)	0.044 (0.001)	0.192 (0.001)	0.381 (0.001)
a_2	0.423 (0.002)	0.503 (0.002)	0.866 (0.003)	-
a_3	1.223 (0.005)	1.688 (0.006)	-	-
a_4	5.541 (0.039)	-	-	-
σ_1	0.223 (0.004)	0.253 (0.006)	0.295 (0.005)	0.159 (0.003)
σ_2	0.232 (0.005)	0.216 (0.005)	0.294 (0.006)	-
σ_3	0.313 (0.008)	0.477 (0.008)	-	-
σ_4	0.260 (0.005)	-	-	-
ρ_{21}	-0.553 (0.020)	-0.627 (0.020)	-0.532 (0.019)	-
ρ_{31}	0.249 (0.028)	0.441 (0.034)	-	-
ρ_{32}	-0.435 (0.025)	-0.249 (0.039)	-	-
ρ_{41}	-0.019 (0.027)	-	-	-
ρ_{42}	0.360 (0.025)	-	-	-
ρ_{43}	-0.326 (0.027)	-	-	-
d	2.990 (0.916)	2.982 (0.755)	3.028 (0.307)	3.006 (0.107)
λ_1	0.011 (0.024)	0.012 (0.034)	0.017 (0.065)	0.042 (0.041)
λ_2	0.002 (0.055)	0.021 (0.052)	0.074 (0.082)	-
λ_3	0.116 (0.090)	0.146 (0.133)	-	-
λ_4	-0.072 (0.080)	-	-	-
ε	0.003 (0.000)	0.005 (0.000)	0.012 (0.000)	0.037 (0.000)
$\log L$	357366	324070	270262	195721

Tabla V-4: Parámetros estimados del modelo estacionario (Modelo 1) con distintos números de factores a partir del Panel B (1992 – 1996) de datos de petróleo. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.

	4 Factores	3 Factores	2 Factores	1 Factor
a_1	0.022 (0.004)	0.113 (0.002)	0.307 (0.003)	0.439 (0.005)
a_2	0.683 (0.013)	1.038 (0.004)	1.173 (0.006)	-
a_3	1.306 (0.012)	4.895 (0.037)	-	-
a_4	7.230 (0.041)	-	-	-
σ_1	0.158 (0.004)	0.176 (0.003)	0.282 (0.008)	0.149 (0.004)
σ_2	0.229 (0.009)	0.176 (0.004)	0.219 (0.006)	-
σ_3	0.247 (0.010)	0.177 (0.005)	-	-
σ_4	0.215 (0.005)	-	-	-
ρ_{21}	-0.330 (0.041)	-0.341 (0.029)	-0.608 (0.025)	-
ρ_{31}	0.270 (0.040)	0.329 (0.032)	-	-
ρ_{32}	-0.709 (0.025)	-0.013 (0.038)	-	-
ρ_{41}	0.050 (0.034)	-	-	-
ρ_{42}	0.341 (0.033)	-	-	-
ρ_{43}	-0.170 (0.038)	-	-	-
d	3.068 (0.736)	3.037 (0.319)	2.986 (0.238)	2.998 (0.110)
λ_1	-0.012 (0.016)	-0.016 (0.037)	-0.032 (0.082)	0.053 (0.048)
λ_2	-0.008 (0.078)	0.133 (0.065)	0.184 (0.081)	-
λ_3	0.168 (0.093)	0.088 (0.073)	-	-
λ_4	0.097 (0.092)	-	-	-
ε	0.002 (0.000)	0.003 (0.000)	0.007 (0.000)	0.032 (0.000)
log L	170085	154686	131973	88724

Tabla V-5: Parámetros estimados del modelo estacionario (Modelo 1) con distintos números de factores a partir del Panel C (1997 – 2001) de datos de petróleo. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.

	4 Factores	3 Factores	2 Factores	1 Factor
a_1	0.024 (0.001)	0.030 (0.001)	0.147 (0.001)	0.392 (0.002)
a_2	0.424 (0.003)	0.463 (0.002)	0.784 (0.003)	-
a_3	1.256 (0.010)	1.473 (0.007)	-	-
a_4	3.567 (0.052)	-	-	-
σ_1	0.254 (0.006)	0.266 (0.008)	0.306 (0.008)	0.183 (0.004)
σ_2	0.305 (0.011)	0.256 (0.009)	0.600 (0.009)	-
σ_3	0.305 (0.011)	0.256 (0.009)	-	-
σ_4	0.366 (0.012)	-	-	-
ρ_{21}	-0.532 (0.030)	-0.603 (0.030)	-0.511 (0.032)	-
ρ_{31}	0.263 (0.038)	0.382 (0.051)	-	-
ρ_{32}	-0.541 (0.034)	-0.392 (0.059)	-	-
ρ_{41}	-0.089 (0.038)	-	-	-
ρ_{42}	0.559 (0.031)	-	-	-
ρ_{43}	-0.584 (0.031)	-	-	-
d	3.026 (1.101)	3.015 (1.047)	3.128 (0.446)	3.077 (0.147)
λ_1	0.017 (0.027)	0.018 (0.032)	0.019 (0.071)	0.068 (0.058)
λ_2	0.040 (0.091)	0.045 (0.076)	0.175 (0.212)	-
λ_3	0.175 (0.136)	0.196 (0.268)	-	-
λ_4	-0.199 (0.149)	-	-	-
ε	0.004 (0.000)	0.005 (0.000)	0.012 (0.000)	0.040 (0.000)
$\log L$	196902	182431	152557	108568

b) Modelo No-Estacionario

Los resultados de la estimación de los parámetros para el modelo no-estacionario se presentan en las tablas V-6, V-7 y V-8 para el panel A, B y C respectivamente. En el caso del modelo no-estacionario, el parámetro de reversión de la primera variable de estado se fija en cero. La diferencia con el caso anterior es que ahora no existe un valor constante de reversión del precio spot de largo plazo, sino que existe una tasa de crecimiento constante del precio spot dada por μ .

Los parámetros de reversión a la media de las variables de estado que sí revierten se comportan de manera similar al caso estacionario. Existe una variación en la estimación de sus valores con respecto al panel de datos utilizado y para cada modelo con un cierto número de factores. De la misma forma, las volatilidades y correlaciones de los factores también están afectas de la misma variación.

Los precios de mercado del riesgo no son estadísticamente distintos de cero debido a su alto error de estimación, al igual que para el caso estacionario. La tasa de crecimiento del precio spot dada por μ , para todos los casos, no es estadísticamente distinta de cero.

Tabla V-6: Parámetros estimados del modelo no-estacionario (Modelo 2) con distintos números de factores a partir del Panel A (1992 – 2001) de datos de petróleo. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.

	4 Factores	3 Factores	2 Factores	1 Factor
a_1	-	-	-	-
a_2	0.415 (0.002)	0.485 (0.002)	0.680 (0.002)	-
a_3	1.201 (0.005)	1.636 (0.006)	-	-
a_4	5.471 (0.039)	-	-	-
σ_1	0.191 (0.003)	0.192 (0.004)	0.162 (0.003)	0.136 (0.004)
σ_2	0.207 (0.004)	0.175 (0.004)	0.191 (0.003)	-
σ_3	0.305 (0.007)	0.507 (0.008)	-	-
σ_4	0.260 (0.005)	-	-	-
ρ_{21}	-0.336 (0.025)	-0.323 (0.025)	-0.045 (0.024)	-
ρ_{31}	0.138 (0.029)	0.310 (0.051)	-	-
ρ_{32}	-0.423 (0.025)	-0.068 (0.051)	-	-
ρ_{41}	-0.010 (0.027)	-	-	-
ρ_{42}	0.420 (0.023)	-	-	-
ρ_{43}	-0.338 (0.027)	-	-	-
μ	0.004 (0.059)	0.006 (0.060)	0.006 (0.051)	0.010 (0.043)
λ_1	0.013 (0.059)	0.015 (0.060)	0.012 (0.051)	0.036 (0.043)
λ_2	0.002 (0.054)	0.015 (0.047)	0.056 (0.053)	-
λ_3	0.117 (0.089)	0.168 (0.152)	-	-
λ_4	-0.073 (0.079)	-	-	-
ε	0.003 (0.000)	0.005 (0.000)	0.015 (0.000)	0.060 (0.000)
$\log L$	357087	323250	256237	162645

Tabla V-7: Parámetros estimados del modelo no-estacionario (Modelo 2) con distintos números de factores a partir del Panel B (1992 – 1996) de datos de petróleo. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.

	4 Factores	3 Factores	2 Factores	1 Factor
a_1	-	-	-	-
a_2	0.681 (0.013)	1.041 (0.004)	1.258 (0.013)	-
a_3	1.283 (0.012)	3.776 (0.013)	-	-
a_4	7.255 (0.038)	-	-	-
σ_1	0.150 (0.003)	0.147 (0.003)	0.127 (0.003)	0.111 (0.004)
σ_2	0.230 (0.009)	0.156 (0.004)	0.179 (0.004)	-
σ_3	0.246 (0.010)	0.160 (0.004)	-	-
σ_4	0.214 (0.005)	-	-	-
ρ_{21}	-0.258 (0.032)	0.027 (0.026)	0.287 (0.014)	-
ρ_{31}	0.242 (0.033)	0.186 (0.014)	-	-
ρ_{32}	-0.714 (0.025)	-0.006 (0.020)	-	-
ρ_{41}	0.036 (0.035)	-	-	-
ρ_{42}	0.348 (0.035)	-	-	-
ρ_{43}	-0.162 (0.040)	-	-	-
μ	-0.007 (0.066)	-0.013 (0.065)	-0.016 (0.065)	0.013 (0.050)
λ_1	-0.019 (0.066)	-0.027 (0.065)	-0.033 (0.065)	0.025 (0.050)
λ_2	-0.012 (0.081)	0.129 (0.059)	0.176 (0.068)	-
λ_3	0.169 (0.095)	0.085 (0.068)	-	-
λ_4	0.101 (0.091)	-	-	-
ε	0.002 (0.000)	0.003 (0.000)	0.009 (0.000)	0.037 (0.000)
$\log L$	170067	153226	125323	84155

Tabla V-8: Parámetros estimados del modelo no-estacionario (Modelo 2) con distintos números de factores a partir del Panel C (1997 – 2001) de datos de petróleo. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.

	4 Factores	3 Factores	2 Factores	1 Factor
a_1	-	-	-	-
a_2	0.415 (0.003)	0.451 (0.002)	0.661 (0.002)	-
a_3	1.239 (0.010)	1.448 (0.006)	-	-
a_4	3.545 (0.073)	-	-	-
σ_1	0.210 (0.004)	0.206 (0.005)	0.195 (0.005)	0.159 (0.007)
σ_2	0.253 (0.007)	0.211 (0.008)	0.337 (0.006)	-
σ_3	0.334 (0.009)	0.705 (0.011)	-	-
σ_4	0.355 (0.009)	-	-	-
ρ_{21}	-0.279 (0.025)	-0.192 (0.040)	-0.188 (0.037)	-
ρ_{31}	0.070 (0.026)	0.031 (0.056)	-	-
ρ_{32}	-0.442 (0.027)	-0.217 (0.085)	-	-
ρ_{41}	0.018 (0.025)	-	-	-
ρ_{42}	0.572 (0.028)	-	-	-
ρ_{43}	-0.554 (0.021)	-	-	-
μ	0.020 (0.093)	0.027 (0.092)	0.026 (0.087)	0.004 (0.072)
λ_1	0.035 (0.093)	0.041 (0.092)	0.039 (0.087)	0.035 (0.072)
λ_2	0.026 (0.080)	0.039 (0.069)	0.129 (0.120)	-
λ_3	0.185 (0.128)	0.192 (0.280)	-	-
λ_4	-0.208 (0.143)	-	-	-
ε	0.004 (0.000)	0.006 (0.000)	0.015 (0.000)	0.072 (0.000)
$\log L$	196754	182156	145438	85204

5.2.3 Ajuste de los Modelos a los Precios Observados dentro de la Muestra

En esta sección se analiza el ajuste de los distintos modelos a los precios futuros de petróleo observados que fueron utilizados en la estimación de los parámetros. El análisis del ajuste de los modelos con datos fuera de la muestra se posterga para la sección 5.2.4.

Las figuras 5-10 a la 5-17 muestran gráficamente el ajuste de las curvas teóricas de futuros a los precios observados para ciertos días particulares. Se eligieron dos días del panel B y dos del panel C. La elección de los días en cada panel se basó en mostrar casos en los cuales la curva está en “contango”, que es cuando los precios futuros de menor vencimiento son mayores que los de más largo plazo, así como cuando está en “backwardation” que es el caso opuesto. Una estructura de precios futuros en contango implica que la curva de futuros es decreciente con respecto al vencimiento de los contratos, mientras que cuando está en backwardation la curva es creciente.

Para cada día elegido son graficadas las curvas de precios para los modelos estacionario y no-estacionario. Los días que se muestran en las figuras son representativos de la muestra.

El primer día elegido es el 31/03/1994 y se muestra en las figuras 5-10 y 5-11. En este día la curva de futuros estaba en contango. Se puede apreciar que el futuro de mayor plazo disponible es de aproximadamente 3 años. Para el caso del modelo estacionario, los modelos de 3 y 4 factores valorizan de manera exacta los precios observados a diferencia de los modelos de 1 y 2 factores. Los modelos no-estacionarios de 2, 3 y 4 factores valorizan los contratos de manera similar al modelo estacionario. Sin embargo, el modelo no-estacionario de 1 factor valoriza mucho peor los contratos futuros que su equivalente estacionario.

Las figuras 5-12 y 5-13 muestran curvas de futuro de petróleo para el día 31/12/1996 en el cual la curva está en backwardation. El precio spot para ese día era cercano a los US\$29 el barril para los modelos de 3 y 4 factores. Este precio es muy distinto del precio spot de US\$14 para el día analizado anteriormente. Sin embargo, para ambos días el precio futuro teórico a 10 años es de US\$21 aproximadamente en

el caso de los modelos de 4 factores. El modelo de 3 factores entrega precios futuros a 10 años de US\$21 para el día 31/03/1994 y de US\$20 para el día 31/12/1996.

Las figuras 5-14 a la 5-17 muestran resultados similares para dos días del panel C de datos en el cual se disponen de observaciones de mayor plazo.

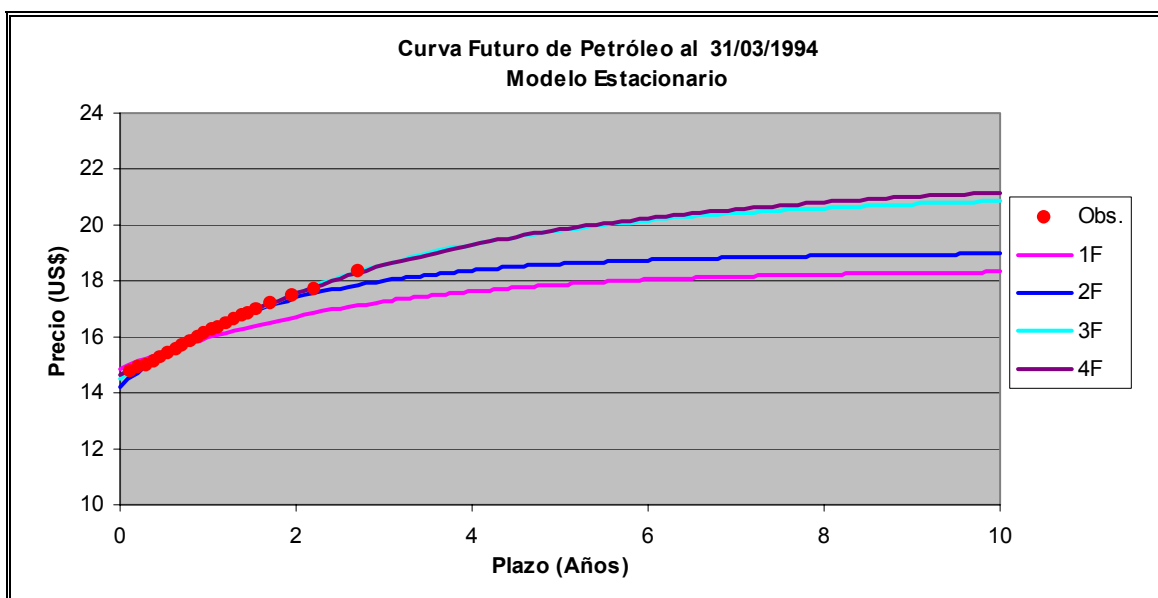


Figura 5-10: Precios observados y curva teórica de futuros de petróleo del modelo estacionario al día 31/03/1994.

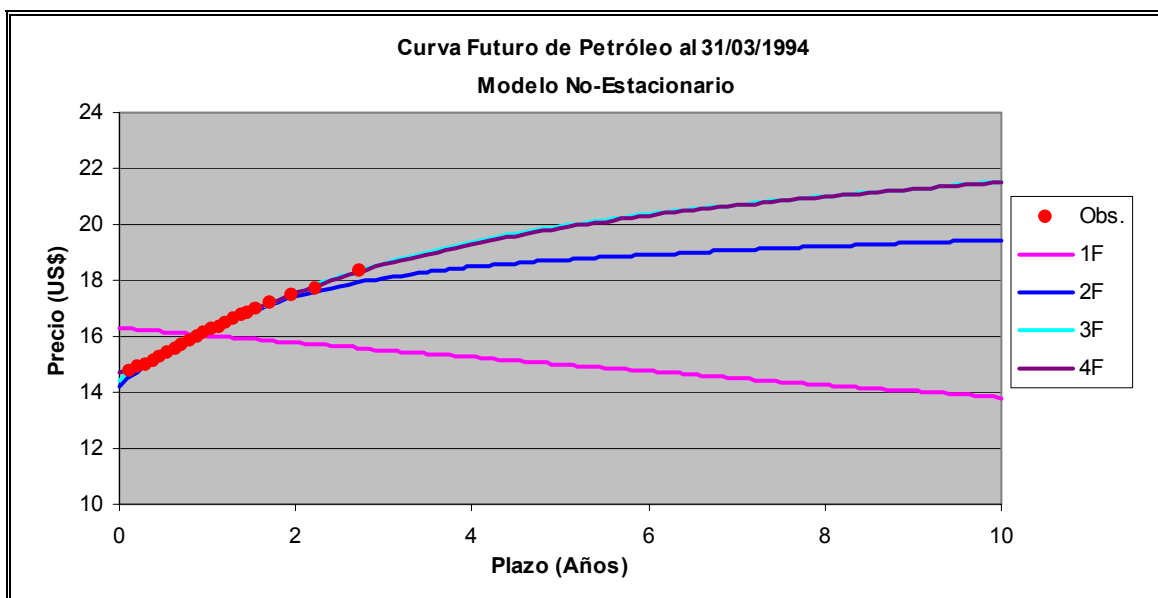


Figura 5-11: Precios observados y curva teórica de futuros de petróleo del modelo no-estacionario al día 31/03/1994.

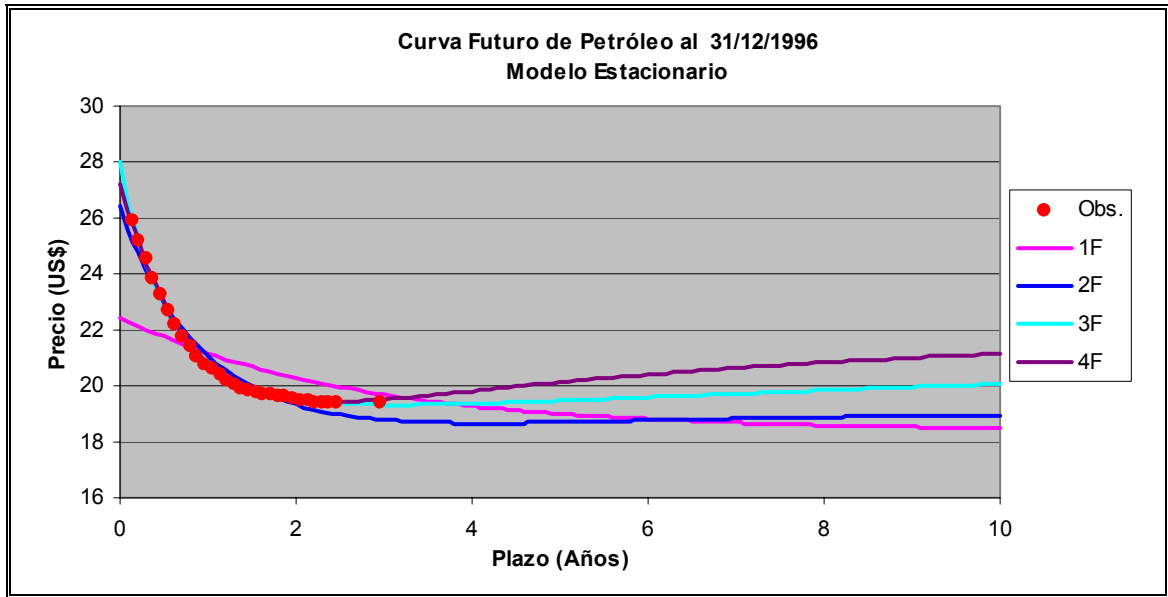


Figura 5-12: Precios observados y curva teórica de futuros de petróleo del modelo estacionario al día 31/12/1996.

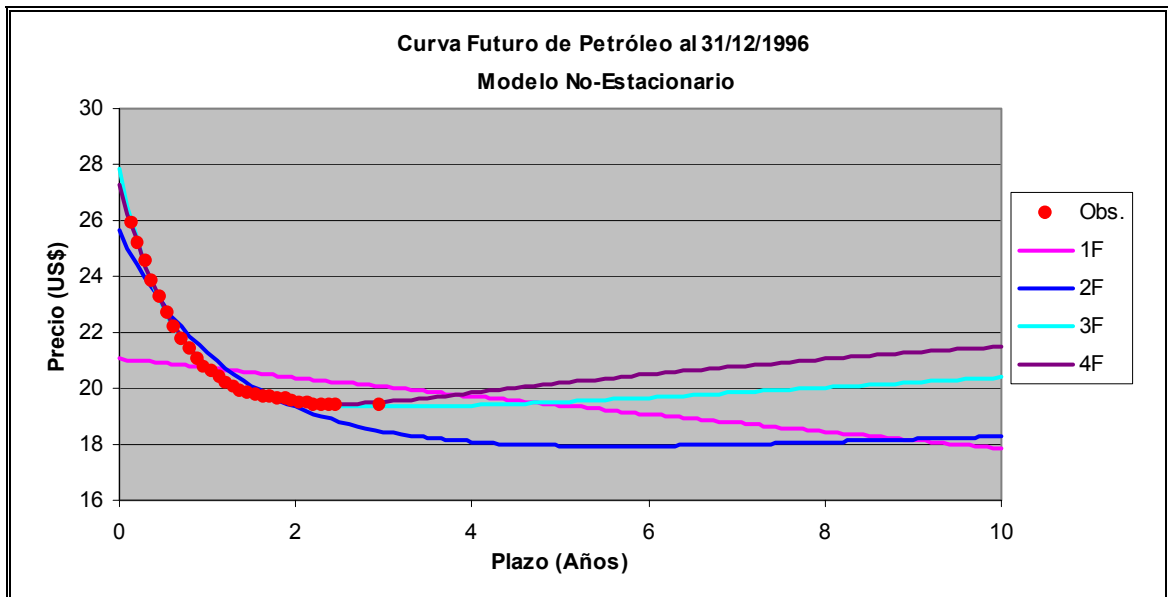


Figura 5-13 Precios observados y curva teórica de futuros de petróleo del modelo no-estacionario al día 31/12/1996.

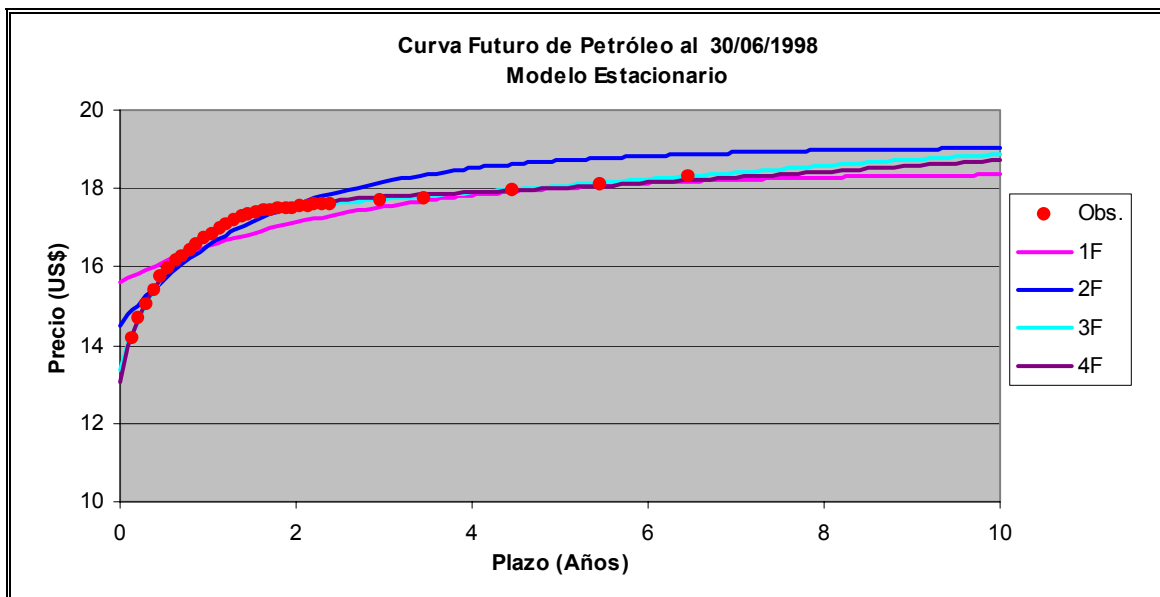


Figura 5-14: Precios observados y curva teórica de futuros de petróleo del modelo estacionario al día 30/06/1998.

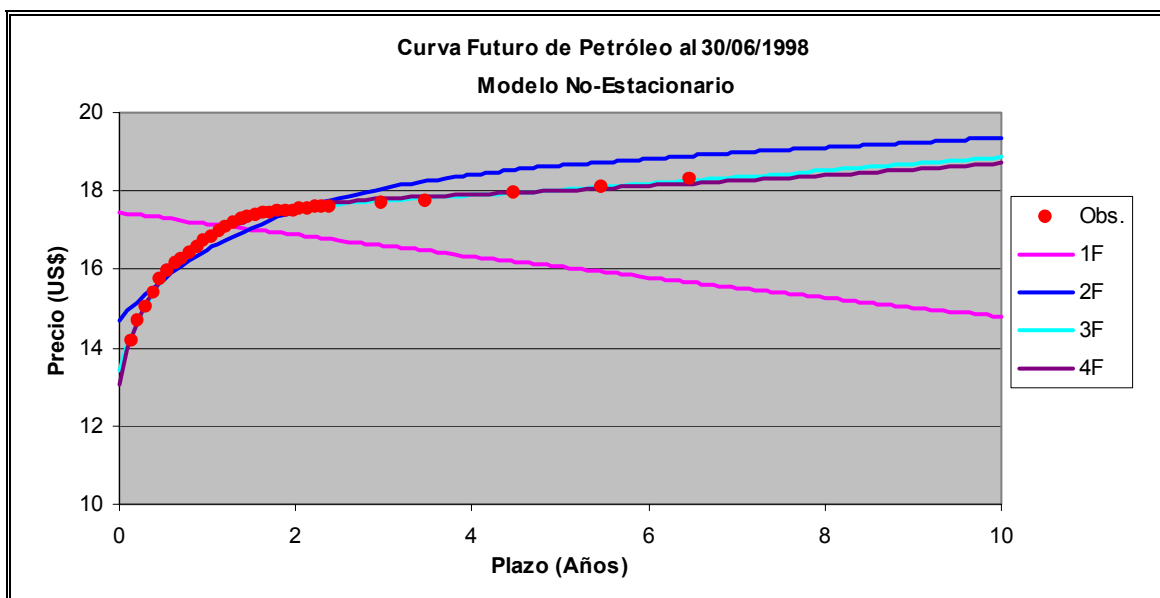


Figura 5-15: Precios observados y curva teórica de futuros de petróleo del modelo no-estacionario al día 30/06/1998.

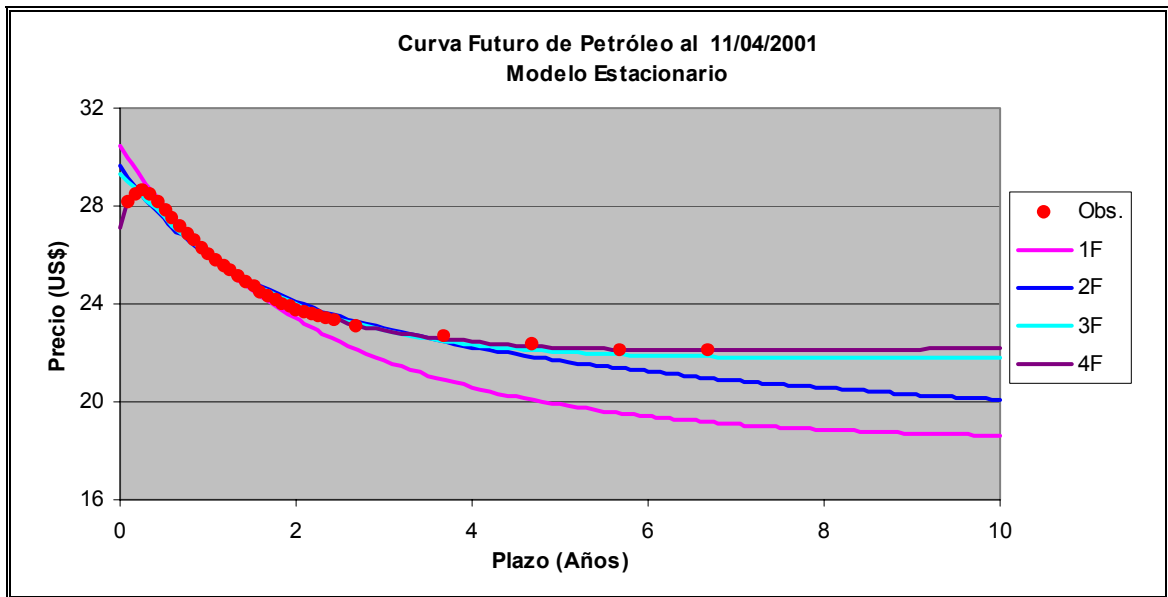


Figura 5-16 Precios observados y curva teórica de futuros de petróleo del modelo estacionario al día 11/04/2001.

