



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

**MODELOS ESTOCÁSTICOS DE
PRECIOS DE COMMODITIES Y
ESTIMACIÓN CONJUNTA DE LA
DINÁMICA DE DOS COMMODITIES
MEDIANTE EL FILTRO DE KALMAN**

CARLOS IGNACIO MILLA GONZÁLEZ

Tesis para optar al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:
GONZALO CORTAZAR S.

Santiago de Chile, Diciembre, 2005



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

**MODELOS ESTOCÁSTICOS DE
PRECIOS DE COMMODITIES Y
ESTIMACIÓN CONJUNTA DE LA
DINÁMICA DE DOS COMMODITIES
MEDIANTE EL FILTRO DE KALMAN**

CARLOS IGNACIO MILLA GONZÁLEZ

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

GONZALO CORTAZAR S.

JORGE VERA A.

AUGUSTO CASTILLO R.

MARIO DURÁN T.

Para completar las exigencias del grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Diciembre, 2005

A mis padres Gladys y
Carlos, a mi hermano
Francisco y a mis amigos,
que siempre me apoyaron.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer al profesor Gonzalo Cortazar por el tiempo dedicado y el constante apoyo a lo largo de la realización de esta tesis. Sus consejos y orientación me han permitido comprender los fundamentos de un trabajo de investigación y han sido sumamente importantes en mi formación profesional.

También quiero agradecer a mis compañeros y amigos de magíster: Matías y Gonzalo por su valiosa ayuda y por los gratos momentos vividos durante la realización de este trabajo. Un reconocimiento especial para el profesor Jaime Casassus por su gran disposición e importante colaboración en el desarrollo de esta tesis y para todos los integrantes del FinLabUC y RiskAmerica, encabezados por Jorge Urzúa y Miguel Gravet, por su importante ayuda y por el gran apoyo prestado durante la realización de este trabajo.

Se agradece también el apoyo financiero proporcionado por Fondecyt (Proyecto 1040608), y la Fundación Copec-Universidad Católica (Proyecto PC00021).

Finalmente, quiero agradecer a mi familia y a María José, por su gran apoyo y porque siempre han estado conmigo.

INDICE GENERAL

	Pág.
DEDICATORIA	ii
AGRADECIMIENTOS	iii
INDICE DE TABLAS	viii
INDICE DE FIGURAS	xvii
RESUMEN	xxiv
ABSTRACT	xxv
I. INTRODUCCIÓN	1
II. MODELOS DE PRECIOS DE COMMODITIES	4
II.1 Modelos de 1 Factor Estocástico	4
II.2 Modelos de 2 Factores Estocásticos	6
II.3 Modelos de 3 Factores Estocásticos	8
II.4 Modelos de N Factores Estocásticos	12
II.5 Estructura de Volatilidad	13
III. ANÁLISIS EMPÍRICO DEL COMPORTAMIENTO DE MODELOS DE PRECIOS PARA ORO, PETRÓLEO Y COBRE	14
III.1 Descripción de los Datos Utilizados	15
III.2 Resultados del Análisis Empírico para Oro, Petróleo y Cobre	18
III.2.1 Resultados Oro	18
III.2.2 Resultados Petróleo	28

III.2.3 Resultados Cobre.....	38
III.3 Conclusiones Preliminares del Estudio Empírico	47
IV. ESTIMACIÓN CONJUNTA DE DOS COMMODITIES UTILIZANDO EL FILTRO DE KALMAN.....	49
IV.1 Modelo Multifactorial Utilizado.....	53
IV.2 Metodología de Estimación	55
IV.2.1 Estimación Conjunta de Variables de Estado mediante la utilización del Filtro de Kalman	58
IV.3 Estructura de Spreads	62
IV.4 Resultados de estimación conjunta para WTI y Brent	63
IV.4.1 Datos.....	63
IV.4.2 Resultados de la Estimación de Parámetros	67
IV.4.3 Ajuste de los Modelos a los Precios Observados fuera de la muestra utilizando el panel de precios de futuros para el Brent sin datos de largo plazo	70
IV.4.4 Ajuste de los Modelos a los Precios Observados dentro de la muestra utilizando el panel completo de contratos para el Brent	80
IV.4.5 Ajuste de los Modelos a los Precios Observados fuera de la muestra utilizando el panel completo de contratos para el Brent	85
IV.4.6 Ajuste de Estructura de Volatilidad	91
IV.4.7 Curvas de Spreads	93
IV.5 Conclusiones Preliminares	96

V. CONCLUSIONES GENERALES	98
BIBLIOGRAFIA	100
ANEXOS	103
ANEXO A: VALORIZACIÓN DE CONTRATOS FUTUROS PARA EL MODELO DE C&C-D.....	104
ANEXO B: VALORIZACIÓN DE CONTRATOS FUTUROS PARA EL MODELO DE C&S	106
ANEXO C: VALOR ESPERADO DE VARIABLES DE ESTADO	108
ANEXO D: ESTRUCTURAS DE VOLATILIDAD	110
D.1 Estructura de Volatilidad Modelo C&C-D.....	110
D.2 Estructura de Volatilidad Modelo de 2 y 3 Factores C&S	111
ANEXO E: METODOLOGÍA DE CÁLCULO DE PREDICCIÓN DE PRECIO SPOT	113
ANEXO F: ERRORES DE PREDICCIÓN MEDIANTE FUTUROS Y CAMINATA ALEATORIA	115
F.1 Errores de Predicción de Futuros para Oro.....	115
F.2 Errores de Predicción de Caminata Aleatoria para Oro.....	116
F.3 Errores de Predicción de Futuros para Petróleo.....	117
F.4 Errores de Predicción de Caminata Aleatoria para Petróleo.....	118
F.5 Errores de Predicción de Futuros para Cobre	119
F.6 Errores de Predicción de Caminata Aleatoria para Cobre	120

ANEXO G: RESULTADOS DE TESTS ESTADÍSTICOS PARA COMPARAR CAPACIDADES DE MODELOS DE C&C-D Y C&S.....	121
G.1 Test de comparación de medias de errores de ajuste de la estructura de precios futuros.....	121
G.2 Test de comparación de medias de errores de predicción de precios spot.....	122
G.3 Test de comparación de volatilidades	124
ANEXO H: BENEFICIOS DE ESTIMACIÓN CONJUNTA EN EVALUACIÓN DE PROYECTOS.....	129

INDICE DE TABLAS

	Pág.
Tabla III-1: Plazos de contratos de oro pertenecientes a cada uno de los paneles de datos utilizados.	16
Tabla III-2: Plazos de contratos de petróleo pertenecientes a cada uno de los paneles de datos utilizados.	16
Tabla III-3: Plazos de contratos de cobre pertenecientes a cada uno de los paneles de datos utilizados.	17
Tabla III-4: Errores Porcentuales de Ajuste de Contratos Futuros de Oro para plazos dentro de la muestra y fuera de la muestra en el corte transversal.	21
Tabla III-5: Errores Porcentuales de Ajuste de Contratos Futuros de Oro para plazos fuera de la muestra.	21
Tabla III-6: Errores de Predicción de Oro para el periodo entre 01/1990-08/2003. Utilizando parámetros calibrados dentro de la muestra.	22
Tabla III-7: Errores de Predicción de Oro para el periodo entre 09/2003-05/2005. Utilizando parámetros calibrados fuera de la muestra.	22
Tabla III-8: Estructura de Volatilidad Semanal de Oro para el periodo entre 01/1990-08/2003. Utilizando parámetros calibrados dentro de la muestra.	25
Tabla III-9: Estructura de Volatilidad Semanal de Oro para el periodo entre 09/2003-05/2005. Utilizando parámetros calibrados fuera de la muestra.	25

Tabla III-10: Errores Porcentuales de Ajuste de Contratos Futuros de Petróleo para plazos dentro de la muestra y fuera de la muestra en el corte transversal	30
Tabla III-11: Errores Porcentuales de Ajuste de Contratos Futuros de Petróleo para plazos fuera de la muestra.....	30
Tabla III-12: Errores de Predicción de Petróleo para el periodo entre 01/1990-08/2003. Utilizando parámetros calibrados dentro de la muestra.....	31
Tabla III-13: Errores de Predicción de Petróleo para el periodo entre 09/2003-05/2005. Utilizando parámetros calibrados fuera de la muestra.....	32
Tabla III-14: Estructura de Volatilidad Semanal de Petróleo para el periodo entre 01/1990-08/2003. Utilizando parámetros calibrados dentro de la muestra.	34
Tabla III-15: Estructura de Volatilidad Semanal de Petróleo para el periodo entre 09/2003-05/2005. Utilizando parámetros calibrados fuera de la muestra.	35
Tabla III-16: Errores Porcentuales de Ajuste de Contratos Futuros de Cobre para plazos dentro de la muestra.	39
Tabla III-17: Errores Porcentuales de Ajuste de Contratos Futuros de Cobre para plazos fuera de la muestra.	40
Tabla III-18: Errores de Predicción de Cobre para el periodo entre 01/1990-08/2003. Utilizando parámetros calibrados dentro de la muestra.....	41
Tabla III-19: Errores de Predicción de Cobre para el periodo entre 09/2003-05/2005. Utilizando parámetros calibrados fuera de la muestra.....	41