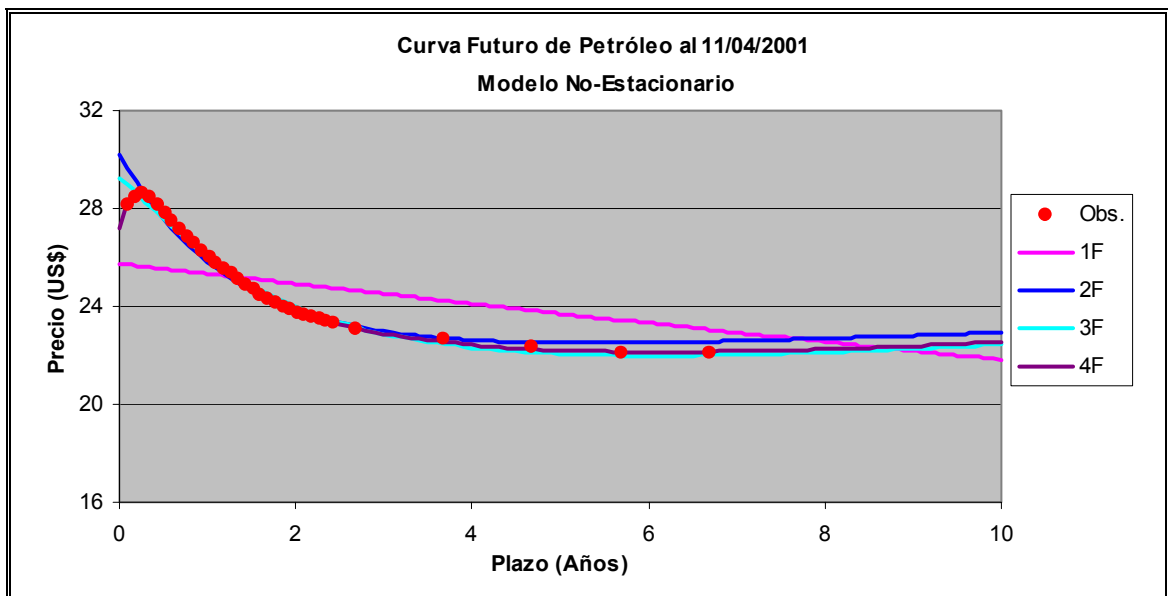


Figura 5-17: Precios observados y curva teórica de futuros de petróleo del modelo no-estacionario al día 11/04/2001.

Para analizar el ajuste de los distintos modelos en cada panel de datos se calcularon 3 medidas distintas de bondad de ajuste. La primera de ellas es el RMSE⁴³ que representa la raíz cuadrada del error cuadrático medio entre el valor teórico y el valor observado de cada futuro que se disponía en la muestra. El análisis se realizó en términos porcentuales para cuantificar de manera más natural las magnitudes.

La tabla V-9 muestra el RMSE porcentual para cada uno de los paneles de datos estimados para cada uno de los modelos con distintos factores. Se puede ver que los modelos de 1 y 2 factores no logran realizar una valorización muy exacta de los futuros transados, en particular el modelo no-estacionario de 1 factor. El modelo de 3 factores reduce considerablemente el error de valorización y el modelo de 4 factores logra reducir en menor medida dicho error. No se pueden apreciar diferencias importantes entre el modelo estacionario y el no-estacionario, en particular para el modelo de 4 factores.

El análisis de RMSE presentado en la tabla V-9 es global y no diferencia entre contratos de distinta madurez. Las figuras 5-18 y 5-19 presentan el RMSE calculado por tipo de contrato para el panel A de datos, que es representativo para los demás paneles. Se puede apreciar que los modelos de 1 y 2 factores claramente tienen grandes errores de valorización en los contratos futuros de corto y de muy largo plazo. La valorización de los contratos futuros a distintos vencimientos es más homogénea para los modelos de 3 y 4 factores. No se aprecian diferencias entre los modelos estacionario y no-estacionario, lo cual es consistente con lo mencionado en el párrafo anterior.

⁴³ RMSE es la sigla de “Root Mean Square Error”.

Tabla V-9: RMSE porcentual del ajuste de ambos modelos a los precios futuros de petróleo observados utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

		Modelo Estacionario	Modelo No-Estacionario
Panel A	1F	3.67%	5.92%
	2F	1.18%	1.46%
	3F	0.50%	0.51%
	4F	0.29%	0.29%
Panel B	1F	3.17%	3.70%
	2F	0.68%	0.87%
	3F	0.29%	0.31%
	4F	0.16%	0.16%
Panel C	1F	3.93%	7.12%
	2F	1.20%	1.46%
	3F	0.53%	0.53%
	4F	0.35%	0.35%

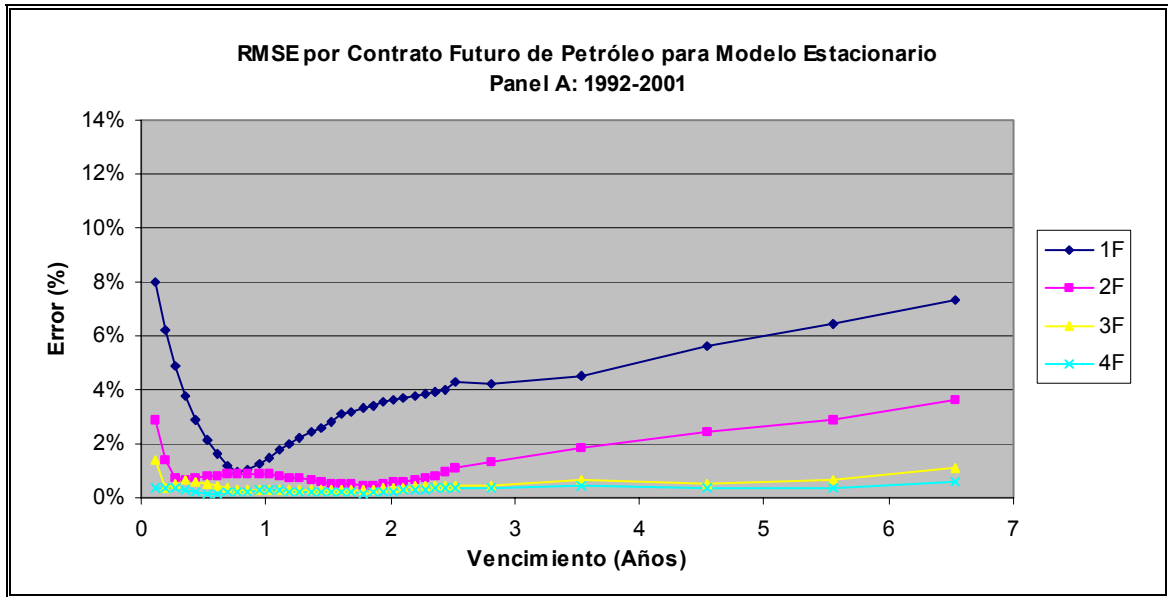


Figura 5-18: RMSE porcentual del ajuste del modelo estacionario a los precios futuros de petróleo observados del Panel A para cada vencimiento.

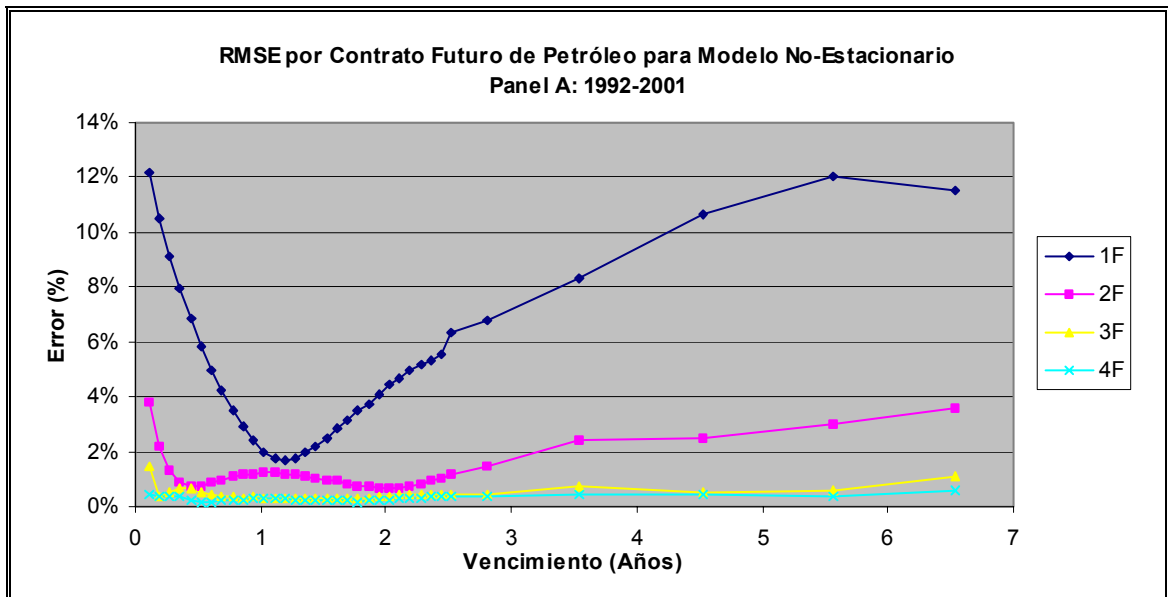


Figura 5-19: RMSE porcentual del ajuste del modelo no-estacionario a los precios futuros de petróleo observados del Panel A para cada vencimiento.

Se calcularon además otras dos medidas de ajuste. La primera de ellas es el error absoluto medio o MAE⁴⁴. Este se obtiene como el promedio del valor absoluto de la diferencia entre el valor teórico y el precio observado de los distintos futuros de la muestra. Al igual que en el caso del cálculo del RMSE, se calcularon los errores de manera porcentual. La otra medida de error que fue calculada es el error absoluto máximo cometido en la valorización de los contratos futuros con respecto a los precios observados. Además, como una forma de verificar el supuesto de que los errores de estimación tienen media cero, se calculó el sesgo cometido en la valorización de los futuros con respecto a los precios observados. A diferencia del MAE, el sesgo no considera el valor absoluto de los errores sino que se calcula directamente a partir de la diferencia entre ambos precios.

Los resultados de estos cálculos se presentan en la tabla V-10. Como es de esperarse, el MAE es muy similar al RMSE aunque menor en todos los casos. El error máximo puede llegar a ser considerablemente grande para los modelos de 1 y 2 factores, y un poco menos importante para los modelos de 3 factores. El modelo de 4 factores valoriza los contratos futuros asombrosamente bien y obtiene un 4% de error máximo cometido en la valorización de los contratos futuros. El sesgo cometido en la valorización de los contratos es en todos los casos muy cercano a cero lo que garantiza que el modelo no está sesgado. Sin embargo, el sesgo es mucho más pequeño en los modelos de más factores.

⁴⁴ MAE es la sigla de “Mean Absolute Error”.

Tabla V-10: Error absoluto medio (MAE), error absoluto máximo y sesgo porcentual del ajuste de ambos modelos a los precios futuros observados de petróleo utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

		MAE		Error Máximo		Sesgo	
		Modelo Estacionario	Modelo No-Estacionario	Modelo Estacionario	Modelo No-Estacionario	Modelo Estacionario	Modelo No-Estacionario
Panel A	1F	2.58%	3.98%	31.84%	40.65%	-0.0016%	0.0004%
	2F	0.74%	0.98%	17.67%	21.34%	-0.0003%	-0.0004%
	3F	0.32%	0.32%	9.82%	10.12%	-0.0002%	-0.0002%
	4F	0.20%	0.20%	4.78%	4.76%	-0.0001%	-0.0001%
Panel B	1F	2.32%	2.34%	30.39%	30.85%	-0.0020%	-0.0009%
	2F	0.42%	0.56%	13.66%	15.69%	0.0002%	0.0000%
	3F	0.21%	0.22%	3.65%	4.82%	0.0000%	0.0000%
	4F	0.12%	0.12%	2.18%	2.18%	0.0000%	0.0000%
Panel C	1F	2.74%	5.11%	27.79%	41.07%	0.0017%	0.0010%
	2F	0.79%	1.01%	15.74%	18.54%	-0.0005%	-0.0003%
	3F	0.36%	0.36%	9.19%	9.43%	-0.0003%	-0.0003%
	4F	0.24%	0.24%	5.18%	5.22%	-0.0002%	-0.0002%

5.2.4 Ajuste de los Modelos a los Precios Observados fuera de la Muestra

Siguiendo a Schwartz (1997), se realizó la comparación de los modelos tomando en consideración su capacidad para valorizar contratos futuros observados durante un período de tiempo que no se utilizó en la estimación de los parámetros del modelo. El análisis se realizó recalibrando los modelos utilizando los datos del período 1992-2000 y se cuantificó su capacidad para valorizar los futuros observados durante el año 2001. El ajuste de valorización de los datos fuera de la muestra se comparó con el ajuste obtenido al valorizar los futuros observados durante el año 2001 con los parámetros del panel A de datos, que incluye ese año.

La tabla V-11 presenta el RMSE porcentual del ajuste de los modelos estacionario y no-estacionario de 1, 2, 3 y 4 factores durante el año 2001 utilizando los parámetros calibrados con datos dentro y fuera de la muestra. Se puede apreciar que a medida que aumenta el número de factores el ajuste del modelo calibrado con datos fuera de la muestra es más parecido al del modelo calibrado utilizando los precios del año 2001. La tabla V-12 presenta el error absoluto medio (MAE) porcentual de ajuste y la tabla V-13 el error absoluto máximo de ajuste del análisis realizado. Los resultados observados son similares a los obtenidos para el RMSE. Se puede concluir que para el caso del petróleo los modelos de 3 y 4 factores se comportan extremadamente bien para valorizar contratos fuera de la muestra durante el año 2001. El sesgo del error de valorización de los futuros observados, que se muestra en la tabla V-14, es también muy similar en ambos casos. No existen sesgos en la valorización teórica de contratos futuros utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.

Tabla V-11: Comparación del RMSE porcentual del ajuste de ambos modelos a los precios futuros de petróleo observados del año 2001, utilizando parámetros calibrados con datos dentro y fuera de la muestra.

	Modelo Estacionario		Modelo No-Estacionario	
	RMSE dentro de la muestra	RMSE fuera de la muestra	RMSE dentro de la muestra	RMSE fuera de la muestra
1F	3.83%	4.91%	5.50%	5.82%
2F	1.10%	1.26%	1.36%	1.58%
3F	0.60%	0.67%	0.60%	0.64%
4F	0.36%	0.39%	0.36%	0.38%

Tabla V-12: Comparación del MAE porcentual del ajuste de ambos modelos a los precios futuros de petróleo observados del año 2001, utilizando parámetros calibrados con datos dentro y fuera de la muestra.

	Modelo Estacionario		Modelo No-Estacionario	
	MAE dentro de la muestra	MAE fuera de la muestra	MAE dentro de la muestra	MAE fuera de la muestra
1F	2.55%	3.60%	4.41%	4.66%
2F	0.77%	0.86%	0.94%	1.12%
3F	0.45%	0.51%	0.45%	0.48%
4F	0.27%	0.30%	0.27%	0.29%

Tabla V-13: Comparación del error absoluto máximo porcentual del ajuste de ambos modelos a los precios futuros de petróleo observados del año 2001, utilizando parámetros calibrados con datos dentro y fuera de la muestra.

	Modelo Estacionario		Modelo No-Estacionario	
	Error máximo dentro de la muestra	Error máximo fuera de la muestra	Error máximo dentro de la muestra	Error máximo fuera de la muestra
1F	15.60%	17.79%	26.03%	26.73%
2F	7.22%	7.73%	8.67%	9.17%
3F	5.03%	5.04%	5.02%	5.06%
4F	4.43%	4.55%	4.53%	4.61%

Tabla V-14: Comparación del sesgo porcentual del ajuste de ambos modelos a los precios futuros de petróleo observados del año 2001, utilizando parámetros calibrados con datos dentro y fuera de la muestra.

	Modelo Estacionario		Modelo No-Estacionario	
	Sesgo dentro de la muestra	Sesgo fuera de la muestra	Sesgo dentro de la muestra	Sesgo fuera de la muestra
1F	-1.1487%	-1.7982%	0.0349%	0.0334%
2F	-0.0444%	-0.0976%	0.0006%	0.0008%
3F	-0.0017%	-0.0046%	0.0000%	-0.0001%
4F	0.0000%	0.0000%	-0.0003%	0.0000%

5.2.5 Ajuste de los Modelos a la Estructura de Volatilidad Observada de los Retornos de los Precios Futuros

Otra medida de ajuste importante que debe poseer un modelo de precios de commodities es qué tan bien representa la estructura de volatilidades de los contratos futuros. Por estructura de volatilidades de los futuros se entenderá la curva de la volatilidad de los retornos de los contratos futuros para cada madurez. La determinación de una estructura correcta de volatilidad es importante si se requiere valorizar ciertos proyectos que dependen del precio de un commodity. Como se mencionó en la introducción de este capítulo, la teoría de opciones reales considera que ciertos proyectos con flexibilidades son más parecidos a un portafolio de opciones que de bonos. Como el valor de una opción depende fuertemente de la volatilidad del activo subyacente, lo mismo pasa con un proyecto con flexibilidad de algún tipo. Para más información sobre el tema ver Cortazar (1999).

Si se denota por $F(t, \tau)$ al futuro con madurez τ observado en el instante t y por $\mu_F(t, \tau) = \log(F(t, \tau) / F(t - \Delta t, \tau))$ al retorno continuo de un futuro con madurez τ entre los instantes $t - \Delta t$ y t , esta curva se puede obtener directamente de los futuros observados como:

$$\sigma_F^2(\tau) = \frac{1}{T-1} \sum_t (\mu_F(t, \tau) - \bar{\mu}_F(\tau))^2 \quad (5.1)$$

donde $\bar{\mu}_F(t)$ es el retorno promedio de un futuro con madurez τ durante el período de tiempo considerado.

Por otro lado, en la sección 3.5 se mostró que para el modelo estacionario la estructura de volatilidades de los futuros está dada por:

$$\sigma_F^2(\tau) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} e^{-(a_i + a_j)\tau} \quad (5.2)$$

mientras que para el modelo no-estacionario esta se calcula como:

$$\sigma_F^2(\tau) = \sigma_1^2 + \sum_{i,j \neq 1} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} e^{-(a_i + a_j)\tau} \quad (5.3)$$

A partir de estas fórmulas se puede calcular la estructura de volatilidades teórica y compararla con la que se calcula directamente de los futuros observados. Se espera que un buen modelo de precios pueda, además de realizar una valorización precisa de los precios observados de los futuros, ajustarse correctamente a la estructura de volatilidad empírica.

Uno de los primeros trabajos que investiga las implicancias de la estructura de volatilidad de los precios futuros de commodities es Cortazar y Schwartz (1994). En el trabajo los autores realizan un análisis de componentes principales para determinar el número de factores estocásticos que determinan la estructura de volatilidad de los futuros de cobre. Los autores concluyen que se requieren 3 factores para explicar dicha estructura de volatilidad. Schwartz (1997) también analiza la estructura de volatilidad teórica de los futuros de cobre y petróleo utilizando una metodología similar a la de esta tesis.

Una característica importante de la estructura de volatilidad de los futuros de commodities es que la reversión a la media en los precios implica que la volatilidad de los retornos de los futuros de más largo plazo debe ser menor a la volatilidad de los de más corto plazo. Este tipo de comportamiento es lo que generalmente se llama la hipótesis de Samuelson. Bessembinder et al. (1996) investigan esta hipótesis empíricamente para distintos tipos de commodities comerciales y financieros. Los autores concluyen que la hipótesis de Samuelson se observa con mayor claridad en los mercados de futuros de commodities comerciales, como el petróleo y el cobre, en los cuales existen altos retornos por conveniencia.

Las figuras 5-20 a la 5-25 muestran la estructura de volatilidad teórica de cada uno de los modelos con los parámetros estimados con cada uno de los paneles de datos y se compara con la estructura de volatilidad empírica.

Se puede ver que en todos los paneles de datos la estructura de volatilidad empírica muestra mayores volatilidades para contratos futuros con menores vencimientos que para los contratos futuros con vencimientos de largo plazo. O sea, la estructura de volatilidad empírica es decreciente en la madurez de los contratos. El panel B tiene un menor número de estimaciones empíricas de la volatilidad debido a que durante ese período algunos contratos futuros con ciertos vencimientos no se

transaban o se tuvo que agrupar a ciertos contratos para poder calcular una volatilidad aproximada. El panel C por el contrario tiene muchas más observaciones de volatilidad.

La estructura de volatilidad teórica de los modelos de 1 factor queda en todos los casos por debajo de la estructura de volatilidad empírica. Una posible explicación de ello proviene del hecho que cuando el modelo tiene un solo factor, la única variable de estado no observable coincide con el precio spot. En este caso, la estructura de precios que mejor se ajusta a los futuros observados tiende a ser un promedio de los futuros observados. Esto se debe a que el filtro de Kalman cree que el mal ajuste del modelo se debe a que los precios se observan con mucho error de medición y por lo tanto filtra los cambios de precios que se observan, eliminando este error. Este proceso de filtraje reduce pues parte de la volatilidad que exhiben los futuros. Para los modelos de 2 factores, el ajuste de la estructura de volatilidad es mejor que para los modelos de 1 factor aunque como se puede ver de las figuras no logra capturar correctamente la forma de la curva.

En el caso de los modelos de 3 factores se observa una alta sobrestimación de la volatilidad de corto plazo para los paneles A y C. Si bien es cierto que en el largo plazo la volatilidad teórica converge a la empírica, la volatilidad teórica del futuro de más corto plazo puede variar entre 60% y 70% mientras que la empírica está en el rango de 33% y 39% para los paneles A y C respectivamente. Esta misma sobrestimación de la volatilidad de corto plazo utilizando el filtro de Kalman se ve en el trabajo que presentan Manoliu y Tompaidis (2002) utilizando futuros de gas natural.

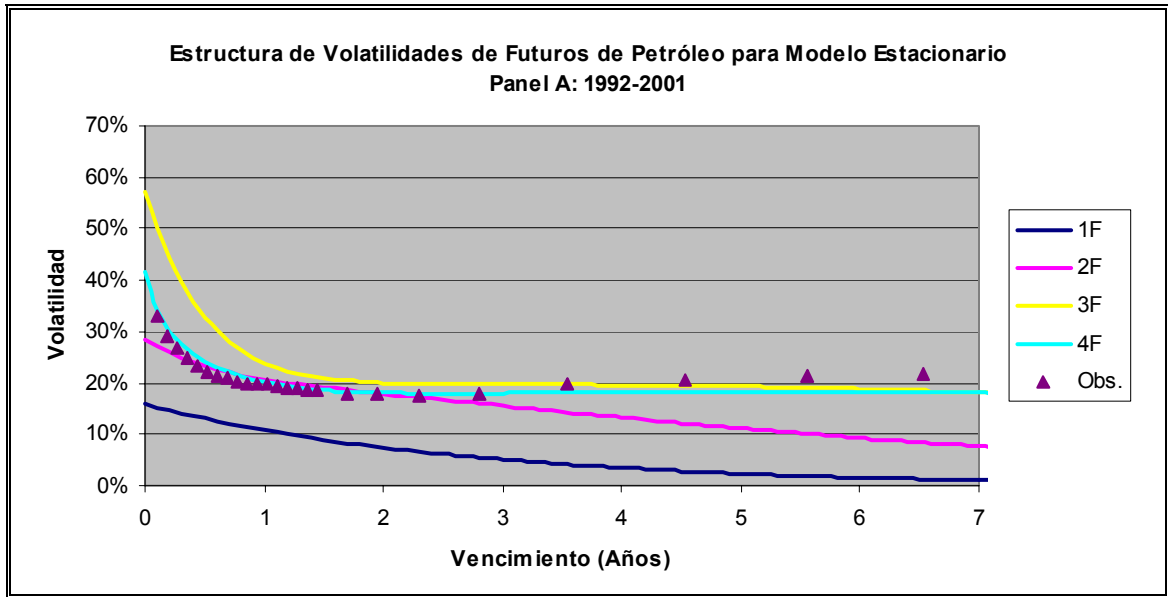


Figura 5-20: Estructura de volatilidades instantáneas de los retornos de futuros de petróleo para modelo estacionario – Panel A:1992-2001.

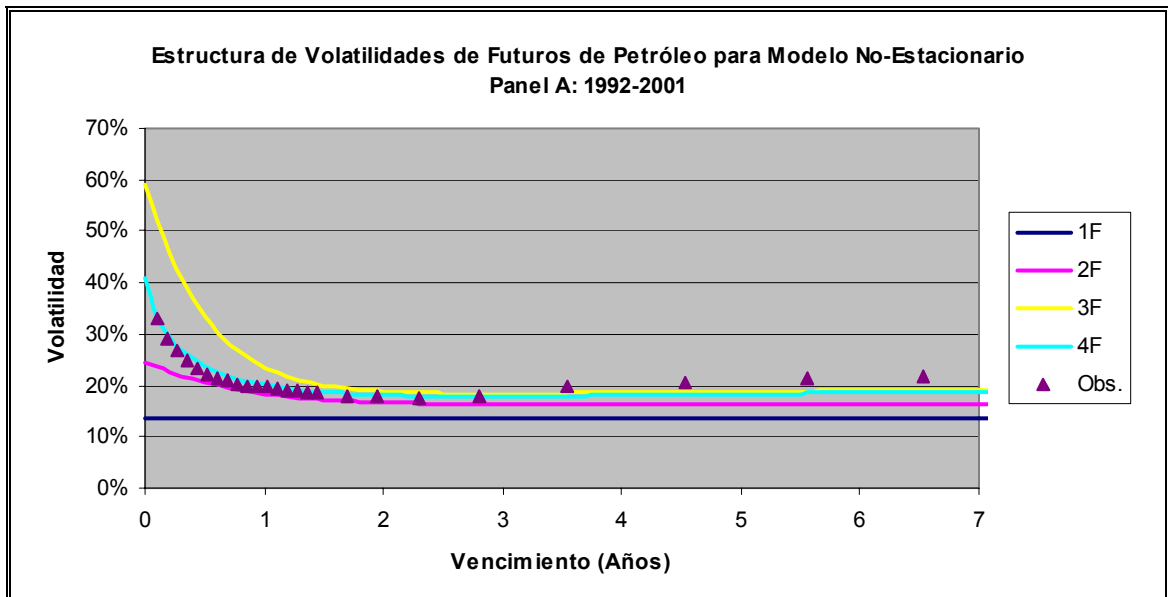


Figura 5-21: Estructura de volatilidades instantáneas de los retornos de futuros de petróleo para modelo no-estacionario – Panel A:1992-2001.

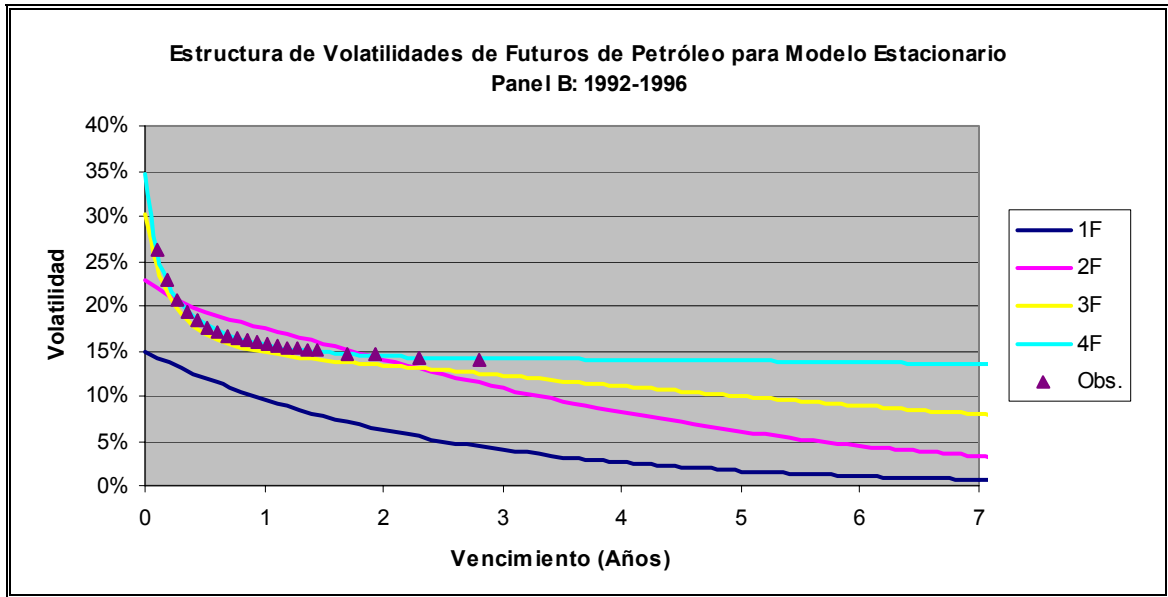


Figura 5-22: Estructura de volatilidades instantáneas de los retornos de futuros de petróleo para modelo estacionario – Panel B:1992-1996.