Tabla III-20: Estructura de Volatilidad Semanal de Cobre para el periodo entre 01/1990-08/2003. Utilizando parámetros calibrados dentro de la muestra.....	44
Tabla III-21: Estructura de Volatilidad Semanal de Cobre para el periodo entre 09/2003-05/2005. Utilizando parámetros calibrados fuera de la muestra.....	44
Tabla IV-1: Matriz de Correlaciones de precios spot diarios de distintos commodities para el periodo 2001 - 2005.....	49
Tabla IV-2: Matriz de Correlaciones de retornos diarios de precios spot de distintos commodities para el periodo 2001 - 2005.....	50
Tabla IV-3: Análisis de Componentes Principales de la estructura de futuros diaria para WTI y Brent. Utilizando los datos de manera individual y conjunta para el periodo 10/2001-12/2004.....	51
Tabla IV-4: Número de factores estimados y utilizados para WTI y Brent para cada uno de los modelos estimados conjuntamente. El Modelo 1 es de 3 factores y el Modelo 2 es de 4 factores.....	60
Tabla IV-5: Rango de plazos de Petróleo WTI utilizados para los paneles dentro y fuera de la muestra en el corte transversal y en la serie de tiempo.....	66
Tabla IV-6: Rango de plazos de Petróleo Brent utilizados para los paneles dentro y fuera de la muestra en el corte transversal y en la serie de tiempo.....	66
Tabla IV-7: Número Máximo de Contratos para un día, utilizados en las estimaciones dentro y fuera de muestra para WTI y Brent.....	67
Tabla IV-8: Parámetros estimados para el modelo conjunto de 3 factores para WTI y 4 factores de Brent y para el modelo conjunto de 2 factores	

para el WTI y 3 factores para el Brent. El periodo de estimación va desde Octubre 2001 a Diciembre 2004. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.	68
Tabla IV-9: Parámetros estimados individualmente para modelos de 3 y 4 factores para el Brent y 3 y 2 factores para el WTI. El periodo de estimación va desde Octubre 2001 a Diciembre 2004. . La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.	69
Tabla IV-10: Errores porcentuales de ajuste de Brent para vencimientos inferiores a 3.5 años. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra y no considerando los precios de los contratos de Brent con vencimiento superior a los 3.5 años en la estimación de las variables de estado.....	75
Tabla IV-11: Errores porcentuales de ajuste de Brent para vencimientos superiores a 3.5 años. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra y no considerando los precios de los contratos de Brent con vencimiento superior a los 3.5 años en la estimación de las variables de estado.	76
Tabla IV-12: Errores porcentuales totales de ajuste de los modelos de WTI. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra y no considerando los precios de los contratos de Brent con vencimiento superior a los 3.5 años en la estimación de las variables de estado.	76
Tabla IV-13: Errores porcentuales totales de ajuste de los modelos de Brent. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra y no considerando los precios de los contratos de Brent con vencimiento superior a los 3.5 años en la estimación de las variables de estado.	76

Tabla IV-14: Errores porcentuales del ajuste de los modelos de 2 y 3 factores para WTI estimados conjunta e individualmente utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.....	83
Tabla IV-15: Errores porcentuales del ajuste de los modelos de 3 y 4 factores para Brent estimados conjunta e individualmente utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.....	84
Tabla IV-16: Errores porcentuales del ajuste de los modelos de WTI estimados conjunta e individualmente utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.....	88
Tabla IV-17: Errores porcentuales del ajuste de los modelos de Brent estimados conjunta e individualmente utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.....	88
Tabla IV-18: Spreads medio y desviación estándar empíricos y de los modelos estimados de forma conjunta e individual, considerando spreads desde 0 hasta 3 años.....	94
Tabla IV-19: Spreads medio y desviación estándar para los modelos estimados de forma conjunta e individual, considerando spreads desde 4 hasta 10 años.....	94
Tabla IV-20: Spreads medio y desviación estándar para los modelos estimados de forma conjunta e individual, considerando spreads desde 0 hasta 10 años.....	95
Tabla F-1: Errores porcentuales de predicción realizada a través del valor de los contratos futuros de Oro entregados por los modelos. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.....	115

Tabla F-2: Errores porcentuales de predicción realizada a través del valor de los contratos futuros de Oro entregados por los modelos. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.....	115
Tabla F-3: Errores porcentuales de predicción realizada a través del valor esperado de una caminata aleatoria para Oro. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.....	116
Tabla F-4: Errores porcentuales de predicción realizada a través del valor esperado de una caminata aleatoria para Oro. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.....	116
Tabla F-5: Errores porcentuales de predicción realizada a través del valor de los contratos futuros de Petróleo entregados por los modelos. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.	117
Tabla F-6: Errores porcentuales de predicción realizada a través del valor de los contratos futuros de Petróleo entregados por los modelos. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.	117
Tabla F-7: Errores porcentuales de predicción realizada a través del valor esperado de una caminata aleatoria para Petróleo. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.....	118
Tabla F-8: Errores porcentuales de predicción realizada a través del valor esperado de una caminata aleatoria para Petróleo. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.....	118
Tabla F-9: Errores porcentuales de predicción realizada a través del valor de los contratos futuros de Cobre entregados por los modelos. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.	119

Tabla F-10: Errores porcentuales de predicción realizada a través del valor de los contratos futuros de Cobre entregados por los modelos. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.	119
Tabla F-11: Errores porcentuales de predicción realizada a través del valor esperado de una caminata aleatoria para Cobre. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.....	120
Tabla F-12: Errores porcentuales de predicción realizada a través del valor esperado de una caminata aleatoria para Cobre. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.....	120
Tabla G-1: Test de igualdad de medias de errores cuadráticos (MSE) de modelo de C&C-D y C&S. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.	121
Tabla G-2: Test de igualdad de medias de errores cuadráticos (MSE) de modelo de C&C-D y C&S. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.	122
Tabla G-3: Test de igualdad de medias de errores cuadráticos (MSE) de predicción de precios spot de Oro. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.	122
Tabla G-4: Test de igualdad de medias de errores cuadráticos (MSE) de predicción de precios spot de Petróleo. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.....	123
Tabla G-5: Test de igualdad de medias de errores cuadráticos (MSE) de predicción de precios spot de Cobre. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.	123

Tabla G-6: Test de igualdad de medias de errores cuadráticos (MSE) de predicción de precios spot de Oro. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.	123
Tabla G-7: Test de igualdad de medias de errores cuadráticos (MSE) de predicción de precios spot de Petróleo. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.....	124
Tabla G-8: Test de igualdad de medias de errores cuadráticos (MSE) de predicción de precios spot de Cobre. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.	124
Tabla G-9: Test de comparación de volatilidades empíricas para cada plazo promedio con volatilidades de los modelos para Oro. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.....	125
Tabla G-10: Test de comparación de volatilidades empíricas para cada plazo promedio con volatilidades de los modelos para Oro. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.....	125
Tabla G-11: Test de comparación de volatilidades empíricas para cada plazo promedio con volatilidades de los modelos para Petróleo. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.	125
Tabla G-12: Test de comparación de volatilidades empíricas para cada plazo promedio con volatilidades de los modelos para Petróleo. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.	126
Tabla G-13: Test de comparación de volatilidades empíricas para cada plazo promedio con volatilidades de los modelos para Cobre. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.	126

Tabla G-14: Test de comparación de volatilidades empíricas para cada plazo promedio con volatilidades de los modelos para Cobre. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.	126
Tabla G-15: Test de comparación de volatilidades calculadas de forma analítica y a través de las curvas de ambos modelos para Oro. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.	127
Tabla G-16: Test de comparación de volatilidades calculadas de forma analítica y a través de las curvas de ambos modelos para Oro. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.	127
Tabla G-17: Test de comparación de volatilidades calculadas de forma analítica y a través de las curvas de ambos modelos para Petróleo. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.	127
Tabla G-18: Test de comparación de volatilidades calculadas de forma analítica y a través de las curvas de ambos modelos para Petróleo. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.	128
Tabla G-19: Test de comparación de volatilidades calculadas de forma analítica y a través de las curvas de ambos modelos para Cobre. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.	128
Tabla G-20: Test de comparación de volatilidades calculadas de forma analítica y a través de las curvas de ambos modelos para Cobre. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.	128

INDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 3-1: Precios Observados y curvas teóricas de contratos futuros de Oro para el día 25-08-2003 utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.	20
Figura 3-2: RMSE de ajuste de predicción de modelos para Oro y comparación con predicción a través de contratos futuros (RMSE Futuro) y caminata aleatoria (RMSE Caminata Aleatoria) para datos dentro de la muestra.	23
Figura 3-3: RMSE de ajuste de predicción de modelos para Oro y comparación con predicción a través de contratos futuros (RMSE Futuro) y caminata aleatoria (RMSE Caminata Aleatoria) para datos fuera de la muestra.	23
Figura 3-4: Estructura de Volatilidad Analítica Semanal de Oro para el periodo entre 01/1990-08/2003. Utilizando parámetros calibrados dentro de la muestra.	26
Figura 3-5: Estructura de Volatilidad de las Curvas Semanal de Oro para el periodo entre 01/1990-08/2003. Utilizando parámetros calibrados dentro de la muestra.	26
Figura 3-6: Estructura de Volatilidad Analítica Semanal de Oro para el periodo 09/2003- 05/2005. Utilizando parámetros calibrados fuera de la muestra.	27
Figura 3-7: Estructura de Volatilidad de las Curvas Semanal de Oro para el periodo 09/2003- 05/2005. Utilizando parámetros calibrados fuera de la muestra.	27

Figura 3-8: Precios Observados y curvas teóricas de contratos futuros de Petróleo para el día 25-08-2003 utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.....	29
Figura 3-9: RMSE de ajuste de predicción de modelos para petróleo y comparación con predicción a través de contratos futuros (RMSE Futuro) y caminata aleatoria (RMSE Caminata Aleatoria) para datos dentro de la muestra.....	32
Figura 3-10: RMSE de ajuste de predicción de modelos para petróleo y comparación con predicción a través de contratos futuros (RMSE Futuro) y caminata aleatoria (RMSE Caminata Aleatoria) para datos fuera de la muestra.....	33
Figura 3-11: Estructura de Volatilidad Analítica Semanal de Petróleo para el periodo entre 01/1990-08/2003. Utilizando parámetros calibrados dentro de la muestra.....	35
Figura 3-12: Estructura de Volatilidad de las Curvas Semanal de Petróleo para el periodo entre 01/1990-08/2003. Utilizando parámetros calibrados dentro de la muestra.....	36
Figura 3-13: Estructura de Volatilidad Analítica Semanal de Petróleo para el periodo 09/2003- 05/2005. Utilizando parámetros calibrados fuera de la muestra.....	36
Figura 3-14: Estructura de Volatilidad de las Curvas Semanal de Petróleo para el periodo 09/2003- 05/2005. Utilizando parámetros calibrados fuera de la muestra.....	37

Figura 3-15: Precios Observados y curvas teóricas de contratos futuros de Cobre para el día 25-08-2003 utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.....	39
Figura 3-16: RMSE de ajuste de predicción de modelos para cobre y comparación con predicción a través de contratos futuros (RMSE Futuro) y caminata aleatoria (RMSE Caminata Aleatoria) para datos dentro de la muestra.....	42
Figura 3-17: RMSE de ajuste de predicción de modelos para cobre y comparación con predicción a través de contratos futuros (RMSE Futuro) y caminata aleatoria (RMSE Caminata Aleatoria) para datos fuera de la muestra.....	42
Figura 3-18: Estructura de Volatilidad Analítica Semanal de Cobre para el periodo entre 01/1990-08/2003. Utilizando parámetros calibrados dentro de la muestra.....	45
Figura 3-19: Estructura de Volatilidad de las Curvas Semanal de Cobre para el periodo entre 01/1990-08/2003. Utilizando parámetros calibrados dentro de la muestra.....	45
Figura 3-20: Estructura de Volatilidad Analítica Semanal de Cobre para el periodo 09/2003- 05/2005. Utilizando parámetros calibrados fuera de la muestra.....	46
Figura 3-21: Estructura de Volatilidad de las Curvas Semanal de Cobre para el periodo 09/2003- 05/2005. Utilizando parámetros calibrados fuera de la muestra.....	46
Figura 4-1: Precios observados y curvas teóricas de futuros de 3 factores de WTI. Estimadas conjunta e individualmente para el día 01-03-2005	

utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra y no considerando los precios de los contratos de Brent con vencimiento superior a los 3.5 años en la estimación de las variables de estado. 72