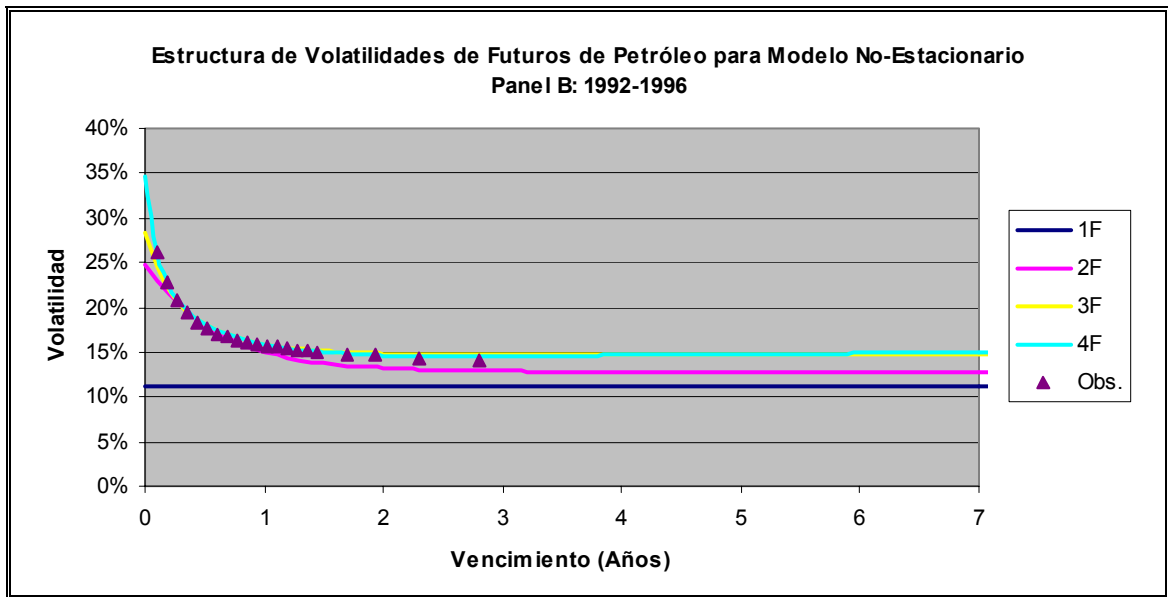


Figura 5-23: Estructura de volatilidades instantáneas de los retornos de futuros de petróleo para modelo no-estacionario – Panel B:1992-1996.

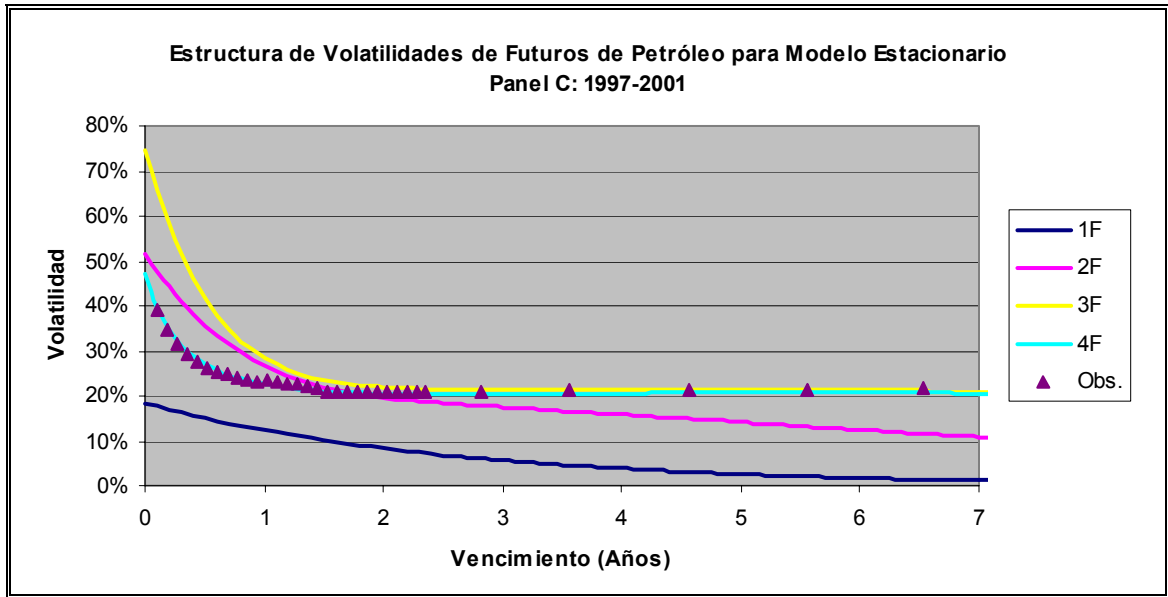


Figura 5-24: Estructura de volatilidades instantáneas de los retornos de futuros de petróleo para modelo estacionario – Panel C:1997-2001.

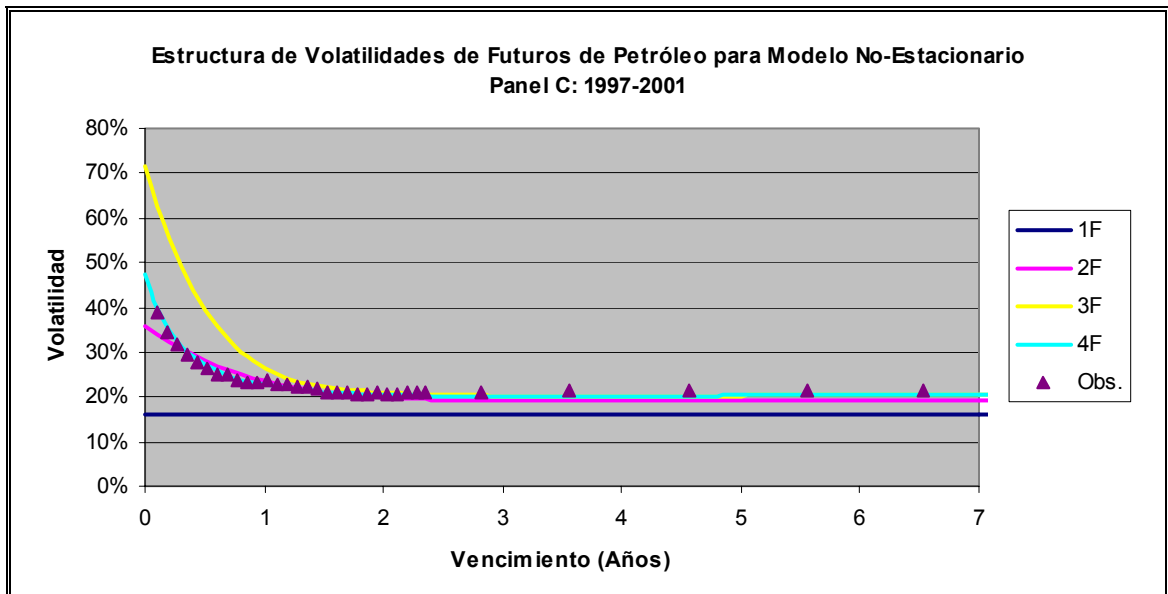


Figura 5-25: Estructura de volatilidades instantáneas de los retornos de futuros de petróleo para modelo no-estacionario – Panel C:1997-2001.

La razón por la cual ocurre este fenómeno es que la volatilidad no sólo afecta la dinámica de las variables de estado sino que también forma parte de la fórmula de valorización de un contrato futuro. Recordemos que el precio teórico de un contrato futuro para el modelo estacionario es:

$$F(\mathbf{x}_t, t, T) = \exp \left(\sum_{i=1}^N e^{-a_i(T-t)} x_i(t) - \sum_{i=1}^N \frac{1 - e^{-a_i(T-t)}}{a_i} \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(a_i+a_j)(T-t)}}{a_i + a_j} + d \right) \quad (5.4)$$

mientras que para el modelo no-estacionario es:

$$F(\mathbf{x}_t, t, T) = \exp \left(x_1(t) + \sum_{i=2}^N e^{-a_i(T-t)} x_i(t) + \mu t + (\mu - \lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2)(T-t) - \sum_{i=2}^N \frac{1 - e^{-a_i(T-t)}}{a_i} \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq 1} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(a_i+a_j)(T-t)}}{a_i + a_j} \right) \quad (5.5)$$

Se puede ver que ambas ecuaciones dependen explícitamente de la volatilidad de las variables de estado. Esta dependencia es una consecuencia de la desigualdad de Jensen. Como el precio spot es una función convexa de las variables de estado, bajo condiciones de incertidumbre el valor esperado del precio spot será mayor que el valor esperado de las variables de estado. Como se vio en el Capítulo 3, el valor teórico de un futuro es justamente el valor esperado del precio spot bajo la medida de probabilidad ajustada por riesgo. La magnitud de esta diferencia está dada entonces por el término que incorpora los parámetros de volatilidad y correlación.

En ciertos casos en los cuales la función de verosimilitud se pueda mejorar al realizar una mejor valorización de los precios observados, los parámetros de volatilidad y correlación del modelo no entregarán una estructura correcta de volatilidades. Esta hipótesis se pudo comprobar empíricamente al realizar estimaciones de los modelos de 3 factores sin considerar los parámetros de volatilidad en la función de valorización. En dichas estimaciones, que por cierto no son correctas de un punto de vista teórico, la estructura de volatilidad teórica se ajustaba muy bien a la volatilidad empírica de los contratos. Sin embargo, la divergencia de la estructura

de volatilidad teórica en el caso del modelo de 3 factores no implica necesariamente que este modelo deba realizar un ajuste pobre de la estructura de volatilidad. Lo que sí se puede concluir es que el modelo de 3 factores estimado con el filtro de Kalman y maximizando la función de verosimilitud de las innovaciones entrega una estructura de volatilidad teórica sobrestimada en el corto plazo.

El modelo de 4 factores en cambio realiza un ajuste muy preciso de la estructura de volatilidad en todos los paneles de datos. Esta fue una de las razones principales para calibrar este modelo, aún cuando ambos modelos (de 3 y 4 factores) obtienen valorizaciones teóricas similares a los futuros observados.

5.2.6 Valorización y Volatilidad de Futuros de Largo Plazo

En el capítulo 3 se mostró que las diferencias principales entre el modelo estacionario y el no-estacionario se manifiestan en sus implicancias para la valorización de los contratos futuros de largo plazo. Esto se debe a que en el modelo estacionario las perturbaciones de precios no implican cambios estructurales en el comportamiento de largo plazo del precio spot del commodity, mientras que en el modelo no-estacionario parte de las perturbaciones son permanentes.

Para analizar las diferencias en la valorización de los futuros de largo plazo, se calcularon los precios teóricos entregados por ambos modelos para futuros de petróleo con vencimientos a 10 y 20 años durante el período 1992-2001. Es importante recordar que ciertas inversiones relacionadas con el petróleo pueden tener horizontes de tiempo de 20 años o más.

La tabla V-15 presenta el RMSE, MAE, la diferencia absoluta máxima y el sesgo calculados a partir de la diferencia entre un futuro teórico con vencimiento a 10 años entregada por el modelo estacionario y no-estacionario. Para los modelos de 1 y 2 factores esta diferencia es significativa, llegando a ser de US\$2,73 y US\$1,30 desde el punto de vista del RMSE. Para los modelos de 3 y 4 factores, la diferencia entre ambas especificaciones es de US\$0,40 y US\$0,21 en RMSE respectivamente, aunque la diferencia máxima puede llegar a ser de US\$0,98 para el modelo de 3 factores. La diferencia de valorización de los futuros entre el modelo estacionario y el

no-estacionario disminuyen a medida que se utilizan modelos con un mayor número de factores.

Las diferencias más importantes se observan para los futuros teóricos de petróleo con vencimiento a 20 años. Estos resultados se presentan en la tabla V-16. En este caso, la menor diferencia en RMSE se obtiene para el modelo de 4 factores y es de US\$1,30, pudiendo llegar a ser de US\$2,41 algunos días.

Las diferencias de precios teóricos para un futuro a 20 años entre los modelos estacionario y no-estacionario, en el caso de un modelo de 4 factores, se pueden ver gráficamente en la figura 5-26. Estas diferencias varían con el tiempo y en el período 1998-1999 los modelos entregan precios teóricos muy parecidos, que coincide con el período en que el precio spot estuvo en su nivel más bajo.

Tabla V-15: RMSE, MAE, Diferencia Absoluta Máxima y Sesgo de la diferencia entre los precios futuros teóricos de petróleo a 10 años entregados por el modelo estacionario y no-estacionario para el período 1992-2001. Valores en dólares.

	RMSE	MAE	Diferencia Absoluta Máxima	Sesgo
1F	2.73	2.37	6.60	1.52
2F	1.30	1.08	4.23	-0.48
3F	0.40	0.34	0.98	-0.30
4F	0.21	0.17	0.58	-0.16

Tabla V-16: RMSE, MAE, Error Absoluto Máximo y Sesgo de la diferencia entre los precios futuros teóricos de petróleo a 20 años entregados por el modelo estacionario y no-estacionario. Valores en dólares.

	RMSE	MAE	Error Absoluto Máximo	Sesgo
1F	4.54	4.15	8.57	4.07
2F	2.46	1.99	7.09	-1.80
3F	2.08	1.95	3.57	-1.95
4F	1.30	1.22	2.41	-1.22

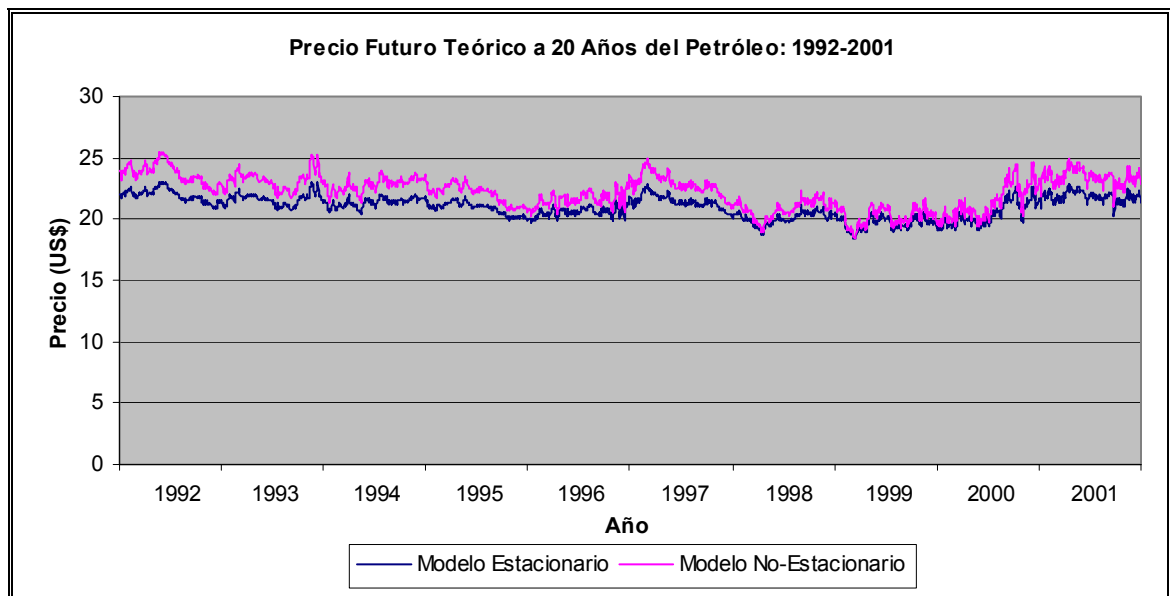


Figura 5-26: Precio futuro teórico a 20 años del petróleo para el modelo estacionario y no-estacionario de 4 factores: 1992-2001.

Se puede ver además que el precio teórico del futuro de largo plazo en el caso del modelo estacionario es mucho menos volátil que el calculado a partir del modelo no-estacionario. Este fenómeno se manifiesta más claramente en la estructura de volatilidades teórica de ambos modelos. La figura 5-27 presenta las estructuras de volatilidades teóricas del modelo estacionario y no-estacionario de 4 factores para un horizonte de 20 años. Se puede apreciar que hasta los 7 años los modelos se comportan de manera similar, lo que se explica por la existencia de precios futuros observados para esos vencimientos. A 10 años, la diferencia de la volatilidad teórica de los retornos de los futuros entre ambos modelos es de 2%, mientras que a 20 años esta diferencia aumenta a 5%. Recuérdese que la volatilidad teórica en el caso del modelo estacionario converge a cero a medida que aumenta la madurez del contrato mientras que la volatilidad en el caso no-estacionario se mantiene constante para los plazos más lejanos.

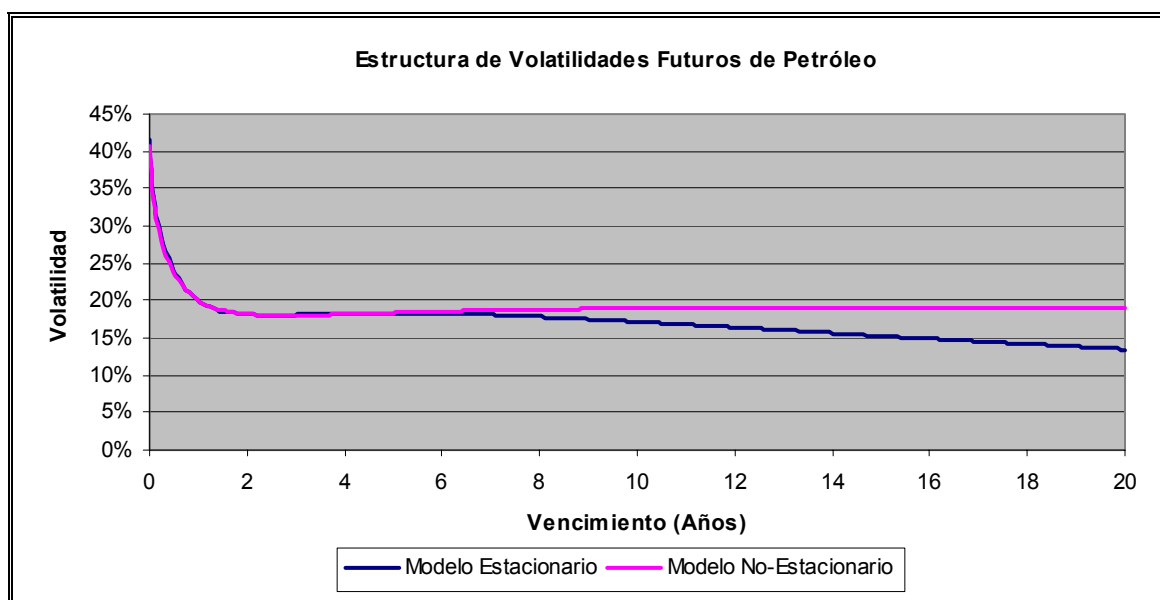


Figura 5-27: Estructura de volatilidades de los retornos de futuros de petróleo para el modelo estacionario y no-estacionario de 4 factores utilizando parámetros calibrados con datos del Panel A: 1992-2001.

5.2.7 Conclusiones Preliminares para el Petróleo

En las secciones anteriores se realizó un análisis de ajuste a los precios y volatilidades observadas de los contratos futuros de petróleo. Existen dos dimensiones sobre las cuales se pueden obtener conclusiones acerca de los modelos estudiados. La primera de ellas es con respecto al número de factores estocásticos necesarios para caracterizar de manera correcta el comportamiento de los precios futuros.

Se puede concluir de los análisis realizados que para obtener una valorización precisa de los futuros de petróleo se requiere de al menos 3 factores estocásticos. Los modelos de 1 y 2 factores no se ajustan bien a la estructura de precios observada durante el período 1992-2001, tanto para precios dentro como fuera de la muestra. La inclusión del cuarto factor, aunque mejora el ajuste de la curva teórica de futuros a los precios observados, no es extremadamente significativa.

El análisis de la volatilidad de los retornos de los contratos futuros indicó que es necesario utilizar un modelo de 4 factores. Aún cuando el modelo de 3 factores realiza una valorización precisa de los futuros observados, los parámetros de volatilidad y correlación del precio spot no permiten que este modelo ajuste la volatilidad teórica en el corto plazo. Se vio que este problema proviene del hecho que los parámetros de volatilidad y correlación también son utilizados para encontrar el precio teórico de los futuros. Si la función de verosimilitud es más sensible al ajuste de precios que a la estimación de la dinámica de las variables de estado, entonces se pueden obtener estructuras de volatilidad que no son consistentes con las observadas, aún cuando este modelo tenga la flexibilidad y la capacidad para reflejar estructuras de volatilidad complejas.

Las diferencias entre el modelo estacionario y el no-estacionario a partir de los precios futuros observados no son importantes. El ajuste de estos modelos para un mismo número de factores es muy similar. Lo mismo ocurre con la estructura de volatilidad observada. Las implicancias en la valorización y comportamiento estocástico de los futuros teóricos a 20 años plazo de ambos modelos de precios son sin embargo relevantes.

No existiría evidencia empírica relevante en el caso del petróleo que llevara a concluir que la especificación no-estacionaria de precios debiera ser rechazada, considerando el período de tiempo estudiado, los datos utilizados y la metodología empleada.

Existen sin embargo otros tipos análisis que se podrían realizar para testear la hipótesis que los precios de commodities siguen un proceso no-estacionario. En el Anexo F se presentan las bases teóricas de un análisis estadístico que permitiría determinar si existe evidencia relevante para rechazar la hipótesis nula que los precios de commodities siguen un proceso no-estacionario. También se presenta una metodología estadística que permitiría determinar si la inclusión de un factor adicional es correcta desde un punto de vista estadístico. Sin embargo, los resultados de dicho anexo son preliminares, en el sentido que se requiere realizar una investigación mucho más exhaustiva en torno a ese tema para obtener resultados que sean confiables. Esta investigación escapa a los objetivos de esta tesis y se propone como un tema de investigación futura.

5.3 Resultados para el Cobre

5.3.1 Estimación de Variables de Estado

Al igual que para el caso del petróleo, en esta sección se presenta un análisis de la estimación de las variables de estado para el cobre. Como fue mencionado en la sección 5.2.1, se espera que el futuro de más corto plazo tenga un comportamiento muy parecido al del precio spot que no es directamente observable. La figura 5-28 muestra la evolución en el tiempo de los precios del futuro con vencimiento más cercano y del precio spot estimado utilizando el filtro de Kalman con todos los precios futuros observados. Se puede ver que durante el período 1992-2001 el precio spot del cobre ha oscilado entre US\$1,40 y US\$0,60. Durante el período 1999-2001, el precio spot del cobre se ha mantenido más estable en torno a los US\$70 centavos. Se puede apreciar una clara tendencia a la baja durante el período 1994-2001.

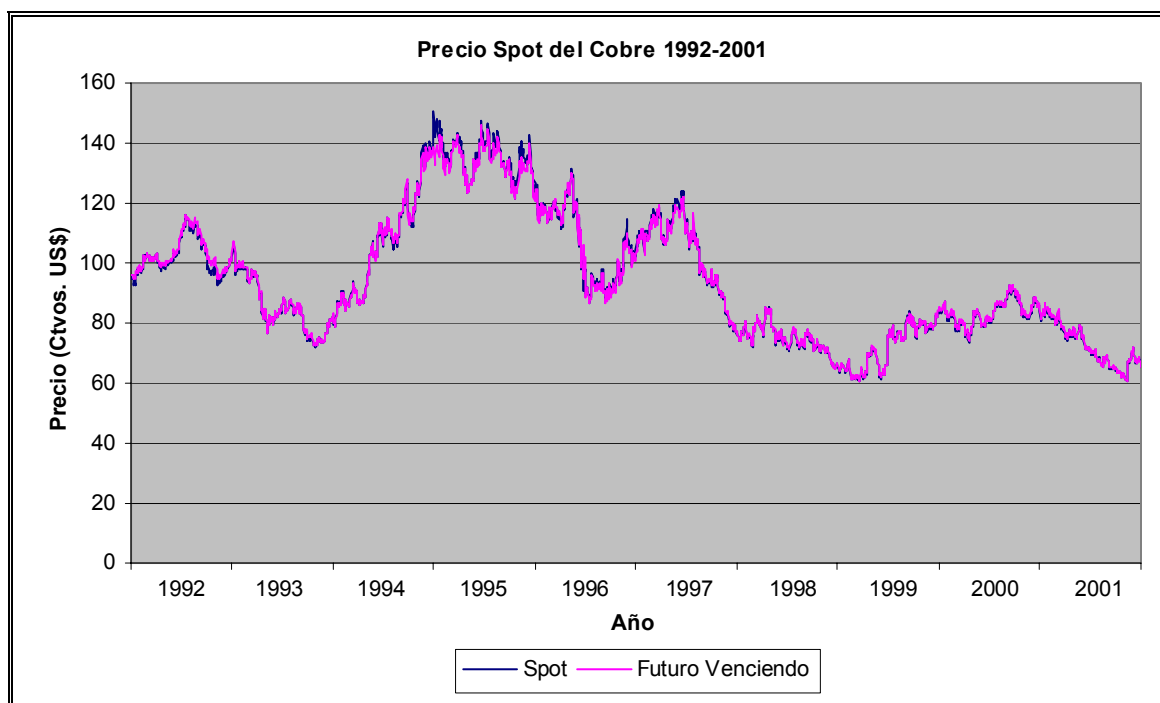


Figura 5-28: Precio spot del cobre y del futuro más cercano al vencimiento para el período 1992-2001.

El comportamiento del error de estimación de las variables de estado también es similar al caso del petróleo. El error de estimación de la variable de estado con mayor reversión a la media es mayor cuando los futuros de menor plazo están recién emitidos, y se reduce a medida estos contratos futuros disminuyen su vencimiento. Este comportamiento se puede apreciar en la figura 5-29.

Para el caso de la variable de estado con menor reversión a la media, que en el caso de un modelo no-estacionario no tiene reversión alguna, el fenómeno es distinto. Cuando un contrato futuro de largo plazo está recién emitido, el error de estimación de esta variable de estado es menor que cuando estos contratos comienzan a disminuir su vencimiento. Esto se aprecia en la figura 5-30. Sin embargo, a diferencia del caso del petróleo, los contratos de más largo plazo (hasta 24 meses) se renuevan todos los meses, y por lo tanto el error de estimación de esta variable de estado varía con un ciclo mensual.

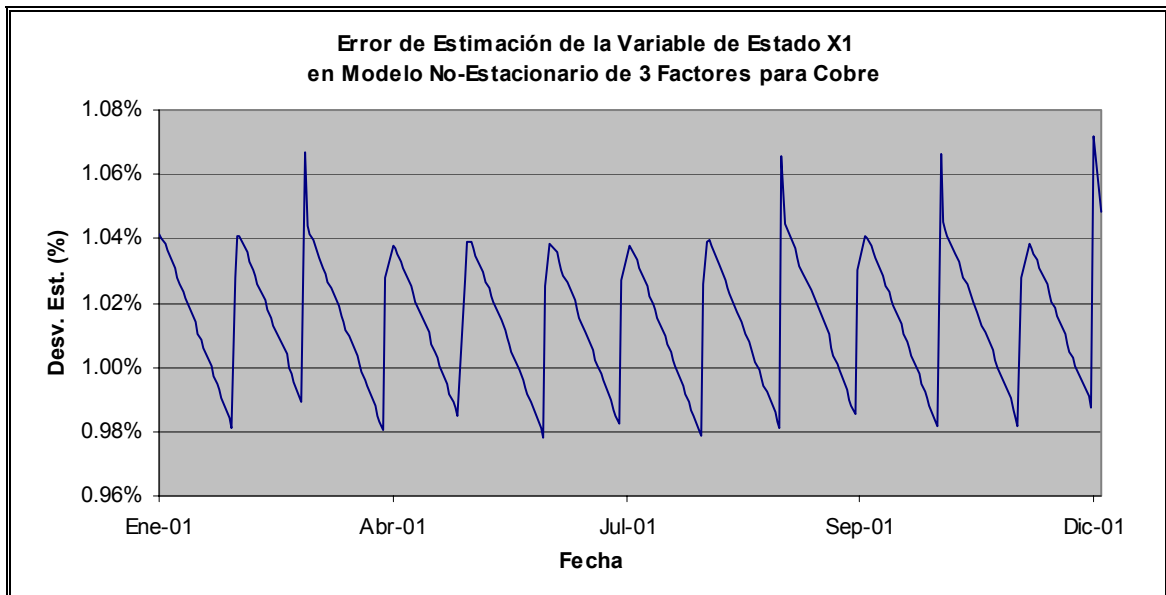


Figura 5-29: Desviación estándar del error de estimación de la variable de estado con mayor reversión a la media del modelo no-estacionario de 3 factores para cobre.

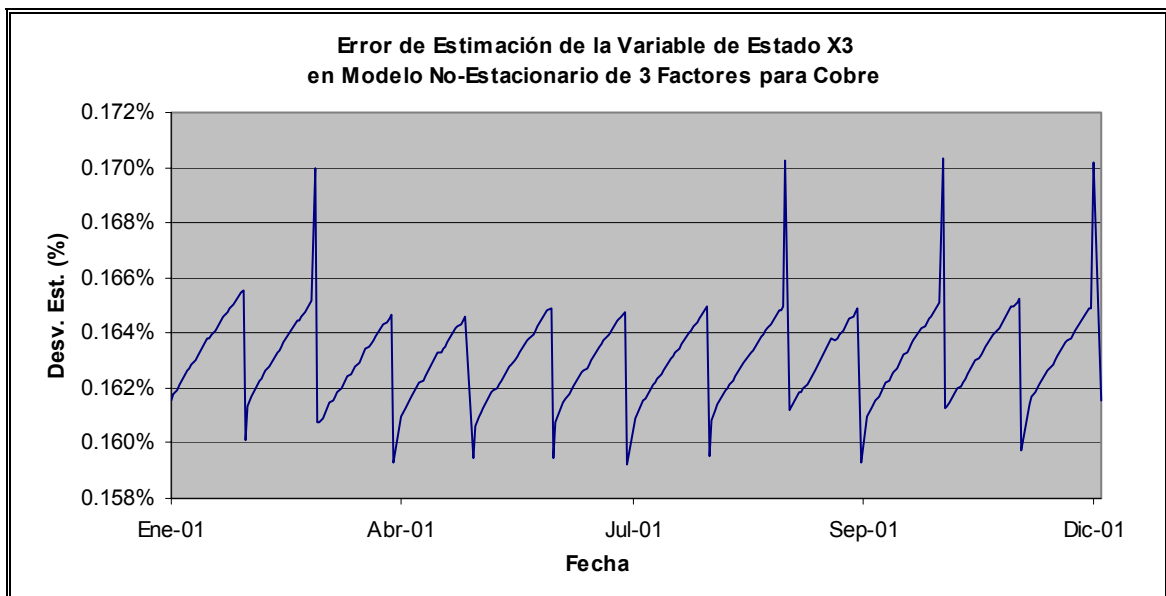


Figura 5-30: Desviación estándar del error de estimación de la variable de estado sin reversión a la media del modelo no-estacionario de 3 factores para cobre.

5.3.2 Estimación de Parámetros

En esta sección se presentan las estimaciones realizadas para el modelo estacionario y no-estacionario utilizando contratos futuros de cobre. La calibración de los modelos fue realizada con 3 paneles de datos distintos que abarcan el período 1992-2001 (Panel A) y los sub-períodos 1992-1996 (Panel B) y 1997-2001 (Panel C), como fue descrito en la sección 5.1.

a) Modelo Estacionario

Los parámetros estimados para el modelo estacionario se presentan en las tablas V-17, V-18 y V-19 para los paneles de A, B y C respectivamente, con modelos de 1, 2 y 3 factores de riesgo.

Al ser calibrado con los datos del panel C, el modelo estacionario de 3 factores convergió a una solución que contenía una raíz unitaria. De esta forma, los resultados de la estimación coinciden con los del modelo no-estacionario de 3 factores.

En los paneles A y B, los parámetros de reversión a la media se mantienen estables para el modelo de 3 factores. Como se dijo anteriormente, en el panel C el parámetro de reversión de la primera variable de estado es igual a cero, lo que muestra un cambio bastante significativo en el comportamiento del precio del cobre en dicho panel. Los parámetros de reversión a_2 y a_3 son bastante similares en los paneles A y B, aunque estadísticamente distintos entre sí.

El parámetro de reversión a la media a_2 se mantiene estable en cada uno de los paneles de datos en el modelo de 2 factores. Por el contrario, en ese mismo modelo, el parámetro de reversión a_1 varía significativamente dependiendo del panel de datos considerado. En el caso del modelo de 1 factor, el parámetro de reversión a_1 se mantiene también estable para cada panel de datos. Todos los parámetros de reversión a la media son estadísticamente significativos. Los parámetros de volatilidad y correlación no se comportan de manera estable para los distintos paneles de datos.

Los premios de mercado al riesgo no son en todos los casos significativamente distintos de cero, de acuerdo al error de estimación. Para ambos

modelos, la desviación estándar del error de medición ε es mucho menor que para en el caso del petróleo.

El parámetro d que representa el valor esperado de largo plazo del logaritmo del precio spot tiene, como en el caso del petróleo, un alto error de estimación.

Tabla V-17: Parámetros estimados del modelo estacionario (Modelo 1) con distintos números de factores a partir del Panel A (1992 – 2001) de datos de cobre. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.

	3 Factores	2 Factores	1 Factor
a_1	0.041 (0.003)	0.097 (0.002)	0.288 (0.001)
a_2	1.697 (0.020)	0.896 (0.005)	-
a_3	2.039 (0.026)	-	-
σ_1	0.174 (0.003)	0.187 (0.003)	0.193 (0.003)
σ_2	0.896 (0.100)	0.196 (0.005)	-
σ_3	0.827 (0.100)	-	-
ρ_{21}	-0.128 (0.029)	-0.209 (0.026)	-
ρ_{31}	0.143 (0.003)	-	-
ρ_{32}	-0.987 (0.030)	-	-
d	-0.275 (0.552)	-0.158 (0.343)	-0.138 (0.163)
λ_1	-0.006 (0.023)	0.002 (0.034)	0.021 (0.047)
λ_2	0.396 (0.269)	0.032 (0.056)	-
λ_3	-0.390 (0.251)	-	-
ε	0.003 (0.000)	0.005 (0.000)	0.016 (0.000)
$\log L$	222495	203378	156757

Tabla V-18: Parámetros estimados del modelo estacionario (Modelo 1) con distintos números de factores a partir del Panel B (1992 – 1996) de datos de cobre. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.

	3 Factores	2 Factores	1 Factor
a_1	0.039 (0.006)	0.266 (0.006)	0.327 (0.002)
a_2	1.727 (0.098)	0.856 (0.013)	-
a_3	2.460 (0.162)	-	-
σ_1	0.169 (0.004)	0.279 (0.009)	0.179 (0.005)
σ_2	0.584 (0.178)	0.278 (0.010)	-
σ_3	0.517 (0.178)	-	-
ρ_{21}	-0.130 (0.044)	-0.645 (0.027)	-
ρ_{31}	0.134 (0.046)	-	-
ρ_{32}	-0.951 (0.032)	-	-
d	0.001 (0.580)	-0.004 (0.245)	0.016 (0.164)
λ_1	0.012 (0.022)	-0.013 (0.078)	0.058 (0.054)
λ_2	0.287 (0.246)	0.106 (0.099)	-
λ_3	-0.236 (0.226)	-	-
ε	0.004 (0.000)	0.007 (0.000)	0.020 (0.000)
$\log L$	73977	67252	52436

Tabla V-19: Parámetros estimados del modelo estacionario (Modelo 1) con distintos números de factores a partir del Panel C (1997 – 2001) de datos de cobre. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.

	3 Factores	2 Factores	1 Factor
a_1	-	0.117 (0.002)	0.313 (0.001)
a_2	-	0.873 (0.005)	-
a_3	-	-	-
σ_1	-	0.197 (0.004)	0.214 (0.004)
σ_2	-	0.433 (0.009)	-
σ_3	-	-	-
ρ_{21}	-	-0.118 (0.074)	-
ρ_{31}	-	-	-
ρ_{32}	-	-	-
d	-	-0.234 (0.389)	-0.221 (0.203)
λ_1	-	-0.020 (0.042)	0.003 (0.063)
λ_2	-	0.097 (0.161)	-
λ_3	-	-	-
ε	-	0.003 (0.000)	0.013 (0.000)
$\log L$	-	142173	106785

b) Modelo No-Estacionario

El modelo no-estacionario se estimó con 1, 2 y 3 factores de riesgo y los resultados se presentan en las tablas V-20, V-21 y V-22 para los paneles A, B y C respectivamente.

Para el modelo de 3 factores, el parámetro de reversión a_3 varía considerablemente con respecto al panel de datos utilizado, mientras que el parámetro a_2 se mantiene más estable. En el caso del modelo de 2 factores, el parámetro a_2 es muy similar en los paneles A y C, aunque un poco distinto en el panel B. Sin embargo, los errores estándar de todos los parámetros de reversión son pequeños.

Los premios de mercado del riesgo no son estadísticamente distintos de cero en la mayoría de los casos, salvo para el modelo de 3 factores en el Panel B.

El parámetro μ es en cada caso negativo, como es de esperarse dado que la tendencia del precio del cobre en todos los períodos es a la baja, aunque no es estadísticamente distinto de cero ya que su estimación contiene mucho error.

Por último, la desviación estándar del error de estimación ε es mucho menor que para los mismos modelos estudiados para el petróleo. Esto se puede deber a que para el cobre se tienen vencimientos de los contratos mucho menores. Sin embargo, también puede ser que el cobre requiere de menos factores para ser modelado de forma correcta. Habría que esperar a que se comiencen a transar contratos con plazos mayores para poder estudiar este fenómeno con mayor detalle.

Tabla V-20: Parámetros estimados del modelo no-estacionario (Modelo 2) con distintos números de factores a partir del Panel A (1992 – 2001) de datos de cobre. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.

	3 Factores	2 Factores	1 Factor
a_1	-	-	-
a_2	1.340 (0.012)	0.767 (0.004)	-
a_3	2.375 (0.022)	-	-
σ_1	0.159 (0.002)	0.159 (0.003)	0.139 (0.003)
σ_2	0.307 (0.009)	0.206 (0.005)	-
σ_3	0.241 (0.009)	-	-
ρ_{21}	0.018 (0.013)	-0.201 (0.022)	-
ρ_{31}	0.038 (0.018)	-	-
ρ_{32}	-0.855 (0.011)	-	-
μ	-0.030 (0.050)	-0.037 (0.050)	-0.034 (0.044)
λ_1	-0.032 (0.000)	-0.036 (0.050)	-0.015 (0.044)
λ_2	0.151 (0.091)	0.038 (0.058)	-
λ_3	-0.146 (0.074)	-	-
ε	0.003 (0.000)	0.005 (0.000)	0.030 (0.000)
$\log L$	222363	202654	130932

Tabla V-21: Parámetros estimados del modelo no-estacionario (Modelo 2) con distintos números de factores a partir del Panel B (1992 – 1996) de datos de cobre. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.

	3 Factores	2 Factores	1 Factor
a_1	-	-	-
a_2	1.405 (0.015)	0.691 (0.009)	-
a_3	2.934 (0.038)	-	-
σ_1	0.160 (0.004)	0.154 (0.004)	0.131 (0.004)
σ_2	0.274 (0.008)	0.221 (0.006)	-
σ_3	0.219 (0.008)	-	-
ρ_{21}	-0.010 (0.024)	-0.246 (0.030)	-
ρ_{31}	0.049 (0.023)	-	-
ρ_{32}	-0.729 (0.020)	-	-
μ	-0.015 (0.072)	-0.015 (0.068)	-0.003 (0.059)
λ_1	0.010 (0.001)	-0.028 (0.068)	0.046 (0.059)
λ_2	0.282 (0.108)	0.112 (0.078)	-
λ_3	-0.248 (0.092)	-	-
ε	0.004 (0.000)	0.007 (0.000)	0.030 (0.000)
$\log L$	73325	66409	46210

Tabla V-22: Parámetros estimados del modelo no-estacionario (Modelo 2) con distintos números de factores a partir del Panel C (1997 – 2001) de datos de cobre. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.

	3 Factores	2 Factores	1 Factor
a_1	-	-	-
a_2	1.492 (0.012)	0.767 (0.004)	-
a_3	1.709 (0.014)	-	-
σ_1	0.166 (0.003)	0.159 (0.004)	0.151 (0.004)
σ_2	0.870 (0.059)	0.206 (0.012)	-
σ_3	0.800 (0.059)	-	-
ρ_{21}	-0.092 (0.038)	-0.201 (0.043)	-
ρ_{31}	0.132 (0.039)	-	-
ρ_{32}	-0.992 (0.001)	-	-
μ	-0.029 (0.074)	-0.051 (0.071)	-0.071 (0.068)
λ_1	-0.037 (0.074)	-0.047 (0.071)	-0.067 (0.068)
λ_2	0.532 (0.345)	0.038 (0.075)	-
λ_3	-0.535 (0.321)	-	-
ε	0.002 (0.000)	0.004 (0.000)	0.025 (0.000)
$\log L$	151841	141265	89794

5.3.3 Ajuste de los Modelos a los Precios Observados dentro de la Muestra

En esta sección se analiza el ajuste de los distintos modelos a los precios futuros de cobre observados que fueron utilizados en la estimación de los parámetros.

Las figuras 5-31 a la 5-34 muestran gráficamente el ajuste de las curvas teóricas de futuros a los precios observados para ciertos días particulares. Se eligió un día en el cual la curva está en contango y otro en el cual la curva está en backwardation. Para ambos días se grafican las curvas de precios para los modelos estacionario y no-estacionario. Los días que se muestran en las figuras son representativos de la muestra.

El primer día elegido es el 03/01/1997 y se muestra en las figuras 5-31 y 5-32. En este día la curva de futuros estaba en contango cuando el precio spot del cobre era aproximadamente de US\$1,05. El modelo de 1 factor realiza una valorización bastante pobre de los futuros observados, al contrario del modelo de 2 factores que es mucho más preciso. El modelo de 3 factores mejora ligeramente la valorización de los contratos.

Las figuras 5-33 y 5-34 muestran curvas de futuro de cobre para el día 01/08/2001 que están en backwardation. El precio spot para ese día era cercano a los US\$67 centavos, que está muy por debajo del precio de la curva anterior. Para este día en particular, el ajuste de los 3 modelos estacionarios es muy similar. Sin embargo, el modelo no-estacionario de 1 factor realiza una valorización de los contratos muy imprecisa.

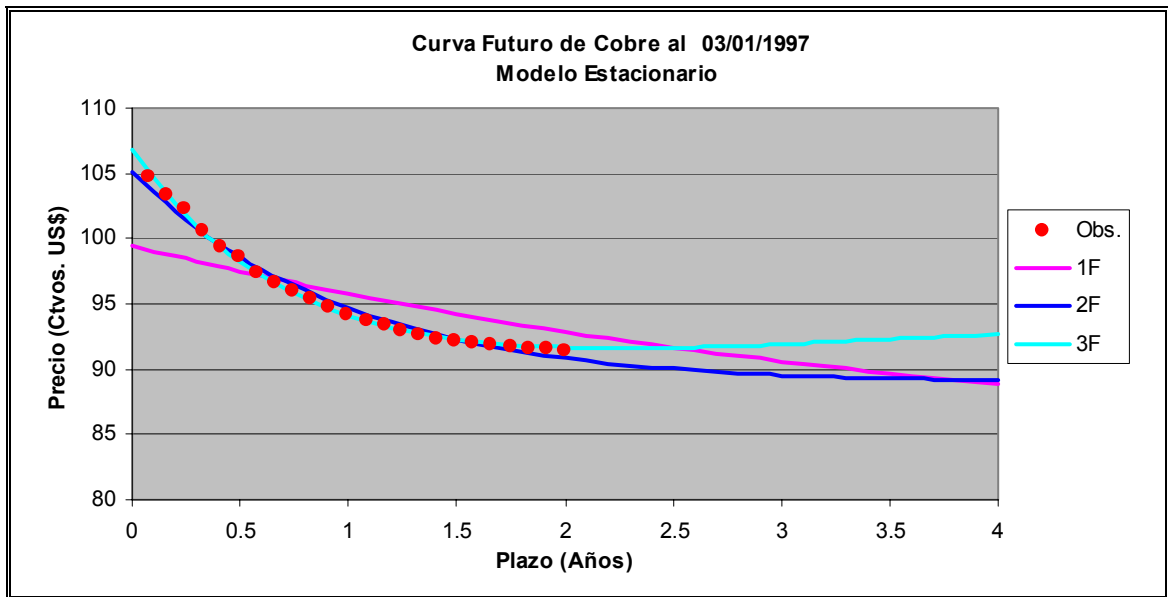


Figura 5-31: Precios observados y curva teórica de futuros de cobre del modelo estacionario al día 03/01/1997.

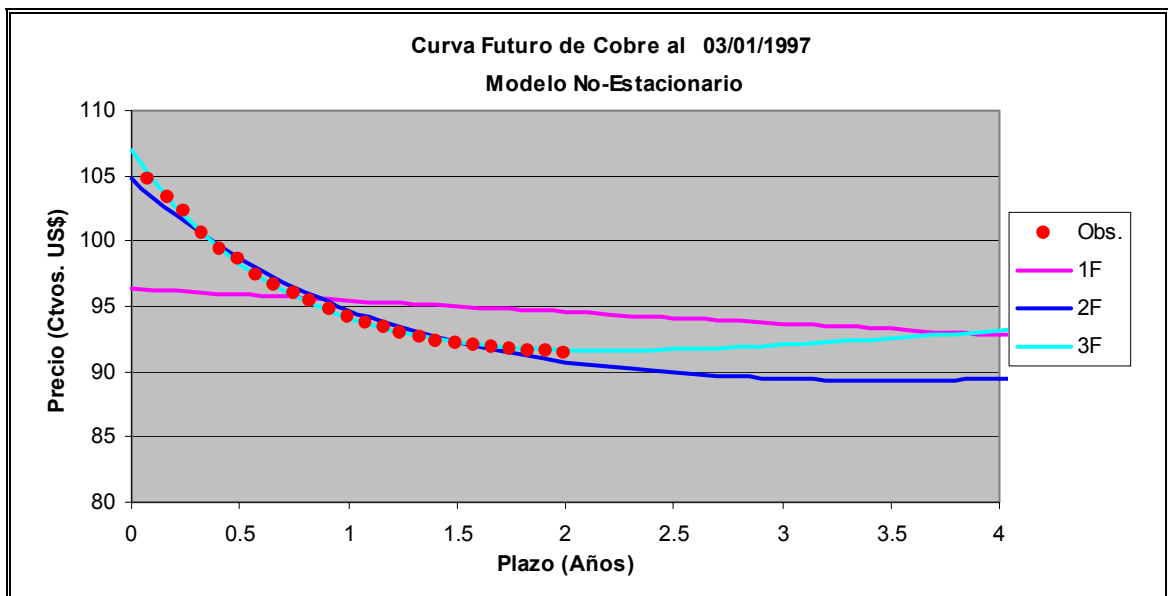


Figura 5-32: Precios observados y curva teórica de futuros de cobre del modelo no-estacionario al día 03/01/1997.

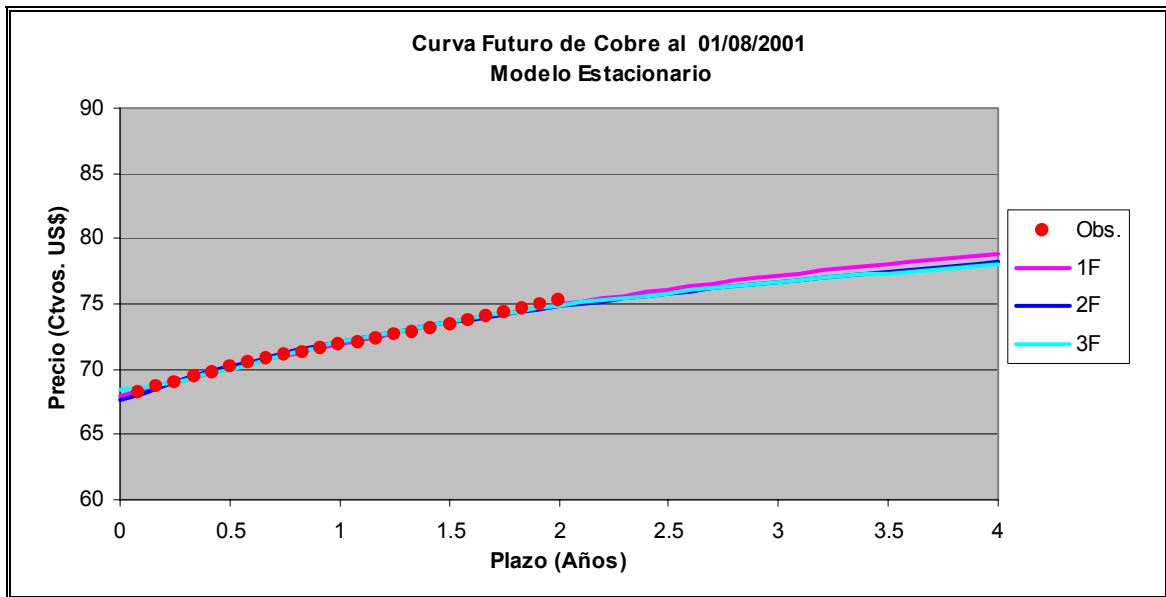


Figura 5-33: Precios observados y curva teórica de futuros de cobre del modelo estacionario al día 01/08/2001.

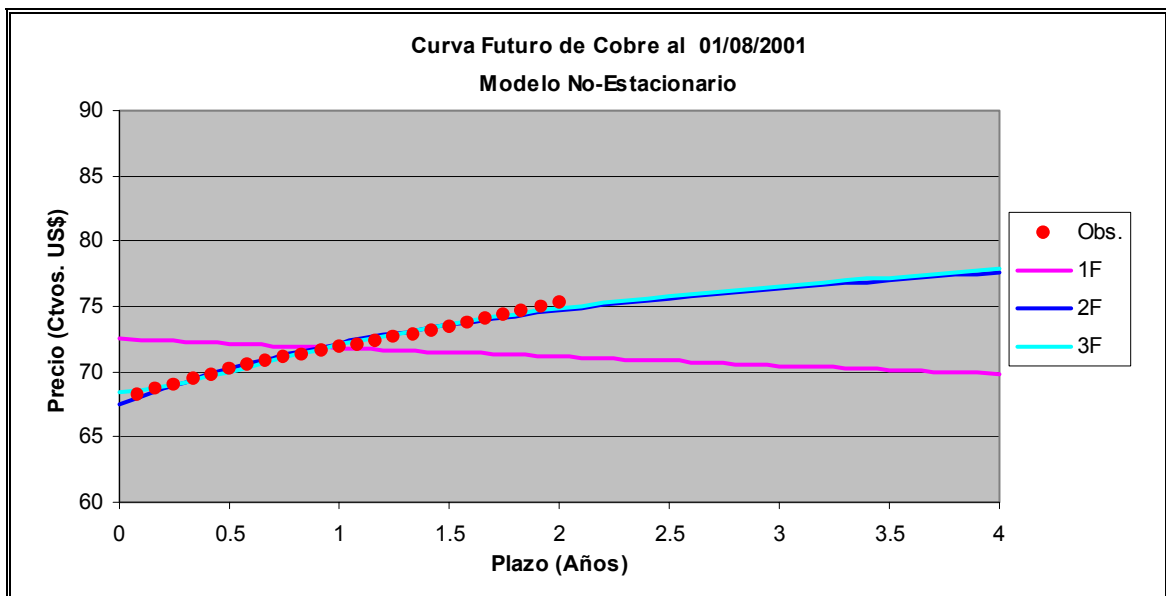


Figura 5-34: Precios observados y curva teórica de futuros de cobre del modelo no-estacionario al día 01/08/2001.

La tabla V-23 muestra el RMSE porcentual para cada uno de los paneles de datos estimados de cada uno de los modelos con distintos factores. Se puede ver que los modelos de 2 factores valorizan de manera bastante exacta de los futuros transados. El modelo de 3 factores reduce ligeramente el error de valorización. No se pueden apreciar diferencias importantes entre los modelos estacionario y el no-estacionario.

Las figuras 5-35 y 5-36 presentan el RMSE calculado por tipo de contrato para el panel A. Se puede apreciar que los modelos de 1 factor tienen grandes errores de valorización en los contratos futuros de corto y largo plazo. La valorización de los contratos futuros a distintos vencimientos es más homogénea para los modelos de 2 y 3 factores.

Tabla V-23: RMSE porcentual del ajuste de ambos modelos a los precios futuros de cobre observados utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

		Modelo Estacionario	Modelo No-Estacionario
Panel A	1F	1.58%	2.96%
	2F	0.47%	0.48%
	3F	0.27%	0.27%
Panel B	1F	1.93%	2.99%
	2F	0.63%	0.68%
	3F	0.36%	0.38%
Panel C	1F	1.30%	2.44%
	2F	0.31%	0.33%
	3F	-	0.20%

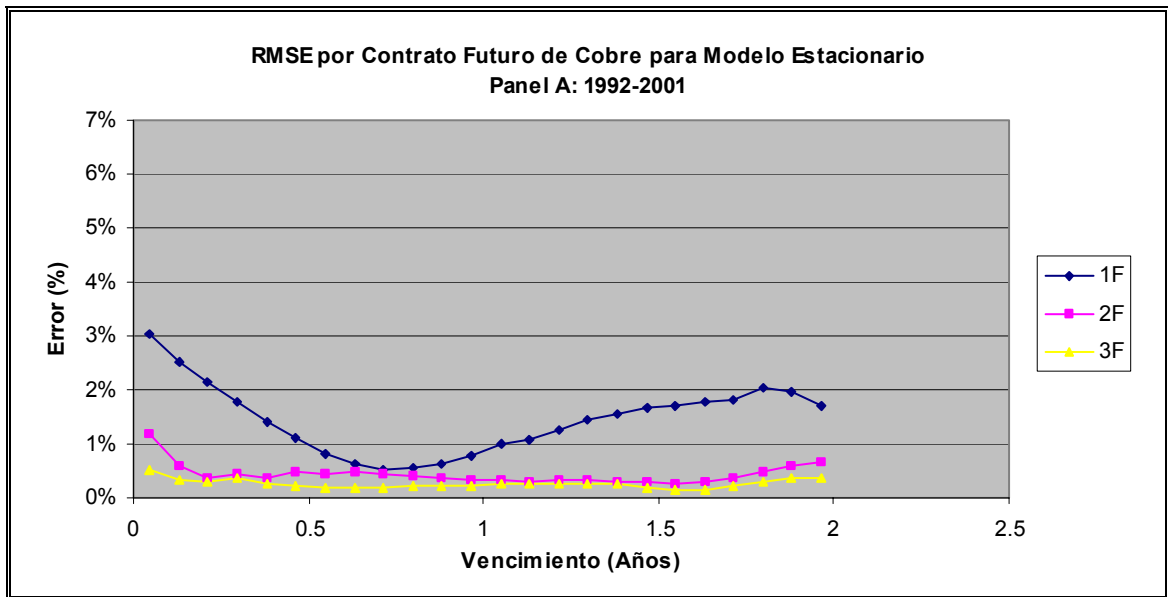


Figura 5-35: RMSE porcentual del ajuste del modelo estacionario a los precios futuros de cobre observados del Panel A para cada vencimiento.

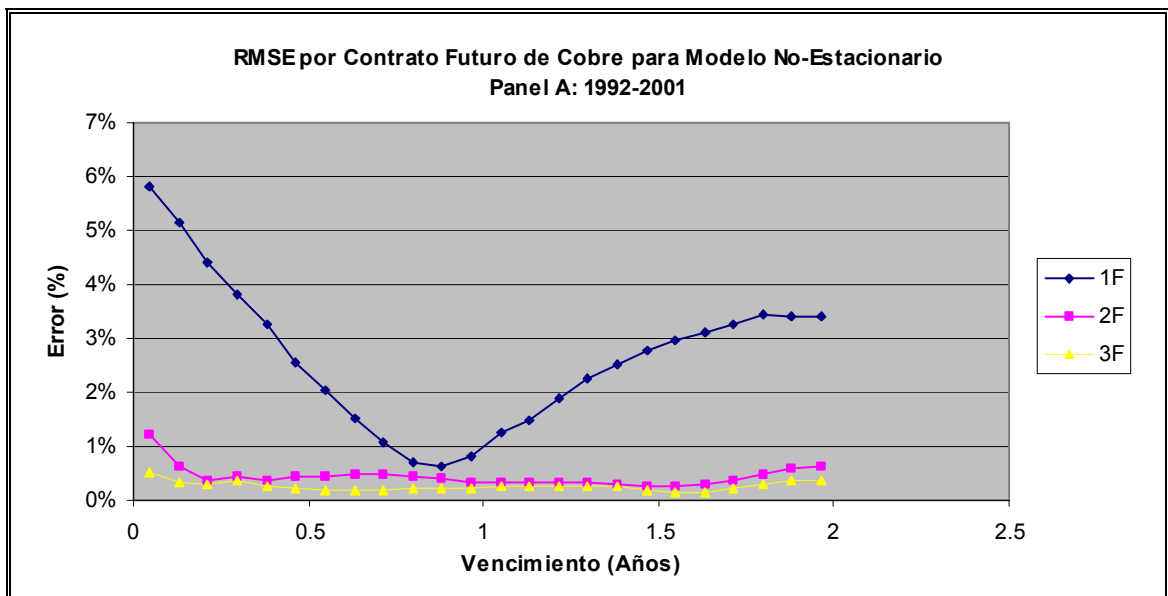


Figura 5-36: RMSE porcentual del ajuste del modelo no-estacionario a los precios futuros de cobre observados del Panel A para cada vencimiento.

La tabla V-24 presenta el error absoluto medio (MAE), el error absoluto máximo y el sesgo porcentual de los errores de valorización de los contratos observados. El MAE se comporta de manera similar al RMSE. Los errores absolutos máximos son más grandes que en el caso del petróleo. El sesgo de los errores es en todos los casos cercano a cero, lo que valida el supuesto que estos errores tienen media cero.