Figura 4-2: Precios observados y curvas teóricas de futuros de 4 factores de Brent. Estimadas conjunta e individualmente para el día 01-03-2005 utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra y no considerando los precios de los contratos de Brent con vencimiento superior a los 3.5 años en la estimación de las variables de estado. 73

Figura 4-3: Precios observados y curvas teóricas de futuros de 2 factores de WTI. Estimadas conjunta e individualmente para el día 01-03-2005 utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra y no considerando los precios de los contratos de Brent con vencimiento superior a los 3.5 años en la estimación de las variables de estado. 74

Figura 4-4: Precios observados y curvas teóricas de futuros de 3 factores de Brent. Estimadas conjunta e individualmente para el día 01-03-2005 utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra y no considerando los precios de los contratos de Brent con vencimiento superior a los 3.5 años en la estimación de las variables de estado. 75

Figura 4-5: Errores de ajuste de contratos futuros de Brent para plazos inferiores a 3.5 años. Para modelos de 4 factores estimados conjunta e individualmente utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra y no considerando los precios de los contratos de Brent con vencimiento inferior a los 3.5 años en la estimación de las variables de estado..... 77

Figura 4-6: Errores de ajuste de contratos futuros de Brent para plazos superiores a 3.5 años. Para modelos de 4 factores estimados conjunta e

individualmente utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra y no considerando los precios de los contratos de Brent con vencimiento inferior a los 3.5 años en la estimación de las variables de estado.....	78
Figura 4-7: Errores de totales ajuste de contratos futuros de Brent para todos los plazos. Para modelos de 4 factores estimados conjunta e individualmente utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra y no considerando los precios de los contratos de Brent con vencimiento inferior a los 3.5 años en la estimación de las variables de estado.....	79
Figura 4-8: Precios observados y curvas teóricas de futuros de 3 factores de WTI. Estimadas conjunta e individualmente para el día 15-12-2004 utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.	81
Figura 4-9: Precios observados y curvas teóricas de futuros de 4 factores de Brent. Estimadas conjunta e individualmente para el día 15-12-2004 utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.	82
Figura 4-10: Precios observados y curvas teóricas de futuros de 2 factores de WTI. Estimadas conjunta e individualmente para el día 15-12-2004 utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.	82
Figura 4-11: Precios observados y curvas teóricas de futuros de 3 factores de Brent. Estimadas conjunta e individualmente para el día 15-12-2004 utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.	83
Figura 4-12: Errores de totales ajuste de contratos futuros de WTI para todos los plazos. Para modelos de 3 factores estimados conjunta e individualmente utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.	84

Figura 4-13: Errores de totales ajuste de contratos futuros de Brent para todos los plazos. Para modelos de 4 factores estimados conjunta e individualmente utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.	85
Figura 4-14: Precios observados y curvas teóricas de futuros de 3 factores de WTI. Estimadas conjunta e individualmente para el día 01-03-2005 utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.	86
Figura 4-15: Precios observados y curvas teóricas de futuros de 2 factores de WTI. Estimadas conjunta e individualmente para el día 01-03-2005 utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.	87
Figura 4-16: Precios observados y curvas teóricas de futuros de 4 factores de Brent. Estimadas conjunta e individualmente para el día 01-03-2005 utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.	87
Figura 4-17: Precios observados y curvas teóricas de futuros de 3 factores de Brent. Estimadas conjunta e individualmente para el día 01-03-2005 utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.	88
Figura 4-18: Errores de totales ajuste de contratos futuros de WTI para todos los plazos. Para modelos de 3 factores estimados conjunta e individualmente utilizando los parámetros calibrados con fuera de la muestra.	89
Figura 4-19: Errores de totales ajuste de contratos futuros de Brent para todos los plazos. Para modelos de 4 factores estimados conjunta e individualmente utilizando los parámetros calibrados con fuera de la muestra.	90