Tabla V-24: Error absoluto medio (MAE), error absoluto máximo y sesgo porcentual del ajuste de ambos modelos a los precios futuros observados de cobre utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

		MAE		Error Máximo		Sesgo	
		Modelo Estacionario	Modelo No-Estacionario	Modelo Estacionario	Modelo No-Estacionario	Modelo Estacionario	Modelo No-Estacionario
Panel A	1F	1.10%	2.11%	16.39%	17.06%	0.0060%	-0.0035%
	2F	0.30%	0.31%	12.77%	13.12%	0.0020%	0.0013%
	3F	0.17%	0.17%	7.46%	7.48%	0.0001%	0.0000%
Panel B	1F	1.39%	2.25%	16.94%	14.19%	0.0139%	0.0005%
	2F	0.40%	0.45%	12.07%	13.28%	0.0076%	0.0051%
	3F	0.23%	0.25%	6.96%	6.66%	0.0022%	0.0028%
Panel C	1F	0.90%	1.62%	8.22%	16.11%	0.0011%	-0.0011%
	2F	0.21%	0.23%	3.30%	3.18%	-0.0007%	-0.0008%
	3F	-	0.13%	-	3.17%	-	-0.0008%

5.3.4 Ajuste de los Modelos a los Precios Observados fuera de la Muestra

En esta sección se analiza el ajuste de los modelos de precios para el cobre utilizando parámetros calculados con datos fuera de la muestra. Al igual que para el petróleo, se estimó un nuevo set de parámetros utilizando precios futuros del período 1992-2000. Con estos parámetros, se calculó el RMSE, MAE, error absoluto máximo y el sesgo entre los precios teóricos y los futuros observados durante el año 2001. Estos errores se compararon con los obtenidos al utilizar los parámetros calculados con los datos del panel A (1992-2001). Estos resultados se presentan en las tablas V-25 a la V-28. Se puede apreciar que los modelos se comportan de manera muy estable al ser utilizados con precios fuera de la muestra, en particular los modelos de 2 y 3 factores. Esto garantiza la estabilidad y fiabilidad de los modelos y del método de estimación.

Tabla V-25: Comparación del RMSE porcentual del ajuste de ambos modelos a los precios futuros de cobre observados del año 2001, utilizando parámetros calibrados con datos dentro y fuera de la muestra.

	Modelo Estacionario		Modelo No-Estacionario	
	RMSE dentro de la muestra	RMSE fuera de la muestra	RMSE dentro de la muestra	RMSE fuera de la muestra
1F	0.95%	1.16%	2.45%	2.76%
2F	0.24%	0.25%	0.25%	0.25%
3F	0.16%	0.16%	0.16%	0.16%

Tabla V-26: Comparación del MAE porcentual del ajuste de ambos modelos a los precios futuros de cobre observados del año 2001, utilizando parámetros calibrados con datos dentro y fuera de la muestra.

	Modelo Estacionario		Modelo No-Estacionario	
	MAE dentro de la muestra	MAE fuera de la muestra	MAE dentro de la muestra	MAE fuera de la muestra
1F	0.65%	0.80%	1.89%	2.17%
2F	0.17%	0.17%	0.19%	0.19%
3F	0.11%	0.12%	0.12%	0.12%

Tabla V-27: Comparación del error absoluto máximo porcentual del ajuste de ambos modelos a los precios futuros de cobre observados del año 2001, utilizando parámetros calibrados con datos dentro y fuera de la muestra.

	Modelo Estacionario		Modelo No-Estacionario	
	Error máximo dentro de la muestra	Error máximo fuera de la muestra	Error máximo dentro de la muestra	Error máximo fuera de la muestra
1F	4.11%	4.84%	6.90%	7.49%
2F	2.17%	2.14%	2.25%	2.28%
3F	1.40%	1.40%	1.40%	1.42%

Tabla V-28: Comparación del sesgo porcentual del ajuste de ambos modelos a los precios futuros de cobre observados del año 2001, utilizando parámetros calibrados con datos dentro y fuera de la muestra.

	Modelo Estacionario		Modelo No-Estacionario	
	Sesgo dentro de la muestra	Sesgo fuera de la muestra	Sesgo dentro de la muestra	Sesgo fuera de la muestra
1F	0.0986%	0.1541%	0.0243%	0.0277%
2F	0.0017%	0.0021%	0.0005%	0.0007%
3F	0.0003%	0.0003%	0.0002%	0.0002%

5.3.5 Ajuste de los Modelos a la Estructura de Volatilidad Observada de los Retornos de los Precios Futuros.

En esta sección se analiza el ajuste de los modelos de precios de la estructura de volatilidad teórica de los retornos de los futuros con respecto a la que puede ser calculada empíricamente. La forma en que se calculan estas volatilidades fue descrita en la sección 5.2.6.

Las figuras 5-37 a la 5-42 muestran la curva de volatilidad teórica de cada uno de los modelos para cada uno de los paneles de datos utilizados en la estimación de los parámetros, y se compara con la estructura de volatilidad empírica. Al igual que en el caso del petróleo, la estructura de volatilidad empírica muestra mayores volatilidades para contratos futuros con menores vencimientos. Sin embargo, la diferencia entre la volatilidad de los futuros de corto plazo y los de largo plazo es mucho menor que en el caso del petróleo, lo que se explicaría por una menor reversión a la media para el cobre.

Los paneles de datos A y B tienen un menor número de estimaciones empíricas de la volatilidad debido a que durante esos períodos, se tuvo que agrupar

ciertos contratos para poder calcular una volatilidad aproximada. El panel C tiene muchas más observaciones de volatilidad.

La estructura de volatilidad teórica de los modelos de 1 factor queda en los paneles A y B por debajo de la estructura de volatilidad empírica. En el caso del panel C la volatilidad teórica del modelo de 1 factor estacionario ajuste bastante bien la de los contratos futuros de corto plazo. Durante ese período la diferencia entre la volatilidad de los futuros de corto y largo plazo es muy pequeña, del orden de 5%.

Los modelos no-estacionarios de 2 factores ajustan muy bien la estructura de volatilidad en todos los paneles. Para el caso de los modelos estacionarios, este ajuste no es tan bueno en los paneles A y B. En el caso del panel C el modelo estacionario de 2 factores sobrestima la volatilidad de los futuros de corto plazo, tal como ocurrió con los modelos de 3 factores para el petróleo. Ambos modelos de 3 factores manifiestan pequeñas mejoras de ajuste con respecto al modelo de 2 factores, en particular en el panel B.

De este análisis se puede desprender que para efectos de determinar la volatilidad de los futuros de cobre bastaría con utilizar el modelo de 2 factores. Sin embargo, las conclusiones de este análisis bien podrían verse modificadas si se dispusiera de precios de contratos futuros con vencimientos de mayor plazo.

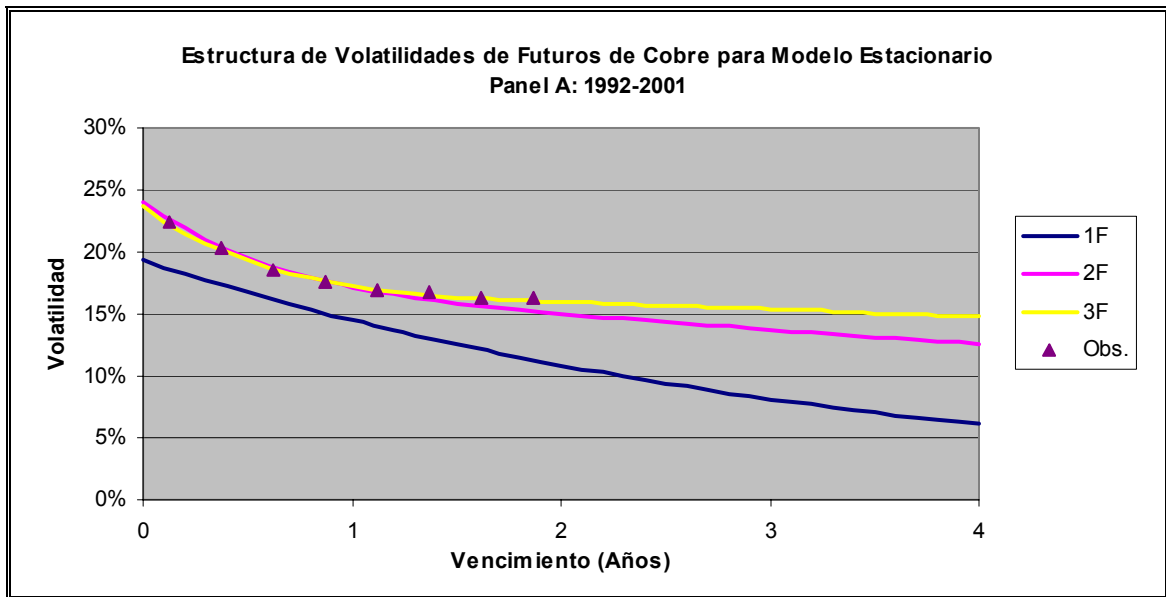


Figura 5-37: Estructura de volatilidades instantáneas de los retornos de futuros de cobre para modelo estacionario – Panel A:1992-2001.

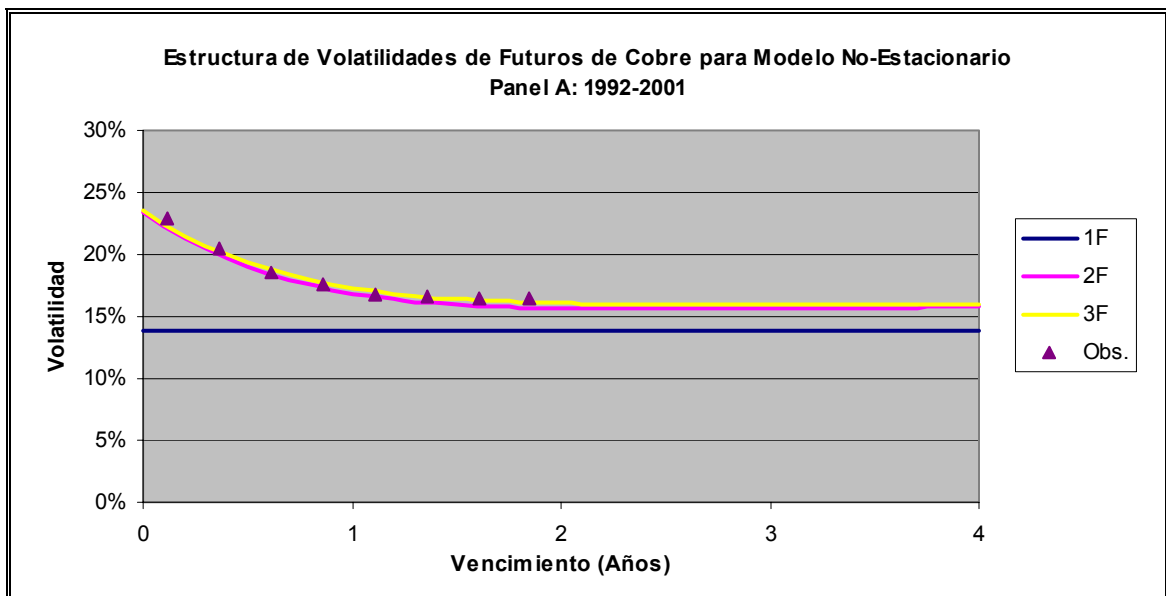


Figura 5-38: Estructura de volatilidades instantáneas de los retornos de futuros de cobre para modelo no-estacionario – Panel A:1992-2001.

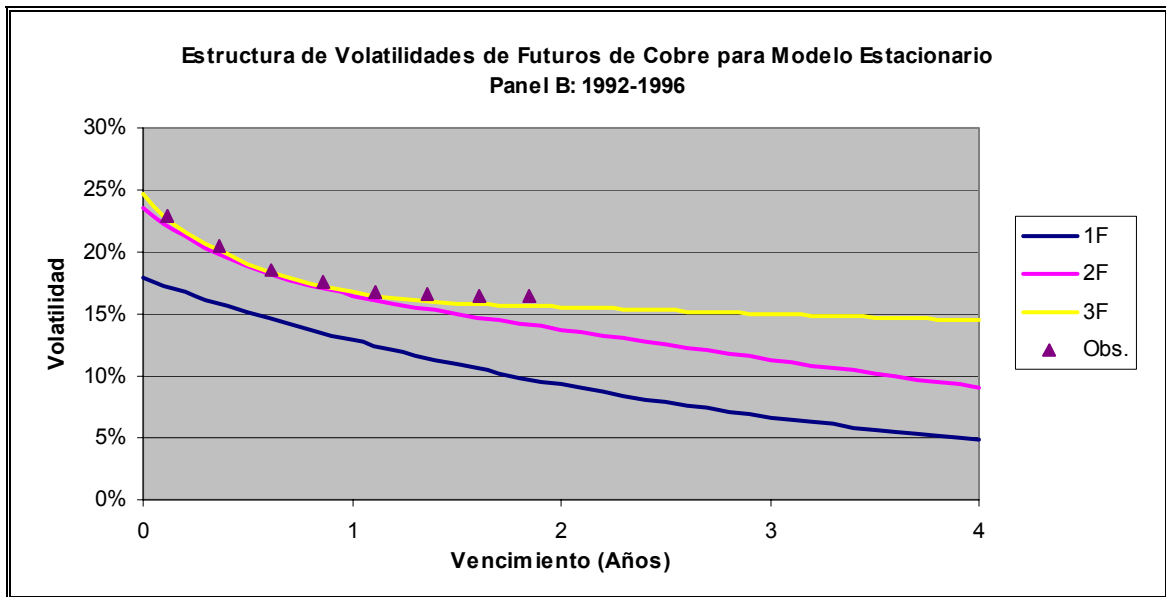


Figura 5-39: Estructura de volatilidades instantáneas de los retornos de futuros de cobre para modelo estacionario – Panel B:1992-1996.

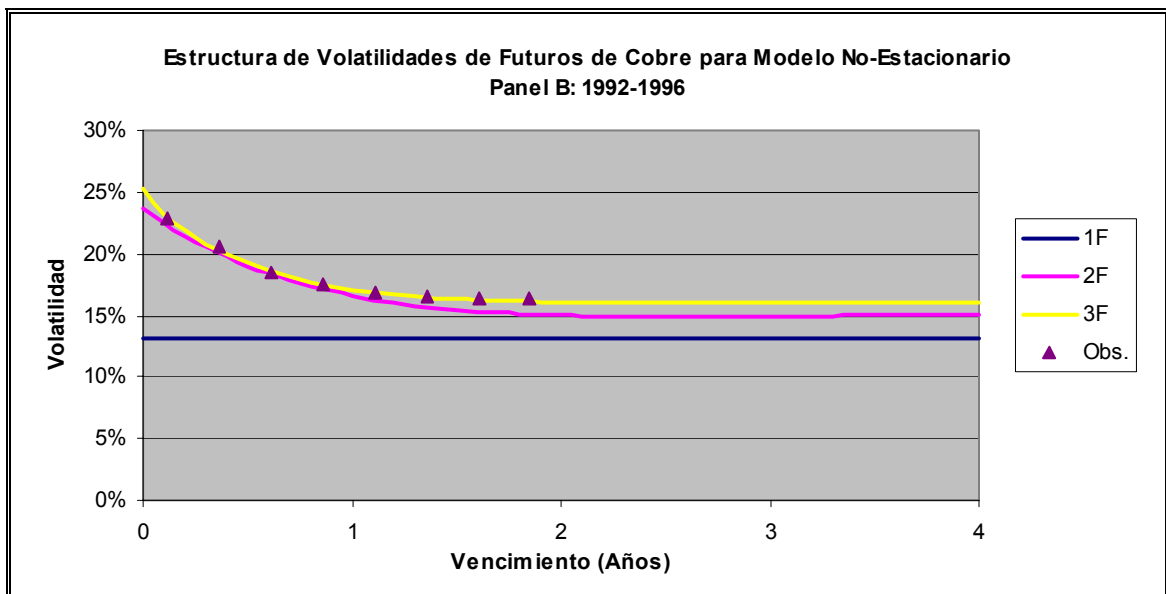


Figura 5-40: Estructura de volatilidades instantáneas de los retornos de futuros de cobre para modelo no-estacionario – Panel B:1992-1996.

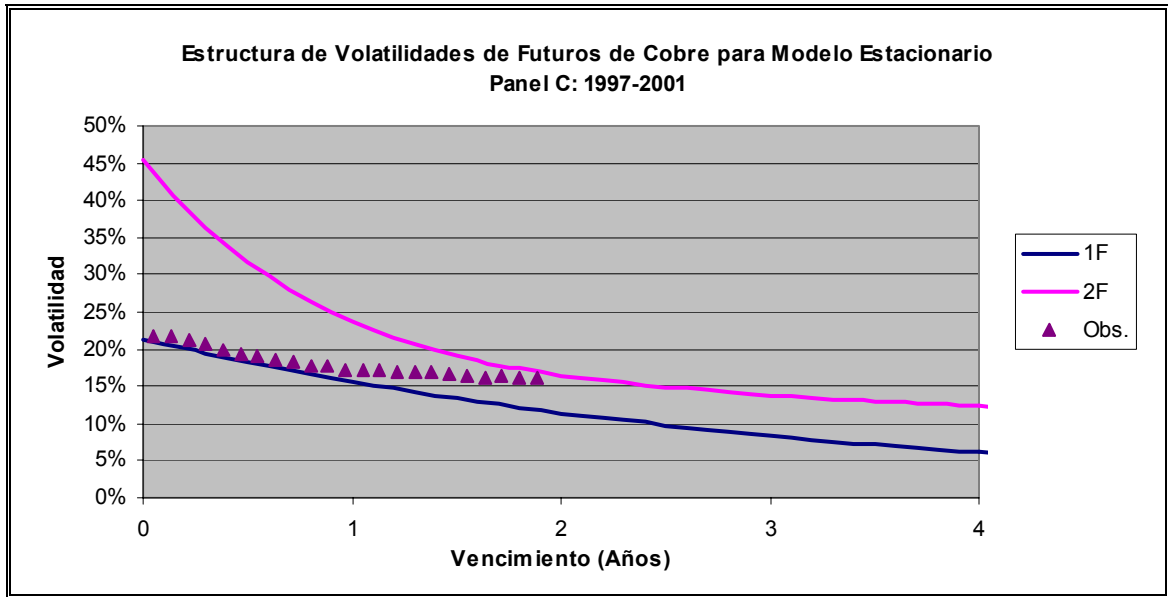


Figura 5-41: Estructura de volatilidades instantáneas de los retornos de futuros de cobre para modelo estacionario – Panel C:1997-2001.

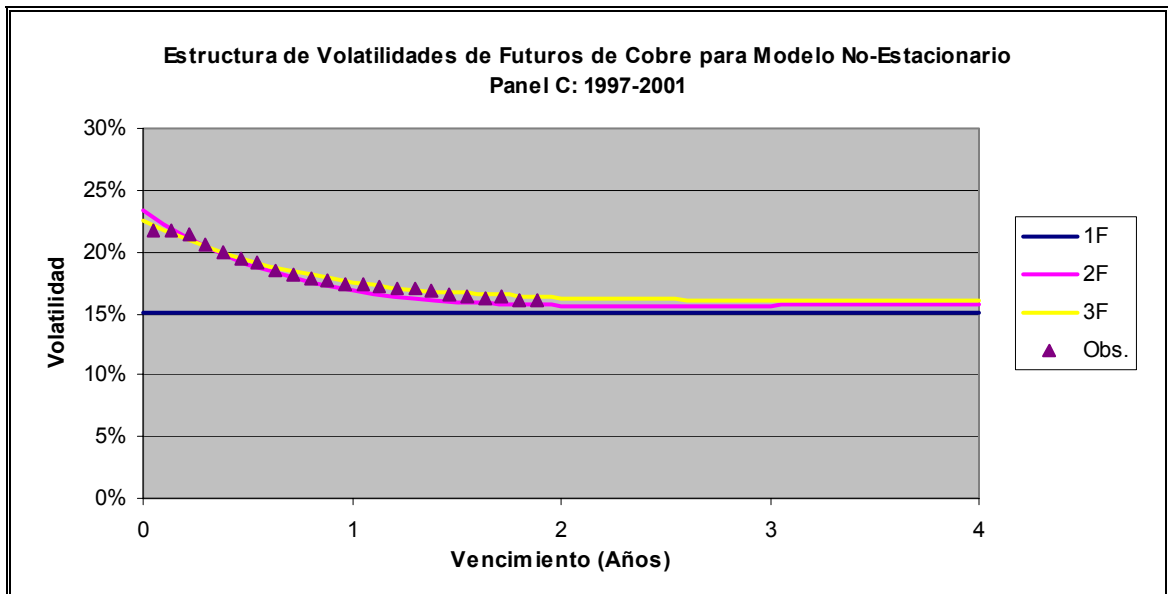


Figura 5-42: Estructura de volatilidades instantáneas de los retornos de futuros de cobre para modelo no-estacionario – Panel C:1997-2001.

5.3.6 Valorización y Volatilidad de Futuros de Largo Plazo

Para analizar las diferencias en la valorización de los futuros de largo plazo entre los modelos estacionario y no-estacionario, se calcularon los precios teóricos entregados por ambos modelos para futuros de cobre con vencimientos a 5 y 10 años durante el período 1992-2001. Los plazos analizados en el caso del cobre son menores que para el petróleo debido a que no se dispone de observaciones con un vencimiento superior a los 2 años.

La tabla V-29 presenta el RMSE, MAE, la diferencia absoluta máxima y el sesgo calculado de la diferencia entre un futuro teórico con vencimiento a 5 años entregada por el modelo estacionario y no-estacionario. Para el modelo de 1 factor esta diferencia es de 10,77 centavos de dólar en RMSE, mientras que para el modelo de 2 factores la diferencia es de sólo 3,25 centavos en RMSE. Diferencias más importantes se observan para los futuros teóricos de petróleo con vencimiento a 10 años. Estos resultados se presentan en la tabla V-30 y la diferencia en RMSE para el modelo de 2 factores es de casi 10 centavos de dólar, mientras que el caso del modelo de 3 factores esta diferencia se reduce a 7 centavos de dólar.

Las diferencias de precios teóricos para un futuro a 10 años entre los modelos estacionario y no-estacionario, en el caso de los modelos de 3 factores, se pueden ver gráficamente en la figura 5-43.

Tabla V-29: RMSE, MAE, Error Absoluto Máximo y Sesgo de la diferencia entre los precios futuros teóricos de cobre a 5 años entregados por el modelo estacionario y no-estacionario. Valores en centavos de dólar.

	RMSE	MAE	Error Absoluto Máximo	Sesgo
1F	10.77	8.74	26.08	-2.56
2F	3.25	2.52	10.47	-2.13
3F	1.80	1.39	18.62	-1.23

Tabla V-30: RMSE, MAE, Error Absoluto Máximo y Sesgo de la diferencia entre los precios futuros teóricos de cobre a 10 años entregados por el modelo estacionario y no-estacionario. Valores en centavos de dólar.

	RMSE	MAE	Error Absoluto Máximo	Sesgo
1F	13.21	11.24	29.63	-0.57
2F	9.79	8.09	21.34	-7.71
3F	6.46	5.39	20.99	-5.25

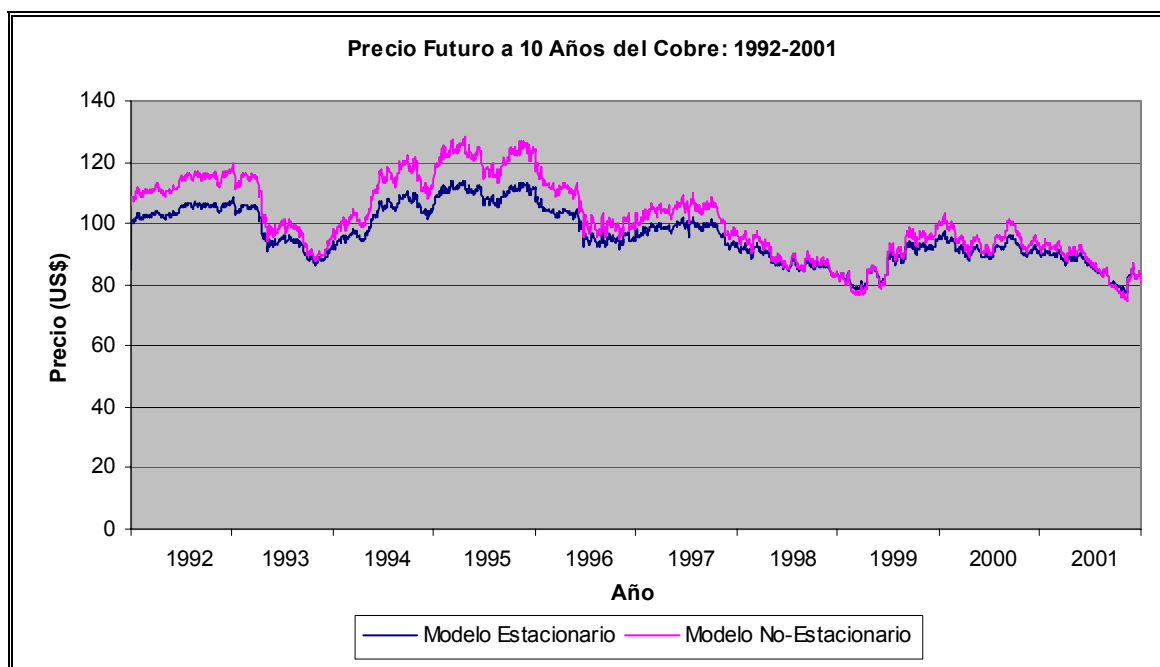


Figura 5-43: Precio futuro con vencimiento a 10 años del cobre para los modelos estacionario y no-estacionario de 3 factores: 1992-2001.

El precio teórico del futuro de largo plazo en el caso del modelo estacionario es mucho menos volátil que el calculado a partir del modelo no-estacionario, lo que se puede ver en la estructura de volatilidades teórica de ambos modelos. La figura 5-44 presenta la estructura de volatilidades teórica del modelo estacionario y no-estacionario de 3 factores para un horizonte de 10 años. Para los vencimientos que se disponen observaciones (vencimientos menores a 2 años) estas volatilidades coinciden pero las diferencias entre ambos modelos aumenta a medida que aumenta el vencimiento de los contratos. A los 5 años plazo, el modelo no-estacionario pronostica una volatilidad de los retornos cercana al 16% que se mantiene estable con la madurez de los contratos. El modelo estacionario en cambio entrega una volatilidad de 14% y 12% para plazos de 5 y 10 años respectivamente.

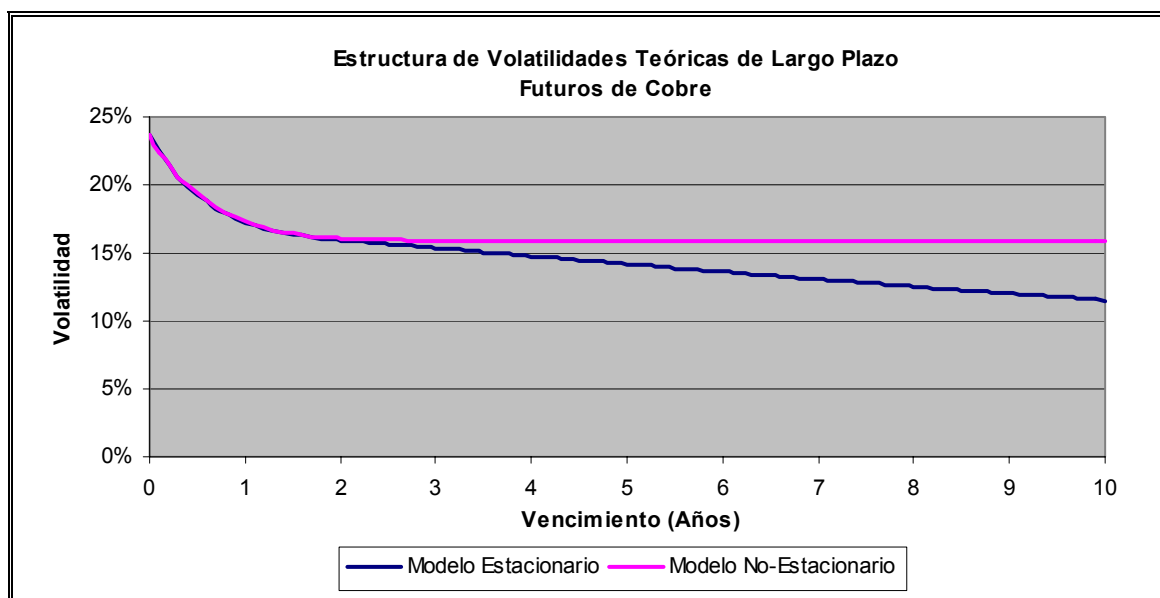


Figura 5-44: Estructura de volatilidades de los retornos de futuros de cobre para el modelo estacionario y no-estacionario de 3 factores utilizando parámetros calibrados con datos del Panel A: 1992-2001.

5.3.7 Conclusiones Preliminares para el Cobre

De los análisis realizados se puede ver que se requiere de al menos 2 factores para obtener una valorización precisa de los de los futuros de cobre así como un buen ajuste de la estructura de volatilidad de los retornos. Esto fue confirmado por el análisis realizado utilizando datos fuera de la muestra. Se pudo ver además que la estructura de volatilidad del cobre es menos convexa que la del petróleo, lo que indicaría que existe una menor reversión a la media en los precios.

Las diferencias entre el modelo estacionario y el no-estacionario a partir de los precios futuros observados no son importantes. El ajuste de ambos modelos para un mismo número de factores es muy similar. Lo mismo ocurre con la estructura de volatilidad observada, siendo en algunos casos mejor bajo la especificación no-estacionaria de precios. Las implicancias en la valorización y comportamiento estocástico de los futuros teóricos a 10 años plazo de ambos modelos de precios son sin embargo relevantes.

No existiría pues evidencia empírica relevante que permitiera concluir, a partir del período de tiempo y de los datos estudiados, que la especificación no-estacionaria de precios debiera ser rechazada para el caso del cobre⁴⁵.

⁴⁵ Sin embargo ver Anexo F.

VI CONCLUSIONES

En esta tesis se analizó una especificación general de un modelo lognormal multifactorial de precios de commodities aplicada al caso del cobre y del petróleo. El modelo propuesto tiene la ventaja que permite extender sin dificultad la mayoría de los modelos de precios de commodities que han sido propuestos en la literatura. Se realizó además un análisis de identificación de los parámetros que permitió desarrollar una representación canónica del modelo de precios. Esta representación contiene el mínimo número de parámetros y permite obtener fórmulas cerradas de valorización de contratos futuros bastante simples cuando se suponen precios de mercado del riesgo constantes, aún cuando el número de factores utilizado en el modelo es arbitrario. Esto contrasta con la mayoría de los modelos de precios propuestos en la literatura, en los cuales se llega algunas veces a fórmulas de valorización bastante complejas.

Se demostró además que la metodología del filtro de Kalman es una poderosa herramienta de estimación, que utilizada conjuntamente con el método de máxima verosimilitud, permite estimar tanto las variables de estado como los parámetros del modelo y obtener una cuantificación del error de estimación. Se mostró que otros métodos de estimación de variables de estado comúnmente utilizados en la literatura son casos particulares del filtro de Kalman. Se demostró además que el filtro de Kalman puede ser utilizado aún cuando el panel de datos es incompleto. Esto permite incorporar en la estimación ciertos contratos futuros para los cuales no se tienen observaciones diarias, como por ejemplo los contratos de largo plazo de petróleo. De esta forma, se está utilizando en el proceso de estimación información adicional que de otra forma no podría ser aprovechada.

Las estimaciones empíricas realizadas a partir de observaciones diarias de precios de cierre de contratos futuros de cobre y petróleo permitieron analizar el comportamiento de los modelos propuestos. El análisis fue realizado considerando el ajuste de los modelos a los precios observados y a la estructura de volatilidad empírica.

Para el caso del petróleo, se pudo concluir que se requiere de al menos 3 factores estocásticos para poder explicar los precios observados. Sin embargo, el modelo de 3 factores no ajustó bien la estructura de volatilidad empírica, a diferencia del modelo de 4 factores. Se realizó un análisis con datos fuera de la muestra que mostró que los modelos se comportan de manera estable.

Las estimaciones a partir de contratos futuros de cobre mostraron que el modelo de 2 factores realiza valorizaciones teóricas bastante precisas de los precios observados. La estructura de volatilidad teórica también se ajusta bien a la estructura de volatilidad empírica en el caso del modelo de 2 factores. El modelo de 3 factores corrige ligeramente los errores de estimación. Sin embargo, el cobre resultó tener una reversión a la media menor que la del petróleo, en particular en el corto plazo.

A la luz de los resultados obtenidos, no se pudo encontrar evidencia empírica relevante que invalidara la hipótesis que los precios del cobre y del petróleo siguen un proceso no-estacionario, bajo el supuesto que los precios de mercado del riesgo son constantes e independientes del nivel de las variables de estado.

El trabajo realizado en esta tesis se puede extender en varias direcciones. En primer lugar, el marco de estudio presentado permitiría analizar bajo una especificación multifactorial los futuros de ciertos commodities que exhiben una estacionalidad en los precios, como por ejemplo sería el caso del gas natural o de ciertos commodities agrícolas. El análisis presentado se puede también extender para analizar otras formas funcionales del nivel de reversión de las variables de estado.

Otra extensión que se podría realizar es la incorporación de otros instrumentos financieros, como son las opciones sobre futuros, en el proceso de estimación. El uso de instrumentos financieros que son particularmente sensibles a ciertos parámetros permitiría obtener estimaciones más confiables y robustas de dichos parámetros.

Siempre dentro del análisis de los precios de commodities, los desarrollos de esta tesis se podrían extender de manera de analizar especificaciones más complejas de los modelos de precios que incorporaran, por ejemplo, estructuras de volatilidad que varían con el tiempo dependiendo del nivel de las variables de estado.

La metodología propuesta en esta tesis se puede también extender para analizar desde una perspectiva dinámica y bayesiana otras variables económicas como podrían ser las tasas de interés. El filtro de Kalman se puede aplicar sin problemas para incorporar ciertos instrumentos financieros que dependen de la tasa de interés, como son los bonos, para determinar estructuras de equilibrio del nivel y de la volatilidad de las tasas. El hecho que el filtro se pueda utilizar con paneles de datos incompletos permite que esta metodología pueda ser aplicada en mercados menos líquidos y con pocas transacciones diarias.

BIBLIOGRAFÍA

ARAYA, L. (1997) *Modelación de procesos de reversión a la media para precios de commodities : los casos de cobre, petróleo y oro*, Mag. en Cs. de la Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile.

BABBS, S.H. y NOWMAN, K.B. (1999) Kalman filtering of generalized Vasicek term structure models. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 34, N° 1, 115-130.

BAKER, M.P., MAYFIELD, E.S. y PARSONS, J.E. (1998) Alternative models of uncertain commodity prices for use with modern asset pricing methods. *The Energy Journal*, Vol. 19, N° 1, 115-148.

BALL, C. y TOROUS, W. (1996) Unit roots and the estimation of interest rate dynamics. *Journal of Empirical Finance*, Vol. 3, 215-238.

BESSEMBINDER, H., COUGHENOUR, J.F., SEGUIN, P.J. y SMOLLER, M.M. (1995) Mean reversion in equilibrium asset prices: Evidence from the futures term structure. *The Journal of Finance*, Vol. 50, N° 1, 361-375.

BESSEMBINDER, H., COUGHENOUR, J.F., SEGUIN, P.J. y SMOLLER, M.M. (1996) Is there a term structure of futures volatilities? Reevaluating the Samuelson hypothesis. *The Journal of Derivatives*, Vol. 4, N° 2, 45-58.

BLACK, F. y SCHOLES, M. (1973) The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, Vol. 81, 637-654.

BRENNAN, M.J. (1991) The price of convenience and the valuation of commodity contingent claims. En D. Lund y B. Øksendal (eds.) *Stochastic models and option values*, Elsevier, North Holland.

BRENNAN, M.J. y SCHWARTZ, E.S. (1985) Evaluating natural resources investments. *Journal of Business*, Vol. 58, N° 2, 135-157.

CASASSUS, J. y COLLIN-DUFRESNE, P. (2001) 'Maximal' convenience yield model implied by commodity futures, *Documento de Trabajo*, Carnegie Mellon University.

CHEN, R.-R. y SCOTT, L. (1993) Maximum likelihood estimation for a multifactor equilibrium model of the term structure of interest rates. *The Journal of Fixed Income*, Vol. 3, 14-31.

CORTAZAR, G. (1999) The valuation of natural resources. En Trigeorgis (ed.) *Real options and business strategy: Applications to decision making*, Risk Books, London.

CORTAZAR, G. y CASASSUS, J. (2000) A compound option model for evaluating multi-stage natural resource investments. En M.J. Brennan y L. Trigeorgis (eds.) *Project flexibility, agency, and competition: New developments in the theory and application of real options*, Oxford University Press, New York.

CORTAZAR, G. y REYES, A. (2001) Option markets and the stochastic behavior of commodity prices. *5th Annual Conference Real Options: Theory Meets Practice International*, UCLA University, California.

CORTAZAR, G. y SCHWARTZ, E.S. (1993) A compound option model of production and intermediate investment. *Journal of Business*, Vol. 66, N° 4, 517-540.

CORTAZAR, G. y SCHWARTZ, E.S. (1994) The valuation of commodity-contingent claims. *The Journal of Derivatives*, Vol. 1, 27-35.

CORTAZAR, G. y SCHWARTZ, E.S. (1997) Implementing a real option model for valuing an undeveloped oil field. *International Transactions in Operational Research*, Vol. 4, N° 2, 125-137.

CORTAZAR, G. y SCHWARTZ, E.S. (1998) Monte Carlo evaluation model of an undeveloped oil field. *Journal of Energy Finance & Development*, Vol. 3, N° 1, 73-84.

CORTAZAR, G. y SCHWARTZ, E.S. (2002) Implementing a stochastic model for oil futures prices, *Documento de Trabajo*, Fondef DI102400.

CORTAZAR, G., SCHWARTZ, E.S. y LÖWENER, A. (1998) Optimal investment and production decisions and the value of the firm. *Review of Derivatives Research*, Vol. 2, 39-57.

COX, J.C., INGERSOLL, J.E., JR. y ROSS, S.A. (1981) The relation between forward prices and futures prices. *Journal of Financial Economics*, Vol. 9, 321-346.

COX, J.C., INGERSOLL, J.E., JR. y ROSS, S.A. (1985) A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, Vol. 53, 385-408.

DAI, Q. y SINGLETON, K.J. (2000) Specification analysis of affine term structure models. *The Journal of Finance*, Vol. 55, N° 5, 1943-1978.

DE JONG, F. (2000) Time-series and cross-section information in affine term structure models. *Journal of Business & Economics Statistics*, Vol. 18, N° 3, 300-314.

DE JONG, F. y SANTA-CLARA, P. (1999) The dynamics of the forward interest rate curve: A formulation with state variables. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 34, N° 1, 131-157.

DEWACHTER, H. y MAES, K. (2001) An admissible affine model for joint term structure dynamics of interest rates, *Documento de Trabajo*, Katholieke Universiteit Leuven.

DÍAZ, A. (2000) *Modelos de precios de commodities, filtro de Kalman y su aplicación a políticas óptimas de hedging en mercados de futuros*, Mag. en Cs. de la Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile.

DUAN, J.-C. y SIMONATO, J.-G. (1995) Estimating and testing exponential-affine term structure models by Kalman filter, *Documento de Trabajo*, CIRANO.

DUFFIE, D. (1989) *Futures markets*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

- DUFFIE, D. (2001) *Dynamic asset pricing theory*. 3rd edn, Princeton University Press, Princeton, N.J.
- DUFFIE, D. y KAN, R. (1996) A yield-factor model of interest rates. *Mathematical Finance*, Vol. 6, 379-406.
- DUFFIE, D. y SINGLETON, K.J. (1997) An econometric model of the term structure of interest-rate swap yields. *The Journal of Finance*, Vol. 52, N° 4, 1287-1321.
- GEYER, A.L.J. y PICHLER, S. (1998) A state-space approach to estimate and test multifactor Cox-Ingersoll-Ross models of the term structure, *Documento de Trabajo*, University of Economics Vienna.
- GIBSON, R. y SCHWARTZ, E.S. (1990) Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims. *The Journal of Finance*, Vol. 45, N° 3, 959-976.
- GIBSON, R. y SCHWARTZ, E.S. (1991) Valuation of long-term oil-linked assets. En D. Lund y B. Øksendal (eds.) *Stochastic models and option values*, Elsevier, North Holland.
- HAMILTON, J.D. (1994) *Time series analysis*, Princeton University Press, Princeton, N.J.
- HARVEY, A.C. (1989) *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*, Cambridge University Press, Cambridge.
- HULL, J. (1999) *Options, futures, & other derivatives*. 4th edn, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- HULL, J. y WHITE, A. (1990) Pricing interest-rate derivative securities. *The Review of Financial Studies*, Vol. 3, N° 4, 573-592.
- KALMAN, R.E. (1960) A new approach lo linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering, Transactions of the ASME*, Vol. 82, 35-45.

KENNEDY, P. (1985) *A guide to econometrics*. 2nd edn, MIT Press, Cambridge, Mass.

LANGTIEG, T.C. (1980) A multivariate model of the term structure. *The Journal of Finance*, Vol. 35, N° 1, 71-97.

LAUGHTON, D.G. y JACOBY, H.D. (1993) Reversion, timing options, and long-term decision-making. *Financial Management*, Vol. 22, N° 3, 225-240.

LO, A.W. y WIANG, J. (1995) Implementing option pricing models when asset returns are predictable. *The Journal of Finance*, Vol. 50, N° 1, 87-129.

LUCIA, J.J. y SCHWARTZ, E.S. (2001) Electricity prices and power derivatives: Evidence from the nordic power exchange, *Documento de Trabajo*, The Anderson School of Management.

LUND, J. (1994) Econometric analysis of continuous-time arbitrage-free models of the term structure of interest rates, *Documento de Trabajo*, The Aarhus School of Business.

LUND, J. (1997) Non-linear Kalman filtering techniques for term-structure models, *Documento de Trabajo*, The Aarhus School of Business.

MANOLIU, M. y TOMPAIDIS, S. (2002) Energy futures prices: Term structure models with Kalman filter estimation. *Applied Mathematical Finance*, por aparecer.

ØKSENDAL, B. (1998) *Stochastic differential equations : an introduction with applications*. 5th edn, Springer, Berlin ; New York.

PEARSON, N.D. y SUN, T.-S. (1994) Exploiting the conditional density in estimating the term structure: An application to the Cox, Ingersoll, and Ross model. *The Journal of Finance*, Vol. 49, N° 4, 1279-1304.

PENNACCHI, G.G. (1991) Identifying the dynamics of real interest rates and inflation: Evidence using survey data. *The Review of Financial Studies*, Vol. 4, N° 1, 53-86.

PINDYCK, R.S. (1999) The long-run evolution of energy prices. *The Energy Journal*, Vol. 20, N° 2, 1-27.

REYES, A. (2000) *Utilización de la información de los mercados de futuros y de opciones para la modelación estocástica de los precios de los commodities : el caso del petróleo*, Mag. en Cs. de la Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile.

RIERA, F. (1999) *Modelación estocástica de los futuros de commodities : estimaciones para el cobre y el petróleo*, Mag. en Cs. de la Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile.

SCHWARTZ, E.S. (1997) The stochastic behaviour of commodity prices: Implications for valuation and hedging. *The Journal of Finance*, Vol. 52, N° 3, 923-973.

SCHWARTZ, E.S. (1998) Valuing long-term commodity assets. *Financial Management*, Vol. 27, N° 1, 57-66.

SCHWARTZ, E.S. y SMITH, J.E. (2000) Short-term variations and long-term dynamics in commodity prices. *Management Science*, Vol. 46, 893-911.

SØRENSEN, C. (2002) Modeling seasonality in agricultural commodity futures. *Journal of Futures Markets*, Vol. 22, 393-426.

ANEXOS

ANEXO A : DEMOSTRACIÓN DE LAS PROPOSICIONES

A.1 Transformación Invariante sobre el Vector de Estados

Sea el modelo de N factores para el precio spot de un commodity dado por:

$$Y_t = \mathbf{h}'\mathbf{x}_t + d \quad (\text{A.1})$$

$$d\mathbf{x}_t = (-\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b})dt + \Sigma d\mathbf{w}_t \quad (\text{A.2})$$

donde \mathbf{h} y \mathbf{b} son vectores de dimensión $N \times 1$, \mathbf{A} es una matriz de dimensión $N \times N$ que tiene N valores propios distintos⁴⁶, Σ es una matriz de dimensión $N \times N$ y $d\mathbf{w}_t$ es un vector de incrementos de un proceso de Wiener de dimensión $N \times 1$ que pueden estar correlacionados entre sí $d\mathbf{w}_t d\mathbf{w}_t' = \Theta dt$. Se supone además que la matriz de varianza-covarianza instantánea $\Omega = \Sigma \Theta \Sigma'$ debe ser estrictamente definida positiva⁴⁷.

Se define la transformación invariante $\mathbf{T}(\mathbf{x}_t) = \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{L}\mathbf{x}_t$, donde $\boldsymbol{\varphi}$ es un vector de dimensión $N \times 1$ y \mathbf{L} es una matriz invertible de dimensión $N \times N$ y se define el nuevo vector de estados $\mathbf{z}_t = \mathbf{T}(\mathbf{x}_t)$. De la ecuación (A.1) se tiene que:

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbf{h}'\mathbf{x}_t + d \\ &= (\mathbf{h}'\mathbf{L}^{-1})(\mathbf{L}\mathbf{x}_t) + d \\ &= (\mathbf{h}'\mathbf{L}^{-1})(\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{L}\mathbf{x}_t) + (d - \mathbf{h}'\mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{\varphi}) \\ &= \hat{\mathbf{h}}'\mathbf{z}_t + \hat{d} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

donde $\hat{\mathbf{h}}' = \mathbf{h}'\mathbf{L}^{-1}$ y $\hat{d} = d - \mathbf{h}'\mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{\varphi}$. Aplicando el lema de Ito, de la ecuación (A.2) se obtiene el siguiente proceso para \mathbf{z}_t :

⁴⁶ No es necesario suponer que los valores propios de la matriz de reversión son distintos.

⁴⁷ Esto implica que se supone que todos los factores son estocásticos.

$$\begin{aligned}
dz_t &= d(\mathbf{L}x_t) \\
&= \mathbf{L}dx_t \\
&= \mathbf{L}((- \mathbf{A}x_t + \mathbf{b})dt + \mathbf{\Sigma}d\mathbf{w}_t) \\
&= (-\mathbf{LAL}^{-1})(\mathbf{L}x_t) + (\mathbf{Lb})dt + (\mathbf{L}\mathbf{\Sigma})d\mathbf{w}_t \\
&= (-\mathbf{LAL}^{-1})(\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{L}x_t) + (\mathbf{LAL}^{-1}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{Lb})dt + (\mathbf{L}\mathbf{\Sigma})d\mathbf{w}_t \\
&= (-\hat{\mathbf{A}}z_t + \hat{\mathbf{b}})dt + \hat{\mathbf{\Sigma}}d\mathbf{w}_t
\end{aligned} \tag{A.4}$$

donde $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{LAL}^{-1}$, $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{LAL}^{-1}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{Lb}$ y $\hat{\mathbf{\Sigma}} = \mathbf{L}\mathbf{\Sigma}$.

Es importante señalar que las transformaciones invariantes preservan las propiedades dinámicas del vector de estados. Esto proviene del hecho que como $\hat{\mathbf{A}}$ es una matriz similar a la matriz \mathbf{A} , ambas matrices tienen los mismos vectores propios. Este es un hecho muy importante ya que si se hace una suposición acerca de los valores propios de un modelo, esto debe cumplirse para cualquier modelo que sea equivalente mediante una transformación invariante aplicada sobre el vector de estados.

Lo mismo ocurre con la nueva matriz de varianza-covarianza instantánea del vector de estados \mathbf{z}_t que está dada por $\mathbf{L}(\mathbf{\Sigma}\boldsymbol{\Theta}\mathbf{\Sigma}')\mathbf{L}' = \mathbf{L}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{L}'$. Como es una matriz congruente⁴⁸ a $\boldsymbol{\Omega}$, que es una matriz estrictamente definida positiva, entonces la matriz de varianza-covarianza de \mathbf{z}_t también es estrictamente definida positiva.

En resumen, el nuevo proceso para el precio spot está dado por:

$$Y_t = \hat{\mathbf{h}}'z_t + \hat{d} \tag{A.5}$$

$$dz_t = (-\hat{\mathbf{A}}z_t + \hat{\mathbf{b}})dt + \hat{\mathbf{\Sigma}}d\mathbf{w}_t \tag{A.6}$$

El método desarrollado en esta sección de cómo aplicar una transformación invariante a un modelo del precio spot se utilizará con mucha

⁴⁸ Dos matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} son congruentes si están relacionadas por $\mathbf{A} = \mathbf{P}'\mathbf{B}\mathbf{P}$. Se puede demostrar fácilmente que la congruencia de matrices preserva la propiedad de “definitividad”, ya sea estricta, negativa o positiva.

frecuencia en las demostraciones de las proposiciones y corolarios que se presentan a continuación.

A.2 Demostración de la Proposición 2.1

Sea el modelo de N factores para el precio spot de un commodity dado por:

$$Y_t = \mathbf{h}' \mathbf{x}_t + d \quad (\text{A.7})$$

$$d\mathbf{x}_t = (-\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b})dt + \Sigma d\mathbf{w}_t \quad (\text{A.8})$$

donde \mathbf{h} y \mathbf{b} son vectores de dimensión $N \times 1$, \mathbf{A} es una matriz de dimensión $N \times N$ que tiene N valores propios distintos y todos estrictamente mayores que cero, Σ es una matriz de dimensión $N \times N$ y $d\mathbf{w}_t$ es un vector de incrementos de un proceso de Wiener de dimensión $N \times 1$ que pueden estar correlacionados entre sí $d\mathbf{w}_t d\mathbf{w}_t' = \mathbf{I} dt$. Se supone además que la matriz de varianza-covarianza instantánea $\mathbf{\Omega} = \Sigma \mathbf{\Theta} \Sigma'$ debe ser estrictamente definida positiva⁴⁹.

Para que el problema tenga sentido, es decir, que el precio spot esté relacionado con las variables de estado, el vector \mathbf{h} tiene que tener a lo menos un elemento distinto de cero. Si este vector tiene algunos elementos iguales a cero, supondremos sin pérdida de generalidad que son los primeros R elementos⁵⁰ del vector \mathbf{h} . Escribamos al vector \mathbf{h} y definamos la matriz \mathbf{P} de dimensión $N \times N$ de la siguiente manera:

⁴⁹ Esto implica que suponemos que todos los factores son estocásticos.

⁵⁰ Siempre se puede reordenar los elementos del vector \mathbf{x} .

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_R \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/h_1 & \dots & 0 & | & 1/h_1 & \dots & 1/h_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1/h_R & | & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & | & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & | & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

La matriz \mathbf{P} es invertible⁵¹ y se cumple que:

$$\mathbf{h}'\mathbf{P} = \mathbf{1}' \quad (\text{A.10})$$

Se define pues un nuevo vector de estados $\boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_t$ y de esta forma las ecuaciones (A.1) y (A.2) se pueden describir como:

$$\begin{aligned} Y_t &= (\mathbf{h}'\mathbf{P})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_t) + d \\ &= \mathbf{1}'\boldsymbol{\eta}_t + d \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\eta}_t &= \mathbf{P}^{-1}d\mathbf{x}_t \\ &= (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} - (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{z}_t))dt + (\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\Sigma})d\mathbf{w}_t \\ &= (\mathbf{c} - \mathbf{B}\boldsymbol{\eta}_t)dt + \mathbf{T}d\mathbf{w}_t \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

donde $\mathbf{c} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ y $\mathbf{T} = \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}$. Cómo \mathbf{B} es una matriz similar a la matriz \mathbf{A} , tiene sus mismos valores propios (todos distintos y estrictamente mayores que cero). Asimismo, la nueva matriz de varianza-covarianza instantánea es:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\mathbf{T}' &= \mathbf{P}^{-1}(\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Sigma}')(\mathbf{P}^{-1})' \\ &= \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{P}^{-1})' \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Esta matriz es congruente a $\boldsymbol{\Omega}$ y por lo tanto también es estrictamente definida positiva.

⁵¹ Esta no es la única matriz que verifica la ecuación (A.10). La invertibilidad de esta matriz proviene del hecho que es triangular superior y todos los términos de su diagonal son mayores que cero.

Como la matriz \mathbf{B} tiene todos sus valores propios distintos⁵², entonces es diagonalizable y se puede representar como:

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}\mathbf{K}\mathbf{V}^{-1} \quad (\text{A.14})$$

donde $\mathbf{K} = \text{diag}(\kappa_i)$ es una matriz diagonal que contiene los valores propios de \mathbf{A} y \mathbf{V} es una matriz cuyas columnas son los vectores propios de \mathbf{A} .

Por lo general los vectores propios se escalan de manera tal que su norma sea unitaria, ya que no son únicos y lo que importa es su dirección en el espacio N dimensional. Los vectores propios de la matriz \mathbf{V} se pueden escoger entonces de manera que la suma de sus componentes sea igual a 1 (basta con dividir cada término de un vector propio por la suma de sus elementos). De esta forma, se cumple que:

$$\mathbf{1}'\mathbf{V} = \mathbf{1}' \quad (\text{A.15})$$

Luego, si se define el nuevo vector de estados $\xi_t = \mathbf{V}^{-1}\eta_t$, las ecuaciones (A.11) y (A.12) se pueden representar como:

$$\begin{aligned} Y_t &= (\mathbf{1}'\mathbf{V})(\mathbf{V}^{-1}\eta_t) + d \\ &= \mathbf{1}'\xi_t + d \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} d\xi_t &= \mathbf{V}^{-1}d\eta_t \\ &= (\mathbf{V}^{-1}\mathbf{c} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}\eta_t)dt + \mathbf{V}^{-1}\mathbf{T}d\mathbf{w}_t \\ &= ((\mathbf{V}^{-1}\mathbf{c}) - (\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{V})(\mathbf{V}^{-1}\eta_t))dt + (\mathbf{V}^{-1}\mathbf{T})d\mathbf{w}_t \\ &= (\hat{\mathbf{c}} - \mathbf{K}\xi_t)dt + \mathbf{S}d\mathbf{w}_t \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

donde $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{c}$, $\mathbf{K} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{V}$ es una matriz diagonal (con los valores propios de la matriz \mathbf{A} en la diagonal) y $\mathbf{S} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{T}$. La nueva matriz de varianza-covarianza instantánea es:

$$\Phi = \mathbf{S}\mathbf{S}' = \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{T}\mathbf{T}')(\mathbf{V}^{-1})' \quad (\text{A.18})$$

⁵² Nótese que los valores propios de \mathbf{B} son los mismos que \mathbf{A} .

Esta matriz también es estrictamente definida positiva por la congruencia existente entre \mathbf{SOS}' y \mathbf{TOT}' . Por ser una matriz de varianza-covarianza, esta matriz se puede representar de la siguiente manera:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \cdots & \sigma_1\sigma_N\rho_{1N} \\ \sigma_2\sigma_1\rho_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_2\sigma_N\rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_N\sigma_1\rho_{N1} & \sigma_N\sigma_2\rho_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

y esto implica que puede ser factorizada como:

$$\Phi = \Gamma\Psi\Gamma' \quad (\text{A.20})$$

donde:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_N \end{pmatrix} \quad \Psi = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Por lo tanto la ecuación (A.17) se puede describir como:

$$d\xi_t = (\hat{\mathbf{c}} - \mathbf{K}\xi_t)dt + \Gamma d\tilde{\mathbf{w}}_t \quad (\text{A.22})$$

donde los nuevos incrementos de Wiener $d\tilde{\mathbf{w}}_t$ están correlacionados:

$$(d\tilde{\mathbf{w}}_t)(d\tilde{\mathbf{w}}_t)' = \Psi dt \quad (\text{A.23})$$

Finalmente, la ecuación (A.22) se puede describir de la siguiente manera:

$$d\xi_t = -\mathbf{K}(\xi_t - \mathbf{K}^{-1}\hat{\mathbf{c}})dt + \Gamma d\tilde{\mathbf{w}}_t \quad (\text{A.24})$$

La matriz \mathbf{K} es invertible dado que tiene todos sus valores propios estrictamente mayores que cero. Por lo tanto, si se define el nuevo vector de estados $\zeta_t = \xi_t - \mathbf{K}^{-1}\hat{\mathbf{c}}$, (A.24) se puede describir como (nótese que no tiene drift o tendencia):

$$d\zeta_t = -\mathbf{K}\zeta_t dt + \Gamma d\tilde{\mathbf{w}}_t \quad (\text{A.25})$$

La ecuación (A.16) queda como:

$$\begin{aligned}
 Y_t &= 1'(\zeta_t + \mathbf{K}^{-1}\hat{\mathbf{c}}) + d \\
 &= 1'\zeta_t + (d + \mathbf{K}^{-1}\hat{\mathbf{c}}) \\
 &= 1'\zeta_t + e
 \end{aligned} \tag{A.26}$$

donde $e = d + \mathbf{K}^{-1}\hat{\mathbf{c}}$.

En conclusión, se ha podido transformar el modelo definido por las ecuaciones (A.1) y (A.2) en el siguiente modelo:

$$Y_t = 1'\zeta_t + e \tag{A.27}$$

$$d\zeta_t = -\mathbf{K}\zeta_t dt + \mathbf{\Gamma}d\tilde{\mathbf{w}}_t \tag{A.28}$$

Es importante señalar que la demostración presentada aquí no sólo demuestra el resultado de la proposición 1.1, sino que además entrega una metodología precisa sobre como transformar cualquier modelo de la forma dada por las ecuaciones (A.1) y (A.2) en la forma canónica recién definida.

A.3 Demostración del Corolario 2.1

Aplicado la transformación de Cholesky a la matriz de varianza-covarianza instantánea Φ del vector de estados definido por la ecuación (A.28), ésta se puede representar como:

$$\Phi = \mathbf{L}\mathbf{L}' \tag{A.29}$$

donde \mathbf{L} es una matriz triangular inferior. Nótese que la inversa de una matriz triangular inferior es también una matriz triangular inferior y el producto de dos matrices triangulares inferiores también es una matriz triangular inferior. Si se define el nuevo vector de estados $\zeta_t = \mathbf{L}^{-1}\zeta_t$, entonces:

$$\begin{aligned}
 Y_t &= (1'\mathbf{L})(\mathbf{L}^{-1}\zeta_t) + e \\
 &= \mathbf{h}'\zeta_t + e
 \end{aligned} \tag{A.30}$$

$$\begin{aligned}
d\zeta_t &= -(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{K})\zeta_t dt + (\mathbf{L}^{-1}\mathbf{\Gamma})d\tilde{w}_t \\
&= -(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{K})\zeta_t dt + d\hat{w}_t
\end{aligned} \tag{A.31}$$

donde $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{\Lambda}$ es una matriz triangular inferior y los nuevo incrementos $d\hat{w}_t$ no están correlacionados dado que la nueva matriz de varianza-covarianza instantánea es $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{\Phi}\mathbf{L} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{L}'(\mathbf{L}^{-1})' = \mathbf{I}$, la matriz identidad.