Figura 4-20: Estructuras de Volatilidades del modelo de 4 factores conjunto para petróleo Brent para datos calibrados dentro de la muestra.....	92
Figura 4-21: Estructuras de Volatilidades del modelo de 3 factores conjunto para petróleo WTI para datos calibrados dentro de la muestra.	92
Figura 4-22: Curva de Spreads para el día 31-03-2005 utilizando el modelo de 3 factores para el WTI y 4 factores para el Brent calibrados conjunta e independientemente con datos fuera de la muestra.	94

RESUMEN

Esta tesis está compuesta por dos investigaciones que estudian la modelación y estimación de la estructura de precios de diferentes commodities. En la primera parte, se exploran distintas especificaciones encontradas en la literatura para describir la dinámica de precios de commodities. Se comparan dos modelos, uno con premio por riesgo variable (Casassus y Collin-Dufresne (2005)) y otro con premio por riesgo constante (Cortazar y Schwartz (2003)). El análisis de los modelos fue realizado en tres aspectos: ajuste de curvas de futuros con respecto a los contratos existentes, capacidad de predicción del precio spot, y por último, estructura de volatilidad de ambos modelos.

En relación al desempeño de ambos modelos se encontró que el modelo de Cortazar y Schwartz presenta mejores ajustes en la estructura de futuros y estructura de volatilidad, mientras que el modelo de Casassus y Collin-Dufresne presenta un mejor desempeño en predicción de precios spot. Además se encontró que ambos modelos no entregan un buen ajuste al extrapolar precios para contratos con vencimiento mayor al utilizado en la estimación del modelo.

La segunda investigación corresponde a la estimación, por medio del Filtro de Kalman, de un modelo multifactorial que permita obtener de forma simultánea la dinámica de precios de dos commodities. Se escogió al mercado del petróleo, considerando dos crudos que son transados en lugares geográficos distintos, pero que presentan una alta correlación en sus precios y retornos. Estos crudos son el WTI y el Brent.

Se muestra que la estimación conjunta entrega un modelo más parsimonioso, logrando ajustar la dinámica de dos commodities con un menor número de factores y de variables de estado. También se muestra la superioridad de la estimación conjunta respecto de la estimación individual en la extrapolación de precios. Finalmente, se encuentra que la estimación conjunta consigue un ajuste similar a la estimación individual en lo que respecta a la estructura de futuros y volatilidad.

ABSTRACT

In this thesis we develop two investigations about modelling and estimation of the term structure of prices for different commodities. In the first part, we explore different model's specifications present in commodities price dynamics literature. We compare two models, one with time varying risk premium (Casassus y Collin-Dufresne (2005)) and another with constant risk premium (Cortazar y Schwartz (2003)). The study of the models was based in three aspects: futures term structure, spot price prediction capabilities, and volatility term structure of both models.

The performance of the model proposed by Cortazar and Schwartz is better in futures term structure and volatility term structure, while the model proposed by Casassus and Collin-Dufresne is better in spot price prediction. In addition, we find that both models could not get a good extrapolation of prices for contracts with maturity greater than used in the estimation of the models.

In the second part of this thesis, we estimate a N-factor model for two commodities, using the Kalman filter methodology. We choose the oil market, considering two types of crude oil traded in different locations, with a high correlation in their prices and returns. These are WTI and Brent crude oil.

We show that the joint estimation give us a more parsimonious model, adjusting the dynamics of two commodities with less parameters and state variables. Also we illustrate the superiority in prices extrapolation of the joint estimation compared with a single one. Finally, the joint estimation provides the same results than a single estimation in futures and volatility term structure.

I. INTRODUCCIÓN

En la literatura se ha utilizado una gran cantidad de modelos para describir el comportamiento de los precios de los commodities. Entre los primeros modelos desarrollados se encuentra el de Brennan y Schwartz (1985), quienes desarrollaron un modelo de un factor para el cobre, en el cual el precio spot del commodity es estocástico. A través del tiempo la investigación en commodities demuestra que el uso de dinámicas más complejas y con un mayor número de factores estocásticos permite mejores ajustes del comportamiento de nivel y volatilidad de los precios de contratos futuros¹. En este sentido, Gibson y Schwartz (1990) propusieron un modelo de dos factores para el petróleo que presentaba tanto al precio spot como al retorno por conveniencia estocásticos. Otro modelo de dos factores es el desarrollado por Schwartz y Smith (2000) quienes plantean un modelo donde los factores estocásticos corresponden a las desviaciones de corto y largo plazo de los precios. Schwartz (1997) propone modelos de 1, 2 y 3 factores estocásticos, en el último caso utiliza datos de contratos futuros y de tasas de interés para la estimación del modelo. Cortazar y Schwartz (2003) implementan un modelo de 3 factores que cuenta con la ventaja de ser más parsimonioso y simple de estimar que el de Schwartz (1997).