A.4 Demostración de la Proposición 2.2

Sea el modelo de N factores para el precio spot de un commodity dado por:

$$Y_t = \mathbf{h}'\mathbf{x}_t + d \tag{A.32}$$

$$d\mathbf{x}_t = (-\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b})dt + \mathbf{\Sigma}d\mathbf{w}_t \tag{A.33}$$

donde \mathbf{h} y \mathbf{b} son vectores de dimensión $N \times 1$, \mathbf{A} es una matriz de dimensión $N \times N$ que tiene N valores propios distintos, de los cuales el primero es igual a cero y el resto son todos estrictamente mayores que cero, $\mathbf{\Sigma}$ es una matriz de dimensión $N \times N$ y $d\mathbf{w}_t$ es un vector de incrementos de un proceso de Wiener de dimensión $N \times 1$ que pueden estar correlacionados entre sí $d\mathbf{w}_t d\mathbf{w}_t' = \mathbf{\Theta}dt$, entonces se supone además que la matriz de varianza-covarianza instantánea $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Sigma}\mathbf{\Theta}\mathbf{\Sigma}'$ debe ser estrictamente definida positiva.

Para demostrar esta proposición, nótese que la única diferencia con el modelo de la proposición 1.1 es que uno de los valores propios de la matriz \mathbf{A} es igual a cero. Si uno mira la demostración de la proposición 1.1, se puede llegar a la representación dada por las ecuaciones (A.16) y (A.22) sin necesidad de realizar ninguna suposición acerca de si alguno de los valores propios de \mathbf{A} es distinto o igual a cero. Por lo tanto, el modelo dado por las ecuaciones (A.32) y (A.33) es equivalente a:

$$Y_t = \mathbf{1}'\xi_t + d \tag{A.34}$$

$$d\xi_t = (\hat{\mathbf{c}} - \mathbf{K}\xi_t)dt + \mathbf{\Gamma}d\tilde{w}_t \tag{A.35}$$

donde $\hat{\mathbf{c}}$ y \mathbf{K} en este caso son:

$$\hat{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \vdots \\ \hat{c}_N \end{pmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \kappa_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \kappa_N \end{pmatrix} \quad (\text{A.36})$$

Si se define el nuevo vector de estados ζ_t tal que:

$$\zeta_t = \xi_t + \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^N \hat{c}_i / \kappa_i + d \\ -\hat{c}_2 / \kappa_2 \\ \vdots \\ -\hat{c}_N / \kappa_N \end{pmatrix} \quad (\text{A.37})$$

entonces la ecuación (A.35) se puede describir como:

$$d\zeta_t = d\xi_t = (\mathbf{v} - \mathbf{K}\zeta_t) dt + \Gamma d\tilde{\mathbf{w}}_t \quad (\text{A.38})$$

donde

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \hat{c}_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.39})$$

mientras que la ecuación (A.34) queda:

$$Y_t = 1' \zeta_t \quad (\text{A.40})$$

A.5 Demostración del Corolario 2.2

Para demostrar el corolario 2.2, simplemente se define un vector de estados un poco distinto al presentado en la ecuación (A.37):

$$\zeta_t = \xi_t + \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^N \hat{c}_i / \kappa_i + d - \hat{c}_1 t \\ -\hat{c}_2 / \kappa_2 \\ \vdots \\ -\hat{c}_N / \kappa_N \end{pmatrix} \quad (\text{A.41})$$

La ecuación (A.35) queda

$$d\zeta_t = d\xi_t + \begin{pmatrix} -\hat{c}_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} dt = -\mathbf{K}\zeta_t dt + \mathbf{\Gamma} d\tilde{\mathbf{w}}_t \quad (\text{A.42})$$

mientras que la ecuación (A.34) queda:

$$Y_t = 1' \zeta_t + \hat{c}_1 t \quad (\text{A.43})$$

ANEXO B : ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS LINEALES A COEFICIENTES CONSTANTES

B.1 Solución General de la Ecuación Diferencial Estocástica Lineal a Coeficientes Constantes

En esta sección se resuelve la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dx_t = (-Ax_t + b)dt + \Sigma dw_t \quad (\text{B.1})$$

donde \mathbf{A} es una matriz de dimensión $N \times N$, Σ es una matriz de dimensión $N \times N$ y dw_t es un vector de incrementos de un proceso de Wiener de dimensión $N \times 1$ que pueden estar correlacionados entre sí $dw_t dw_t' = \Theta dt$. Se supone además que la matriz de varianza-covarianza instantánea $\Omega = \Sigma \Theta \Sigma'$ debe ser estrictamente definida positiva.

Para esto se define el siguiente vector de estados:

$$y_t = e^{At} x_t \quad (\text{B.2})$$

Aplicando el lema de Ito a y_t , se obtiene:

$$\begin{aligned} dy_t &= e^{At} dx_t + A e^{At} x_t \\ &= e^{At} ((-Ax_t + b)dt + \Sigma dw_t) + A e^{At} x_t \\ &= e^{At} b dt + e^{At} \Sigma dw_t \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Nótese que se ha utilizado la propiedad que la matriz exponencial conmuta con su exponente, es decir $e^{At} \mathbf{A} = \mathbf{A} e^{At}$.

La ecuación (B.3) es fácilmente integrable y se obtiene que:

$$\int_t^T dy_s = \int_t^T e^{As} b ds + \int_t^T e^{As} \Sigma dw_s \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{y}_T - \mathbf{y}_t = \left(\int_t^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}s} ds \right) \mathbf{b} + \int_t^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}s} \boldsymbol{\Sigma} d\mathbf{w}_s \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{y}_T = \mathbf{y}_t + \left(\int_t^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}s} ds \right) \mathbf{b} + \int_t^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}s} \boldsymbol{\Sigma} d\mathbf{w}_s \quad (\text{B.6})$$

Reemplazando $\mathbf{y}_t = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_t$ en la ecuación (B.6) se llega a:

$$\mathbf{x}_T = \mathbf{e}^{-\mathbf{A}(T-t)} \mathbf{x}_t + \mathbf{e}^{-\mathbf{A}T} \left(\int_t^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}s} ds \right) \mathbf{b} + \mathbf{e}^{-\mathbf{A}T} \int_t^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}s} \boldsymbol{\Sigma} d\mathbf{w}_s \quad (\text{B.7})$$

Esta es la solución general de la ecuación (B.1), condicional a un valor de \mathbf{x}_t . Nótese que la ecuación (B.7) indica que el vector de estados \mathbf{x}_t sigue un proceso gaussiano, o sea, su distribución condicional es normal⁵³.

Sea $\mathbf{E}_t(\cdot)$ y $\mathbf{Cov}_t(\cdot)$ el valor esperado y la varianza-covarianza condicional a la información en el tiempo t . Entonces, se tiene que⁵⁴:

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{x}_T) = \mathbf{e}^{-\mathbf{A}(T-t)} \mathbf{x}_t + \left(\int_0^{T-t} \mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau} d\tau \right) \mathbf{b} \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{Cov}_t(\mathbf{x}_T) = \int_0^{T-t} \mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\Sigma}' (\mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau})' d\tau \quad (\text{B.9})$$

donde $\boldsymbol{\Theta} dt = (d\mathbf{w}_t)(d\mathbf{w}_t)'$. Nótese que la varianza-covarianza no depende de las variables de estado.

⁵³ Ver Øksendal (1998).

⁵⁴ La fórmula de la varianza es una consecuencia de la isometría de Ito. Se recomienda ver por ejemplo Øksendal (1998) donde se presenta un desarrollo formal del cálculo estocástico.

B.2 Diagonalización de la Matriz de Reversión

Si se supone que los valores propios de \mathbf{A} son todos distintos entre sí, esta matriz es siempre diagonalizable y la ecuación (B.7) se puede simplificar de manera considerable. Sea $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{K}\mathbf{V}^{-1}$ donde \mathbf{V} es una matriz cuyas columnas son los vectores propios de \mathbf{A} y \mathbf{K} es una matriz diagonal con los valores propios de \mathbf{A} . Definiendo entonces el nuevo vector de estados $\xi_t = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_t$ la ecuación (B.1) queda como⁵⁵:

$$d\xi_t = (-\mathbf{K}\xi_t + \mathbf{c})dt + \mathbf{\Gamma}d\tilde{\mathbf{w}}_t \quad (\text{B.10})$$

donde $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Psi}\mathbf{\Gamma}'$ es la matriz de varianza-covarianza instantánea del vector de estados ξ_t y $\mathbf{\Psi}dt = (d\tilde{\mathbf{w}}_t)(d\tilde{\mathbf{w}}_t)'$ y

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_N \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Psi} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \cdots & \sigma_1\sigma_N\rho_{1N} \\ \sigma_2\sigma_1\rho_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_2\sigma_N\rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_N\sigma_1\rho_{N1} & \sigma_N\sigma_2\rho_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Analicemos primero el caso en que todos los valores propios de \mathbf{K} son estrictamente mayores que cero y representemos la matriz \mathbf{K} y al vector de estados ξ_t como:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \kappa_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \kappa_N \end{pmatrix} \quad \xi_t = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \vdots \\ \xi_N(t) \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

⁵⁵ Ver Anexo A.

En este caso, se tiene simplemente que:

$$e^{-\mathbf{K}t} = \begin{pmatrix} e^{-\kappa_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-\kappa_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-\kappa_N t} \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

$$\int_0^{T-t} e^{-\mathbf{K}s} ds = \begin{pmatrix} \frac{1 - e^{-\kappa_1(T-t)}}{\kappa_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1 - e^{-\kappa_2(T-t)}}{\kappa_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1 - e^{-\kappa_N(T-t)}}{\kappa_N} \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Además, si denotamos por χ_{ij} al elemento (i, j) de la matriz $e^{-\mathbf{K}t} \mathbf{\Omega} (e^{-\mathbf{K}t})'$ y por ν_{ij} al elemento (i, j) de la matriz $\int_0^{T-t} e^{-\mathbf{K}\tau} \mathbf{\Omega} (e^{-\mathbf{K}\tau})' d\tau$ entonces se tiene:

$$\chi_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} e^{-(\kappa_i + \kappa_j)t} \quad (\text{B.16})$$

$$\nu_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(\kappa_i + \kappa_j)(T-t)}}{\kappa_i + \kappa_j} \quad (\text{B.17})$$

Luego, de las ecuaciones (B.8) y (B.9) se tiene que:

$$E_t(\xi_i(T)) = e^{-\kappa_i(T-t)} \xi_i(t) + \frac{1 - e^{-\kappa_i(T-t)}}{\kappa_i} c_i \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{B.18})$$

$$\text{Cov}_t(\xi_i(T), \xi_j(T)) = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(\kappa_i + \kappa_j)(T-t)}}{\kappa_i + \kappa_j} \quad i, j = 1, \dots, N \quad (\text{B.19})$$

donde $E_t(\xi_i(T))$ es el elemento i del vector $\mathbf{E}_t(\xi_T)$ y $\text{Cov}_t(\xi_i(T), \xi_j(T))$ es el elemento (i, j) de la matriz de varianza-covarianza $\mathbf{Cov}_t(\xi_T)$. Es decir, las

ecuaciones (B.18) y (B.19) nos entregan los momentos condicionales del proceso estocástico ξ_t .

Si alguno de los valores propios de \mathbf{K} es igual a cero, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\kappa_1 = 0$. Las ecuaciones (B.18) y (B.19) en este caso son:

$$E_t(\xi_i(T)) = \begin{cases} \xi_1(t) + c_1(T-t) & i = 1 \\ e^{-\kappa_i(T-t)}\xi_i(t) + \frac{1 - e^{-\kappa_i(T-t)}}{\kappa_i}c_i & i = 2, \dots, N \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

$$\text{Cov}_t(\xi_i(T), \xi_j(T)) = \begin{cases} \sigma_1^2(T-t) & i = 1, j = 1 \\ \sigma_i\sigma_j\rho_{ij} \frac{1 - e^{-(\kappa_i + \kappa_j)(T-t)}}{\kappa_i + \kappa_j} & i \neq 1, j \neq 1 \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

Los momentos del vector de estados original \mathbf{x}_t se encuentran a partir de las siguientes ecuaciones:

$$E_t(\mathbf{x}_T) = (\mathbf{V})(E_t(\xi_T)) \quad (\text{B.22})$$

$$\text{Cov}_t(\mathbf{x}_T) = (\mathbf{V})(\text{Cov}_t(\xi_T))(\mathbf{V}') \quad (\text{B.23})$$

B.3 Momentos de una Combinación Lineal de Variables de Estado

Sea $Y_t = \mathbf{h}'\mathbf{x}_t + d_t$ una combinación lineal de las variables de estado definidas por (B.1). Entonces, se tiene que:

$$E_t(Y_T) = (\mathbf{h}')(E_t(\mathbf{x}_T)) + d_T \quad (\text{B.24})$$

$$\text{Var}_t(Y_T) = (\mathbf{h}')(\text{Cov}_t(\mathbf{x}_T))(\mathbf{h}) \quad (\text{B.25})$$

Estas dos últimas fórmulas permiten encontrar los momentos condicionales y marginales de la distribución del logaritmo del precio spot o valorizar un contrato futuro, como se verá más adelante.

ANEXO C : VALORIZACIÓN DE CONTRATOS FUTUROS

C.1 Valorización de Contratos Futuros

Sea $F(\mathbf{x}_t, t, T)$ el precio de un futuro escrito en t y que vence en T dado un cierto valor del vector de estados \mathbf{x}_t y sea $\tau = T - t$ la madurez del contrato. El valor teórico del precio de un futuro estará entonces dado por⁵⁶:

$$F(\mathbf{x}_t, t, T) = E_t^Q(S_T) = \exp\left(E_t^Q(Y_T) + \frac{1}{2} \text{Var}_t^Q(Y_T)\right) \quad (\text{C.1})$$

donde Q representa la medida de probabilidad neutral al riesgo. La fórmula explícita para un futuro bajo cada uno de los 2 modelos presentados anteriormente se presenta a continuación.

La valorización teórica de un futuro también puede ser derivada utilizando los mismos argumentos de arbitraje y resolviendo una ecuación diferencial parcial como se presenta por ejemplo en Gibson y Schwartz (1990). La relación entre ambos enfoques está garantizada por la fórmula de Feynmann-Kac, como se indica en Duffie (2001).

C.1.1 Modelo Estacionario

Bajo la medida de probabilidad ajustada por riesgo, el proceso que sigue el vector de estados es:

$$d\mathbf{x}_t = (-\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{A}\mathbf{x}_t)dt + \boldsymbol{\Sigma}d\mathbf{w}_t^* \quad (\text{C.2})$$

donde $\boldsymbol{\lambda}$ es un vector de constantes que representa el precio de mercado del riesgo. Utilizando las ecuaciones (B.18) y (B.19), los momentos de \mathbf{x}_t bajo la medida Q son:

⁵⁶ Ver Capítulo 3.

$$E_t^Q(x_i(T)) = e^{-a_i(T-t)} x_i(t) - \frac{1 - e^{-a_i(T-t)}}{a_i} \lambda_i \quad i = 1, \dots, N \quad (C.3)$$

$$\text{Cov}_t^Q(x_i(T), x_j(T)) = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(a_i + a_j)(T-t)}}{a_i + a_j} \quad i, j = 1, \dots, N \quad (C.4)$$

donde $E_t^Q(x_i(T))$ es el elemento i del vector $\mathbf{E}_t^Q(\mathbf{x}_T)$ y $\text{Cov}_t^Q(x_i(T), x_j(T))$ es el elemento (i, j) de la matriz de varianza-covarianza $\text{Cov}_t^Q(\mathbf{x}_T)$. Dado que para el modelo estacionario de precios se cumple $Y_t = \mathbf{1}' \mathbf{x}_t + d$, utilizando las ecuaciones (B.24) y (B.25) se tiene que:

$$E_t^Q(Y_T) = \sum_{i=1}^N e^{-a_i(T-t)} x_i(t) - \sum_{i=1}^N \frac{1 - e^{-a_i(T-t)}}{a_i} \lambda_i + d \quad (C.5)$$

$$\text{Var}_t^Q(Y_T) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(a_i + a_j)(T-t)}}{a_i + a_j} \quad (C.6)$$

Utilizando la ecuación (C.1) se obtiene finalmente el valor de un contrato futuro:

$$F(\mathbf{x}_t, t, T) = \exp \left(\sum_{i=1}^N e^{-a_i(T-t)} x_i(t) - \sum_{i=1}^N \frac{1 - e^{-a_i(T-t)}}{a_i} \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(a_i + a_j)(T-t)}}{a_i + a_j} + d \right) \quad (C.7)$$

C.1.2 Modelo No-Estacionario

Bajo el modelo no-estacionario, el proceso ajustado por riesgo del vector de estados es el mismo que para el modelo estacionario, aunque ahora la matriz de reversion tiene un valor propio igual a cero. Por lo tanto, utilizando las ecuaciones (B.20) y (B.21) se obtiene que:

$$E_t^Q(x_i(T)) = \begin{cases} x_1(t) - \lambda_1(T-t) & i = 1 \\ e^{-a_i(T-t)} x_i(t) - \frac{1 - e^{-a_i(T-t)}}{a_i} \lambda_i & i = 2, \dots, N \end{cases} \quad (C.8)$$

$$\text{Cov}_t^Q(x_i(T), x_j(T)) = \begin{cases} \sigma_1^2(T-t) & i=1, j=1 \\ \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1-e^{-(a_i+a_j)(T-t)}}{a_i+a_j} & i \neq 1, j \neq 1 \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

Dado que para el modelo no-estacionario, se cumple que $Y_t = \mathbf{1}'\mathbf{x}_t + \mu t$, y utilizando las ecuaciones (B.24) y (B.25) se tiene que:

$$E_t^Q(Y_T) = x_1(t) + \sum_{i=2}^N e^{-a_i(T-t)} x_i(t) - \lambda_1(T-t) - \sum_{i=2}^N \frac{1-e^{-a_i(T-t)}}{a_i} \lambda_i + \mu T \quad (\text{C.10})$$

$$\text{Var}_t^Q(Y_T) = \frac{1}{2} \sigma_1^2(T-t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq 1} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1-e^{-(a_i+a_j)t}}{a_i+a_j} \quad (\text{C.11})$$

y por lo tanto el valor de un futuro bajo el no-estacionario es:

$$F(\mathbf{x}_t, t, T) = \exp \left(x_1(t) + \sum_{i=2}^N e^{-a_i(T-t)} x_i(t) + \mu t + (\mu - \lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2)(T-t) - \sum_{i=2}^N \frac{1-e^{-a_i(T-t)}}{a_i} \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq 1} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1-e^{-(a_i+a_j)t}}{a_i+a_j} \right) \quad (\text{C.12})$$

C.2 Estructura de Volatilidad de Contratos Futuros

Como se explicó en el Capítulo 2, por estructura de volatilidad se entenderá la volatilidad instantánea de los retornos de un contrato futuro de una cierta madurez. Luego, si $F(\mathbf{x}_t, t, T)$ es el precio de un futuro con madurez $\tau = T-t$, la volatilidad instantánea $\sigma_F(\tau)$ se obtiene del proceso que siguen los retornos del futuro, o sea:

$$\frac{dF}{F} = \mu_F dt + \sigma_F dW_F \quad (\text{C.13})$$

Sin embargo, aplicando el lema de Ito a $F(\mathbf{x}_t, t, T)$ se obtiene:

$$\frac{dF}{F} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} (dx_i)(dx_j) + \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial t} dt \quad (\text{C.14})$$

y como además de (C.13) se tiene que:

$$\left(\frac{dF}{F}\right)\left(\frac{dF}{F}\right) = \sigma_F^2 dt \quad (\text{C.15})$$

entonces:

$$\sigma_F^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \left(\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x_i}\right) \left(\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x_j}\right) \quad (\text{C.16})$$

Luego, para calcular la volatilidad instantánea de los retornos de un futuro para cada uno de los 3 modelos de precios analizados sólo basta calcular las derivadas parciales del precio del futuro con respecto a las variables de estado del modelo.

En el caso del modelo estacionario se tiene que para $i = 1, \dots, N$:

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x_i} = e^{-a_i \tau} \quad (\text{C.17})$$

Luego la volatilidad instantánea para este modelo es:

$$\sigma_F^2(\tau) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} e^{-(a_i + a_j) \tau} \quad (\text{C.18})$$

Para el modelo no-estacionario, se tiene que:

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ e^{-a_i \tau} & i = 2, \dots, N \end{cases} \quad (\text{C.19})$$

y por lo tanto la volatilidad instantánea del futuro es:

$$\sigma_F^2(\tau) = \sigma_1^2 + \sum_{i,j \neq 1} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} e^{-(a_i + a_j) \tau} \quad (\text{C.20})$$

ANEXO D : FILTRO DE KALMAN

D.1 Estimación Óptima, Proyecciones y Esperanza Condicional

El objetivo de esta sección es mostrar que la esperanza condicional y la estimación óptima de variables no observadas son dos conceptos equivalentes. Para esto, se define primero el problema que se quiere analizar y que se entiende por estimación óptima.

Supongamos que X, Y_1, Y_2, \dots, Y_N es un conjunto de variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad y que sólo se observan Y_1, Y_2, \dots, Y_N . El problema que se debe resolver es como estimar X basado en Y_1, Y_2, \dots, Y_N . El estimador óptimo \hat{X} de X se define como aquella variable aleatoria que minimiza el valor esperado del error cuadrático cometido en la estimación, dada la información que entregan Y_1, Y_2, \dots, Y_N . Formalmente, se define \hat{X} como una variable aleatoria que satisface:

$$\begin{aligned} E(X - \hat{X})^2 &= \inf \{E(X - Z)^2 : Z \in \mathbf{K}\} \\ \mathbf{K} &= \{Z : Z = f(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)\} \end{aligned} \tag{D.1}$$

Para desarrollar posteriormente otros conceptos, es interesante analizar la ecuación (D.1) desde un punto de vista geométrico. Esto implica, en primer lugar, definir una “distancia” bajo la cual podamos trabajar. Definamos entonces formalmente una norma basada en la distancia clásica de la geometría euclídea. Si X es una variable aleatoria, su norma es:

$$\|X\| = (E(X^2))^{1/2} \tag{D.2}$$

Para una variable aleatoria \tilde{X} tal que $E(\tilde{X}) = 0$, vemos que la norma al cuadrado definida anteriormente coincide con la varianza, o sea, $\|\tilde{X}\|^2 = V(\tilde{X})$. Asimismo, se puede definir la distancia entre dos variables aleatorias como:

$$d(X, Y) = \|X - Y\| = \left(E(X - Y)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{D.3})$$

Luego, en la ecuación (D.1), \hat{X} es la variable aleatoria que representa el punto del espacio de funciones $f(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ que está más cerca de X . Este concepto indica que \hat{X} es de hecho la proyección de X en el espacio de funciones $f(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ ⁵⁷. De la geometría euclídea sabemos que las proyecciones pueden definirse fácilmente a partir del producto interno entre dos vectores. Extendiendo este concepto para variables aleatorias, se tiene que el producto interno $\langle X, Y \rangle$ se define:

$$\langle X, Y \rangle = E(XY) \quad (\text{D.4})$$

Es fácil ver que si \tilde{X} e \tilde{Y} son 2 variables aleatorias tal que $E(\tilde{X}) = 0$ y $E(\tilde{Y}) = 0$, entonces el producto interno antes definido coincide con la covarianza de estas 2 variables aleatorias, o sea, $\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle = \text{COV}(\tilde{X}, \tilde{Y})$.

Se puede entonces definir alternativamente a la variable \hat{X} , que como se dijo es la proyección de X en el espacio de funciones $f(X_1, X_2, \dots, X_N)$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \langle X - \hat{X}, Z - \hat{X} \rangle &= 0 \quad \forall Z \in \mathbf{K} \\ \mathbf{K} &= \{Z : Z = f(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)\} \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

La ecuación (D.5) dice simplemente que el vector que va desde \hat{X} a X es ortogonal al espacio \mathbf{K} definido anteriormente. Esta es la forma tradicional que se define una proyección en la geometría euclídea y que representa el punto en \mathbf{K} que está a la mínima distancia de X .

⁵⁷ Técnicamente, se realiza una proyección sobre el σ -álgebra generado a partir de las variables aleatorias Y_1, \dots, Y_N .

Dentro de este contexto se puede demostrar⁵⁸ que la esperanza condicional de X dado Y_1, Y_2, \dots, Y_N coincide efectivamente con \hat{X} :

$$\hat{X} = E(X | Y_1, Y_2, \dots, Y_N) \quad (\text{D.6})$$

La esperanza condicional es entonces la mejor estimación, bajo la norma euclídeana que definimos anteriormente, de una variable aleatoria que no observamos dada la información que nos proporcionan otras variables aleatorias que sí se observan. Otro punto interesante de este resultado es que es válido independiente de la distribución de las variables aleatorias que se consideren, aunque es particularmente útil cuando la distribución de las variables aleatorias es gaussiana. En ese caso, la esperanza condicional de X dado Y_1, Y_2, \dots, Y_N es una función lineal de las variables observadas. Este hecho permite deducir las ecuaciones del filtro de Kalman que se definen en la siguiente sección.

Otra propiedad importante de \hat{X} es que es un estimador insesgado de X , ya que de acuerdo a la regla de la cadena de la esperanza condicional se verifica que $E(\hat{X}) = E(E(X | Y_1, Y_2, \dots, Y_N)) = X$.

D.2 Deducción del Filtro de Kalman

Para deducir el filtro de Kalman, se supondrá que se conoce el estado anterior del vector de estados así como la varianza del error de estimación dados por $\hat{\mathbf{x}}_{t-\Delta t}$ y $\mathbf{P}_{t-\Delta t}$. El vector de estados en el siguiente instante de tiempo está dado por la ecuación de medida:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_t \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{c}_t + \mathbf{w}_t \quad \mathbf{w}_t \square N(0, \mathbf{Q}_t) \quad (\text{D.7})$$

El nuevo vector de estados es una combinación lineal de 2 variables aleatorias normales y un vector de constantes, por lo que también es normal con media $\hat{\mathbf{x}}_t^-$ y varianza \mathbf{P}_t^- dadas por⁵⁹:

⁵⁸ Por ejemplo ver Øksendal (1998).

$$\hat{\mathbf{x}}_t^- = \mathbf{A}_t \hat{\mathbf{x}}_{t-1} + \mathbf{c}_t \quad (\text{D.8})$$

$$\mathbf{P}_t^- = \mathbf{A}_t \mathbf{P}_{t-1} \mathbf{A}_t' + \mathbf{Q}_t \quad (\text{D.9})$$

Para encontrar la distribución de \mathbf{x}_t condicional en la nueva información entregada por \mathbf{z}_t , se describen las ecuaciones de transición y medida de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}}_t^- + (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t^-) \quad (\text{D.10})$$

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{H}_t \hat{\mathbf{x}}_t^- + \mathbf{d}_t + \mathbf{H}_t (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t^-) + \mathbf{v}_t \quad (\text{D.11})$$

El nuevo vector $(\mathbf{x}_t' \ \mathbf{z}_t)'$ distribuye normal con media $(\hat{\mathbf{x}}_t^-' \ (\mathbf{H}_t \hat{\mathbf{x}}_t^- + \mathbf{d}_t)')$ y una matriz de varianza-covarianza dada por:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_t^- & \mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t' \\ \mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^- & \mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t' + \mathbf{R}_t \end{pmatrix} \quad (\text{D.12})$$

Para terminar la demostración, se hace uso del siguiente lema que se demuestra en Harvey (1989), Cap. 3:

Lema E.1

Sean 2 vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} que tienen una distribución de probabilidad conjunta normal multivariada donde $(\mathbf{x}' \ \mathbf{y})'$ tiene media y varianza dadas por:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_x \\ \boldsymbol{\mu}_y \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx} & \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{yx} & \boldsymbol{\Sigma}_{yy} \end{pmatrix} \quad (\text{D.13})$$

entonces la distribución de \mathbf{x} dado \mathbf{y} también es normal con media:

$$\boldsymbol{\mu}_{x|y} = \boldsymbol{\mu}_x + \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y) \quad (\text{D.14})$$

⁵⁹ Condicionales en la información conocida al tiempo $t - \Delta t$.

y varianza:

$$\Sigma_{xx|y} = \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx} \quad (D.15)$$

■

Aplicando el lema E.1, se deduce pues que el valor esperado de \mathbf{x}_t dada la información entregada por \mathbf{z}_t es:

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \hat{\mathbf{x}}_t^- + \mathbf{K}_t (\mathbf{z}_t - \mathbf{z}_t^-) \quad (D.16)$$

donde $\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t' (\mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t' + \mathbf{R}_t)^{-1}$ y $\mathbf{z}_t^- = \mathbf{H}_t \hat{\mathbf{x}}_t^- + \mathbf{d}_t$. La matriz de varianza-covarianza está dada por:

$$\mathbf{P}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t) \mathbf{P}_t^- \quad (D.17)$$

Como se mostró en la sección anterior, la esperanza condicional de \mathbf{x}_t es efectivamente un estimador óptimo en el sentido que minimiza la varianza del error de la estimación, por lo que la ecuación (D.16) entrega el mejor estimador para el vector de estados, dada la información contenida en las variables que se observan.

ANEXO E : DESCRIPCIÓN DE LOS DATOS

E.1 Descripción de Paneles de Datos Petróleo

Tabla E-1: Descripción de los datos del Panel A para el petróleo.

Contrato Futuro	Precio Promedio (Error Estándar)			Madurez Promedio (Error Estándar)			Número de Observaciones
F1	US\$	20.70	(4.92)	0.11	(0.02)	años	2483
F2		20.57	(4.66)	0.19	(0.02)		2485
F3		20.44	(4.44)	0.27	(0.02)		2484
F4		20.32	(4.24)	0.36	(0.02)		2485
F5		20.21	(4.05)	0.44	(0.02)		2485
F6		20.11	(3.88)	0.52	(0.02)		2484
F7		20.01	(3.72)	0.61	(0.02)		2485
F8		19.92	(3.57)	0.69	(0.02)		2482
F9		19.84	(3.43)	0.77	(0.02)		2481
F10		19.77	(3.30)	0.86	(0.02)		2469
F11		19.70	(3.17)	0.94	(0.02)		2473
F12		19.63	(3.06)	1.02	(0.02)		2472
F13		19.58	(2.95)	1.11	(0.02)		2463
F14		19.52	(2.84)	1.19	(0.02)		2460
F15		19.49	(2.75)	1.27	(0.02)		2449
F16		19.44	(2.65)	1.36	(0.02)		2450
F17		19.41	(2.57)	1.44	(0.02)		2444
F18		19.41	(2.53)	1.52	(0.02)		2330
F19		19.50	(2.68)	1.61	(0.02)		1840
F20		19.49	(2.62)	1.69	(0.02)		1803
F21		19.45	(2.55)	1.77	(0.02)		1808
F22		19.41	(2.48)	1.86	(0.02)		1832
F23		19.43	(2.42)	1.94	(0.02)		1785
F24		19.42	(2.36)	2.02	(0.02)		1738
F25		19.48	(2.33)	2.11	(0.02)		1614
F26		19.48	(2.24)	2.19	(0.02)		1600
F27		19.49	(2.19)	2.28	(0.02)		1575
F28		19.48	(2.10)	2.36	(0.02)		1554
F29		19.53	(2.07)	2.44	(0.02)		1048
F30		19.47	(1.98)	2.52	(0.02)		590
F36		19.27	(1.74)	2.81	(0.14)		2343
F48		19.14	(1.76)	3.54	(0.28)		1575
F60		19.33	(1.62)	4.54	(0.28)		1316
F72		19.41	(1.50)	5.56	(0.28)		1150
F84		19.63	(1.33)	6.54	(0.28)		1049
TOTAL							70584

Tabla E-2: Descripción de los datos del Panel B para el petróleo.

Contrato Futuro	Precio Promedio (Error Estándar)		Madurez Promedio (Error Estándar)			Número de Observaciones	
F1	US\$	19.34	(2.38)	0.11	(0.02)	años	1254
F2		19.16	(2.19)	0.19	(0.02)		1254
F3		19.04	(2.06)	0.28	(0.02)		1254
F4		18.94	(1.94)	0.36	(0.02)		1254
F5		18.87	(1.84)	0.44	(0.02)		1254
F6		18.81	(1.75)	0.53	(0.02)		1254
F7		18.76	(1.67)	0.61	(0.02)		1254
F8		18.72	(1.60)	0.69	(0.02)		1254
F9		18.68	(1.53)	0.78	(0.02)		1254
F10		18.65	(1.48)	0.86	(0.02)		1254
F11		18.63	(1.43)	0.94	(0.02)		1254
F12		18.62	(1.39)	1.03	(0.02)		1254
F13		18.60	(1.35)	1.11	(0.02)		1254
F14		18.59	(1.32)	1.19	(0.02)		1254
F15		18.59	(1.29)	1.28	(0.02)		1254
F16		18.60	(1.27)	1.36	(0.02)		1254
F17		18.60	(1.25)	1.44	(0.02)		1254
F18		18.59	(1.25)	1.52	(0.02)		1143
F19		18.36	(1.16)	1.61	(0.02)		652
F20		18.36	(1.16)	1.69	(0.02)		621
F21		18.34	(1.15)	1.78	(0.02)		626
F22		18.38	(1.12)	1.86	(0.02)		649
F23		18.39	(1.12)	1.94	(0.02)		619
F24		18.34	(1.08)	2.02	(0.02)		591
F25		18.24	(1.05)	2.11	(0.02)		475
F26		18.25	(1.04)	2.19	(0.02)		467
F27		18.18	(0.96)	2.28	(0.02)		483
F28		18.25	(0.94)	2.36	(0.02)		488
F29		18.37	(0.97)	2.44	(0.02)		361
F30		18.74	(1.11)	2.52	(0.02)		238
F36		18.96	(1.06)	2.81	(0.14)		1159
F48		18.16	(0.48)	3.49	(0.27)		393
F60		18.67	(0.59)	4.35	(0.16)		141
TOTAL							30424

Tabla E-3: Descripción de los datos del Panel C para el petróleo.

Contrato Futuro	Precio Promedio (Error Estándar)		Madurez Promedio (Error Estándar)		Número de Observaciones	
F1	US\$	22.10	(6.27)	0.11	(0.02) años	1229
F2		22.00	(5.91)	0.19	(0.02)	1231
F3		21.87	(5.61)	0.27	(0.02)	1230
F4		21.73	(5.34)	0.36	(0.02)	1231
F5		21.57	(5.10)	0.44	(0.02)	1231
F6		21.43	(4.87)	0.52	(0.02)	1230
F7		21.28	(4.67)	0.61	(0.02)	1231
F8		21.15	(4.49)	0.69	(0.02)	1228
F9		21.02	(4.31)	0.77	(0.02)	1227
F10		20.92	(4.16)	0.86	(0.02)	1215
F11		20.80	(4.00)	0.94	(0.02)	1219
F12		20.67	(3.86)	1.02	(0.02)	1218
F13		20.60	(3.72)	1.11	(0.02)	1209
F14		20.48	(3.59)	1.19	(0.02)	1206
F15		20.43	(3.47)	1.27	(0.02)	1195
F16		20.32	(3.35)	1.36	(0.02)	1196
F17		20.27	(3.24)	1.44	(0.02)	1190
F18		20.19	(3.14)	1.52	(0.02)	1187
F19		20.13	(3.05)	1.61	(0.02)	1188
F20		20.08	(2.96)	1.69	(0.02)	1182
F21		20.03	(2.88)	1.77	(0.02)	1182
F22		19.97	(2.81)	1.86	(0.02)	1183
F23		19.97	(2.72)	1.94	(0.02)	1166
F24		19.98	(2.64)	2.02	(0.02)	1147
F25		20.00	(2.51)	2.11	(0.02)	1139
F26		19.99	(2.40)	2.19	(0.02)	1133
F27		20.06	(2.33)	2.27	(0.02)	1092
F28		20.05	(2.24)	2.36	(0.02)	1066
F29		20.14	(2.22)	2.44	(0.02)	687
F30		19.96	(2.26)	2.52	(0.02)	352
F36		19.59	(2.17)	2.81	(0.14)	1184
F48		19.47	(1.90)	3.56	(0.29)	1182
F60		19.41	(1.68)	4.56	(0.29)	1175
F72		19.41	(1.50)	5.56	(0.28)	1150
F84		19.63	(1.33)	6.54	(0.28)	1049
TOTAL						40160

E.2 Descripción de Paneles de Datos Cobre

Tabla E-4: Descripción de los datos del Panel A para el cobre.

Contrato Futuro	Precio Promedio (Error Estándar)		Madurez Promedio (Error Estándar)	Número de Observaciones
F1	90.74	(19.78) ctvos.	0.05 (0.02) años	1902
F2	90.21	(19.11)	0.13 (0.02)	1897
F3	90.10	(18.29)	0.21 (0.02)	1910
F4	89.89	(17.86)	0.30 (0.02)	1893
F5	89.81	(17.32)	0.38 (0.02)	1912
F6	89.44	(16.61)	0.46 (0.02)	1886
F7	89.55	(16.37)	0.55 (0.02)	1904
F8	89.20	(15.65)	0.63 (0.02)	1895
F9	89.06	(15.33)	0.71 (0.02)	1885
F10	89.27	(15.03)	0.80 (0.02)	1909
F11	88.70	(14.33)	0.88 (0.02)	1880
F12	88.72	(14.04)	0.96 (0.02)	1895
F13	88.59	(13.55)	1.05 (0.02)	1900
F14	88.32	(13.22)	1.13 (0.02)	1885
F15	88.28	(12.82)	1.21 (0.02)	1901
F16	88.10	(12.57)	1.30 (0.02)	1881
F17	88.19	(12.27)	1.38 (0.02)	1886
F18	88.23	(12.10)	1.46 (0.02)	1843
F19	88.68	(11.92)	1.55 (0.02)	1838
F20	88.69	(11.53)	1.63 (0.02)	1811
F21	88.83	(11.38)	1.71 (0.02)	1782
F22	89.11	(11.29)	1.80 (0.02)	1738
F23	88.66	(10.82)	1.88 (0.02)	1640
F24	85.54	(8.58)	1.96 (0.02)	1128
TOTAL				43947

Tabla E-5: Descripción de los datos del Panel B para el cobre.

Contrato Futuro	Precio Promedio (Error Estándar)			Madurez Promedio (Error Estándar)			Número de Observaciones
F1	107.43	(17.70)	ctvos.	0.04	(0.02)	años	673
F2	106.04	(17.60)		0.13	(0.02)		664
F3	105.09	(16.62)		0.21	(0.02)		674
F4	104.77	(16.36)		0.29	(0.02)		661
F5	104.07	(16.00)		0.38	(0.02)		675
F6	103.33	(15.14)		0.46	(0.02)		658
F7	103.22	(15.02)		0.54	(0.02)		673
F8	102.37	(14.10)		0.63	(0.02)		669
F9	102.17	(13.97)		0.71	(0.02)		655
F10	102.05	(13.28)		0.79	(0.02)		690
F11	101.15	(12.62)		0.88	(0.02)		656
F12	100.76	(12.37)		0.96	(0.02)		673
F13	100.50	(11.46)		1.04	(0.02)		675
F14	99.91	(11.39)		1.13	(0.02)		664
F15	99.50	(10.85)		1.21	(0.02)		674
F16	99.26	(10.60)		1.29	(0.02)		661
F17	98.90	(10.26)		1.38	(0.02)		675
F18	98.83	(10.29)		1.46	(0.02)		658
F19	98.94	(10.24)		1.54	(0.02)		674
F20	98.49	(10.00)		1.63	(0.02)		669
F21	98.51	(10.00)		1.71	(0.02)		652
F22	98.88	(9.65)		1.79	(0.02)		648
F23	98.07	(9.31)		1.88	(0.02)		601
F24	94.73	(7.01)		1.96	(0.02)		246
TOTAL							15518

Tabla E-6: Descripción de los datos del Panel C para el cobre.

Contrato Futuro	Precio Promedio (Error Estándar)			Madurez Promedio (Error Estándar)			Número de Observaciones
F1	81.60	(14.06)	ctvos.	0.05	(0.02)	años	1229
F2	81.68	(13.70)		0.13	(0.02)		1233
F3	81.85	(13.31)		0.22	(0.02)		1230
F4	81.90	(12.80)		0.30	(0.02)		1232
F5	81.96	(12.33)		0.38	(0.02)		1231
F6	81.99	(11.91)		0.47	(0.02)		1228
F7	82.01	(11.54)		0.55	(0.02)		1225
F8	82.02	(11.12)		0.63	(0.02)		1226
F9	82.02	(10.75)		0.72	(0.02)		1224
F10	82.03	(10.46)		0.80	(0.02)		1219
F11	82.03	(10.11)		0.88	(0.02)		1224
F12	82.02	(9.86)		0.97	(0.02)		1216
F13	82.02	(9.54)		1.05	(0.02)		1225
F14	82.02	(9.30)		1.13	(0.02)		1221
F15	82.05	(9.07)		1.22	(0.02)		1221
F16	82.04	(8.87)		1.30	(0.02)		1220
F17	82.15	(8.70)		1.38	(0.02)		1205
F18	82.34	(8.48)		1.47	(0.02)		1185
F19	82.68	(8.18)		1.55	(0.02)		1158
F20	82.96	(7.95)		1.63	(0.02)		1142
F21	83.18	(7.79)		1.72	(0.02)		1124
F22	83.31	(7.59)		1.80	(0.02)		1090
F23	83.22	(7.34)		1.88	(0.02)		1039
F24	82.98	(7.10)		1.96	(0.02)		882
TOTAL							28429

ANEXO F : SIGNIFICANCIA ESTADÍSTICA DE LOS MODELOS

En este anexo se presenta una metodología estadística que permitiría realizar tests sobre la significancia de los modelos de precios analizados en esta tesis. Los resultados que se presentan en este anexo son preliminares en el sentido que se requiere realizar un estudio mucho más exhaustivo del tema para obtener resultados confiables. Por lo tanto, este anexo es una introducción a una posible línea de investigación futura.

F.1 Descripción de los Tests

En la sección 2.6 se mostró que un modelo de precios de $N - 1$ factores está anidado dentro de uno de N factores al restringir a cero el inverso del parámetro de reversión a la media y la volatilidad de la última variable de estado. Si se quisiera testear por ejemplo, que la inclusión del cuarto factor es significativa, habría que comparar los resultados del modelo de 3 factores con los del de 4 factores. También, para un número dado de factores, el modelo no-estacionario se obtiene a partir del modelo estacionario al restringir a cero el valor del parámetro de reversión a la media de la primera variable de estado.

De acuerdo a Harvey (1989), existen 3 tipos particulares de tests que se pueden realizar en este caso: el test de la razón de verosimilitud, el test de Wald y el test de los multiplicadores de Lagrange. Una explicación de la intuición detrás de estos tests se puede encontrar en Kennedy (1985).

El test de la razón de verosimilitud⁶⁰ compara el valor de la función de verosimilitud obtenida al estimar los parámetros para un modelo restringido y el no-restringido. Por ejemplo, si la inclusión del cuarto factor es relevante desde un punto de vista estadístico, uno esperaría que la función de verosimilitud del modelo de 4 factores fuera mucho mejor que la del modelo de 3 factores. Una desventaja que se

⁶⁰ También se le conoce como test LR del inglés “Likelihood Ratio”.

le ve tradicionalmente a este test es que se debe estimar tanto el modelo restringido como el no-restringido.

El test de Wald utiliza la matriz de información de la función de verosimilitud del modelo no-restringido. Básicamente este test compara los errores de estimación con el valor de los parámetros. Si por ejemplo se quiere saber si el parámetro a_1 del modelo estacionario es significativamente distinto de cero, uno esperaría que $0 \notin (a_1 - \sigma_{a_1}, a_1 + \sigma_{a_1})$ donde σ_{a_1} representa el error de estimación. Este test sólo requiere estimar el modelo no-restringido.

Finalmente, el test de los multiplicadores de Lagrange analiza la pendiente de la función de verosimilitud del modelo restringido en el punto óptimo. Este test sólo requiere la estimación del modelo restringido.

Aún cuando los 3 tests tienen propiedades asintóticas similares, si no existe dificultad en estimar los parámetros de un modelo restringido y no-restringido, Kennedy (1985) indica que el test de la razón de verosimilitud es el más atractivo de los 3 tests desde un punto de vista computacional. Además, el test de la razón de verosimilitud es similar a otros criterios populares de selección de modelos como son el AIC (Akaike Information Criterion) y el BIC (Bayesian Information Criterion).

Sean $\tilde{\psi}$ y $\tilde{\psi}_0$ el conjunto de parámetros que maximizan la función de verosimilitud del modelo no-restringido y restringido respectivamente y sea además d el número de parámetros restringidos. El test de la razón de verosimilitud, como su nombre lo indica, se basa en la razón que existe entre la verosimilitud de ambos modelos. El estadígrafo:

$$LR = -2 \log(L(\tilde{\psi}_0) / L(\tilde{\psi})) \quad (\text{F.1})$$

distribuye χ_d^2 bajo la hipótesis nula H_0 del modelo restringido si los parámetros de ambos modelos no se encuentran sobre la frontera del espacio de parámetros. Esta frontera se define como los valores límites que pueden tomar los parámetros de acuerdo a la especificación del modelo. Por ejemplo, la volatilidad no puede ser menor que cero y la frontera del espacio de parámetros para la volatilidad

está dada por el valor cero. Asimismo, los coeficientes de reversión no pueden ser negativos y las correlaciones deben estar comprendidas entre -1 y 1 .

La ecuación (F.1) se puede describir de la siguiente forma:

$$LR = 2(\log(L(\tilde{\psi})) - \log(L(\tilde{\psi}_0))) \quad (\text{F.2})$$

Por lo tanto, para realizar este test sólo basta con comparar los valores del logaritmo de la función de verosimilitud que fue calculado para cada uno de los modelos estudiados.

Para analizar ciertos parámetros que están sobre la frontera del espacio de parámetros, como por ejemplo es el caso de las desviaciones estándar que no pueden ser menores que cero, la distribución del estadígrafo debe ser modificada. Si la diferencia entre el modelo restringido y el no-restringido es de 1 sólo parámetro que está sobre la frontera de los parámetros permitidos, entonces el estadígrafo LR distribuye $1/2(\chi_0^2 + \chi_1^2)$, donde la distribución χ_0^2 es una chi-cuadrado degenerada con toda su masa en el origen. Si por el contrario la restricción afecta a 2 de los parámetros y ambos se encuentran sobre la frontera de posibilidades, entonces el estadígrafo LR distribuye $w \cdot \chi_0^2 + (1/2) \cdot \chi_1^2 + (w-1/2) \cdot \chi_2^2$ donde w es la correlación del error de estimación entre ambos parámetros bajo la hipótesis alternativa H_1 . Esta correlación se puede obtener fácilmente a partir de la matriz de información.

F.2 El Caso del Petróleo

Para ejemplificar el uso de estos tests, se analizó en qué casos el modelo estacionario es estadísticamente significativo con respecto a la hipótesis nula del modelo no-estacionario, para un número dado de parámetros. En este caso, bajo la hipótesis nula se tiene que $a_1 = 0$ y bajo la hipótesis alternativa se considera que $a_1 \geq 0$. Por lo tanto, el parámetro a testear se encuentra, bajo la hipótesis nula, en la frontera del espacio de parámetros y se debe utilizar la modificación mencionada en el párrafo anterior.

La tabla G-1 presenta la función de verosimilitud para el modelo estacionario (hipótesis alternativa) y no-estacionario (hipótesis nula), el valor del

estadígrafo LR y el valor crítico de la distribución $1/2(\chi_0^2 + \chi_1^2)$ al 5% de significancia para los modelos de 1, 2, 3 y 4 factores y cada panel de datos. Se puede ver que en todos los casos se rechaza la hipótesis nula ya que el valor del estadígrafo es muy superior al valor crítico de la distribución asociada a éste.

Tabla F-1: Test estadístico de la razón de verosimilitud entre el modelo estacionario (hipótesis alternativa) y el modelo no-estacionario (hipótesis nula) para 1, 2, 3 y 4 factores y cada uno de los paneles de datos de futuros de petróleo.

		Logaritmo de la función de Verosimilitud del Modelo Estacionario	Logaritmo de la función de Verosimilitud del Modelo No-Estacionario	Valor del Estadígrafo LR	Valor Crítico al 5% de Significancia
Panel A	1F	195721	162645	66152	2.51
	2F	270262	256237	28051	2.51
	3F	324070	323250	1640	2.51
	4F	357366	357087	558	2.51
Panel B	1F	88724	84155	9139	2.51
	2F	131973	125323	13300	2.51
	3F	154686	153226	2919	2.51
	4F	170085	170067	36	2.51
Panel C	1F	108568	85204	46730	2.51
	2F	152557	145438	14238	2.51
	3F	182431	182156	550	2.51
	4F	196902	196754	296	2.51

Sin embargo, hay que notar que el valor del estadígrafo LR disminuye a medida que aumenta el número de factores. Por lo tanto, habría que estimar modelos con más factores para realmente estar seguros que se debe rechazar la hipótesis nula que los precios siguen un proceso no-estacionario. Podría ser que con un número determinado de factores (superior a 4), el valor del estadígrafo fuera tal que no existiría evidencia para rechazar la hipótesis nula.

También es de interés testear si la incorporación de factores adicionales es estadísticamente significativa. Recuérdese que en la sección 2.6 se determinó que un modelo de $N-1$ factores puede ser obtenido al restringir el parámetro de reversión a_N y la volatilidad σ_N , de un modelo de N factores. En este caso, se tiene que existen dos parámetros restringidos bajo la hipótesis nula que están sobre la frontera del espacio de parámetros⁶¹. Por lo tanto, el estadígrafo LR debe ser comparado con la distribución $w \cdot \chi_0^2 + (1/2) \cdot \chi_1^2 + (w-1/2) \cdot \chi_2^2$ donde w representa la correlación del error de estimación entre $\tilde{a}_N = 1/a_N$ y σ_N ⁶².

Las tablas G-2, G-3 y G-4 presentan los tests realizados para determinar si la inclusión de un factor adicional en la modelación del precio spot es significativa. La hipótesis nula en cada caso es que el modelo tiene un factor menos que el modelo asociado a la hipótesis alternativa. En todos los casos, el valor del estadígrafo es muy superior al valor crítico al 5% de significancia, lo que implica que se rechaza la hipótesis nula. Por lo tanto, existiría evidencia estadística para utilizar el modelo de 4

⁶¹ Hay que recordar que de acuerdo a la sección 2.6, la restricción del parámetro de reversión a_N debe ser que éste tienda a infinito para reducir la dimensión del modelo. Sin embargo, como se demostró en dicha sección, basta con realizar el cambio de variable $\tilde{a}_N = 1/a_N$ y la restricción se transforma en que el nuevo parámetro \tilde{a}_N debe tender a cero bajo la hipótesis nula. Este parámetro queda pues sobre la frontera del espacio de parámetros.

⁶² Como las estimaciones se realizaron utilizando el parámetro a_N , se obtuvo la matriz de información considerando este parámetro y no el parámetro $\tilde{a}_N = 1/a_N$. Para no tener que realizar nuevos cálculos, se aproximó la correlación w del error de estimación de \tilde{a}_N y σ_N como el valor negativo de la correlación del error de estimación de a_N y σ_N .

factores para el caso del petróleo cuando se trata de explicar la dinámica de todos los contratos futuros observados.

Sin embargo, además de los tests estadísticos de significancia, es necesario evaluar otras medidas de selección de modelos. Sería conveniente que los resultados de los tests y el ajuste de los modelos a los datos empíricos fueran consistentes entre sí. Si un modelo de 4 factores se ajusta bien a los precios observados, tanto dentro de la muestra como fuera de ella, y además a las volatilidades empíricas de los futuros, se podría considerar adecuado aún cuando se pueda mejorar desde un punto de vista estadístico.

Tabla F-2: Test estadístico de la razón de verosimilitud entre el modelo de 1 factor (hipótesis nula) y el modelo de 2 factores (hipótesis alternativa) para los modelos estacionario (Modelo 1) y no-estacionario (Modelo 2) y cada uno de los paneles de datos de futuros de petróleo.

		Logaritmo de la función de Verosimilitud del Modelo de 1 Factor	Logaritmo de la función de Verosimilitud del Modelo de 2 factores	Correlación entre $\tilde{a}_2 = 1/a_2$ y σ_2	Valor del Estadígrafo LR	Valor Crítico al 5% de Significancia
Panel A	Modelo 1	195721	270262	0.027	149082	5.48
	Modelo 2	162645	256237	-0.033	187182	5.89
Panel B	Modelo 1	88724	131973	0.222	86497	4.16
	Modelo 2	84155	125323	-0.068	82336	6.13
Panel C	Modelo 1	108568	152557	-0.150	87978	6.69
	Modelo 2	85204	145438	-0.152	120469	6.70

Tabla F-3: Test estadístico de la razón de verosimilitud entre el modelo de 2 factores (hipótesis nula) y el modelo de 3 factores (hipótesis alternativa) para los modelos estacionario (Modelo 1) y no-estacionario (Modelo 2) y cada uno de los paneles de datos de futuros de petróleo.

		Logaritmo de la función de Verosimilitud del Modelo de 2 Factores	Logaritmo de la función de Verosimilitud del Modelo de 3 factores	Correlación entre $\tilde{a}_2 = 1/a_2$ y σ_2	Valor del Estadígrafo LR	Valor Crítico al 5% de Significancia
Panel A	Modelo 1	270262	324070	-0.086	107615	6.25
	Modelo 2	256237	323250	-0.054	134026	6.04
Panel B	Modelo 1	131973	154686	-0.044	45425	5.97
	Modelo 2	125323	153226	-0.074	55807	6.17
Panel C	Modelo 1	152557	182431	-0.076	59748	6.19
	Modelo 2	145438	182156	-0.067	73436	6.13

Tabla F-4: Test estadístico de la razón de verosimilitud entre el modelo de 3 factores (hipótesis nula) y el modelo de 4 factores (hipótesis alternativa) para los modelos estacionario (Modelo 1) y no-estacionario (Modelo 2) y cada uno de los paneles de datos de futuros de petróleo.

		Logaritmo de la función de Verosimilitud del Modelo de 3 Factores	Logaritmo de la función de Verosimilitud del Modelo de 4 factores	Correlación entre $\tilde{a}_2 = 1/a_2$ y σ_2	Valor del Estadígrafo LR	Valor Crítico al 5% de Significancia
Panel A	Modelo 1	324070	357366	-0.039	66593	5.93
	Modelo 2	323250	357087	-0.038	67675	5.93
Panel B	Modelo 1	154686	170085	-0.094	30799	6.31
	Modelo 2	153226	170067	-0.131	33682	6.56
Panel C	Modelo 1	182431	196902	0.377	28942	3.10
	Modelo 2	182156	196754	0.128	29195	4.80

F.3 El Caso del Cobre

Al igual que para el petróleo, se realizaron tests de razón de verosimilitud para determinar la significancia estadística entre los modelos estacionario y no-estacionario, así como entre el uso de distintos factores de riesgo utilizando contratos futuros de cobre en la estimación. La teoría sobre la cual se basa el test de la razón de verosimilitud fue desarrollada en la sección F.1.

La tabla G-5 presenta la función de verosimilitud para el modelo estacionario (hipótesis alternativa) y no-estacionario (hipótesis nula), el valor del estadígrafo LR y el valor crítico de la distribución $1/2(\chi_0^2 + \chi_1^2)$ al 5% de significancia para los modelos de 1, 2 y 3 factores y cada panel de datos de cobre. Se puede ver que para el cobre no se rechaza la hipótesis nula en el modelo de 3 factores aplicado al panel C.

También se realizaron tests para verificar si la incorporación de factores adicionales es estadísticamente significativa. Para esto, nuevamente se utilizó la teoría estadística desarrollada en la sección F.1.

Las tablas G-6 y G-7 presentan los tests realizados para determinar si la inclusión de un factor adicional en la modelación del precio spot del cobre es significativa. La hipótesis nula es que el modelo tiene un factor menos que el modelo asociado a la hipótesis alternativa. En todos los casos, el valor del estadígrafo es muy superior al valor crítico al 5% de significancia, por lo que se rechazaría la hipótesis nula.

Nuevamente, es necesario contrastar los resultados estadísticos de los tests con la evidencia empírica de ajuste de los modelos a los datos empíricos para poder tener conclusiones certeras.

Tabla F-5: Test estadístico de la razón de verosimilitud entre el modelo estacionario (hipótesis alternativa) y el modelo no-estacionario (hipótesis nula) para 1 y 2 factores y cada uno de los paneles de datos de futuros de cobre.

		Logaritmo de la función de Verosimilitud del Modelo Estacionario	Logaritmo de la función de Verosimilitud del Modelo No-Estacionario	Valor del Estadígrafo LR	Valor Crítico al 5% de Significancia
Panel A	1F	156757	130932	51651	2.51
	2F	203378	202654	1449	2.51
	3F	222495	222363	263	2.51
Panel B	1F	52436	46210	12452	2.51
	2F	67252	66409	1686	2.51
	3F	73977	73325	1304	2.51
Panel C	1F	106785	89794	33981	2.51
	2F	142173	141265	1817	2.51
	3F	151841	151841	0	2.51

Tabla F-6: Test estadístico de la razón de verosimilitud entre el modelo de 1 factor (hipótesis nula) y el modelo de 2 factores (hipótesis alternativa) para los modelos estacionario (Modelo 1) y no-estacionario (Modelo 2) y cada uno de los paneles de datos de futuros de cobre.

		Logaritmo de la función de Verosimilitud del Modelo de 1 Factor	Logaritmo de la función de Verosimilitud del Modelo de 2 factores	Correlación entre $\tilde{a}_2 = 1/a_2$ y σ_2	Valor del Estadígrafo LR	Valor Crítico al 5% de Significancia
Panel A	Modelo 1	156757	203378	0.076	93242	5.15
	Modelo 2	130932	202654	0.072	143444	5.18
Panel B	Modelo 1	52436	67252	0.380	29632	3.08
	Modelo 2	46210	66409	0.135	40399	4.75
Panel C	Modelo 1	106785	142173	0.091	70777	5.05
	Modelo 2	89794	141265	0.097	102942	5.01

Tabla F-7: Test estadístico de la razón de verosimilitud entre el modelo de 2 factores (hipótesis nula) y el modelo de 3 factores (hipótesis alternativa) para los modelos estacionario y no-estacionario y cada uno de los paneles de datos de futuros de cobre.

		Logaritmo de la función de Verosimilitud del Modelo de 2 Factores	Logaritmo de la función de Verosimilitud del Modelo de 3 factores	Correlación entre $\tilde{a}_2 = 1/a_2$ y σ_2	Valor del Estadígrafo LR	Valor Crítico al 5% de Significancia
Panel A	Modelo 1	203378	222495	0.885	38233	-0.36
	Modelo 2	202654	222363	0.722	39419	0.76
Panel B	Modelo 1	67252	73977	0.985	13450	-1.04
	Modelo 2	66409	73325	0.435	13832	2.71
Panel C	Modelo 1	-	-	-	-	-
	Modelo 2	141265	151841	-0.611	21153	9.83