Recientemente, un tipo distinto y más general de modelos ha surgido en la literatura de commodities. Estos modelos están basados en el trabajo de Dai y Singleton (2000) quienes desarrollan una familia de modelos *affine*, basado en factores “canónicos” y que son no observables, para ajustar la estructura de tasas de interés. En esta categoría se encuentra el modelo estacionario de 3 factores desarrollado por Casassus y Collin-Dufresne (2005), el cual además postula un premio por riesgo variable dependiente del nivel del precio. En este último trabajo, se muestra también la equivalencia y generalización entregada por el modelo de 3 factores propuesto en comparación con el modelo de tres factores propuesto por Schwartz (1997). Otro ejemplo de modelos que

¹ La cantidad de factores necesarios al momento de plantear un modelo adecuado en analizado en Cortazar y Schwartz (1994).

utilizan factores canónicos es el propuesto por Cortazar y Naranjo (2006), quienes estiman modelos no estacionarios de 1, 2, 3 y 4 factores para describir comportamiento estocástico de los precios del petróleo².

La primera parte de esta tesis tiene por objetivo la realización de un estudio acerca de los tipos de modelos utilizados para describir el comportamiento estocástico de commodities y el aporte de considerar un premio por riesgo variable en la descripción de la dinámica de precios. Para esto, se realiza la comparación entre un modelo perteneciente a la familia de modelos impulsada por Schwartz, como es el modelo con premio por riesgo constante propuesto por Cortazar y Schwartz (2003), y un modelo perteneciente a la familia de Dai y Singleton (2000), como es el modelo con premio por riesgo variable propuesto por Casassus y Collin-Dufresne (2005).

Los modelos escogidos difieren tanto en los factores utilizados como en el número de parámetros que es necesario estimar. En el caso de Casassus y Collin-Dufresne (2005), la incorporación del premio por riesgo variable hace que el número de parámetros a estimar sea de 22. En el caso del modelo de Cortazar y Schwartz (2003), el número de parámetros estimados es considerablemente menor, 7 y 12, para los modelos de 2 y 3 factores respectivamente.

La segunda parte de esta tesis tiene por objetivo la de presentar una metodología de estimación que permite la calibración conjunta de las dinámicas de precios de dos commodities por medio del Filtro de Kalman. Además, se compara la estimación conjunta con la estimación individual, en aspectos tales como extrapolación de precios, ajuste de estructura de precios de contratos futuros, ajuste de estructura de volatilidad y estabilidad de estructura de spreads.

En relación a la extrapolación de precios, si bien los modelos mencionados proporcionan una estructura de precios que permite su extrapolación más allá de los límites de los contratos efectivamente transados en el mercado, dada la importancia de este tema para

² Otros autores que plantean modelos con factores canónicos y que además incorporan estacionalidad son Manoliu y Tompaidis (2001) y Sorensen (2002).

la gestión del riesgo, es necesario testear esta capacidad de extrapolación. Por ejemplo, en Rahgozar y Najafi (2003) se realiza un análisis empírico que demuestra que las razones de cobertura óptima varían dependiendo del modelo y de la madurez de los contratos futuros utilizados. Se confirma también que los contratos futuros de plazos largos son más efectivos en la reducción del “revenue risk” que los contratos de plazos cortos. En relación a la capacidad de extrapolación de precios de los modelos existentes, Schwartz (1997) muestra que se logra un buen ajuste de la estructura de precios de los contratos futuros de plazos cortos y un pobre ajuste en la predicción de los contratos futuros de más largo plazo.

El resto de esta tesis se organiza de la siguiente manera. Los modelos de precios de commodities son presentados en el Capítulo 2. En el Capítulo 3 se describe el análisis empírico llevado a cabo con el fin de comparar dos modelos pertenecientes a familias distintas. En el Capítulo 4 se presenta el modelo, la metodología de estimación conjunta utilizada y los resultados de la calibración conjunta para dos crudos de petróleo pertenecientes a mercados distintos, comparando modelos estimados de forma conjunta con los modelos estimados de forma individual. Finalmente las conclusiones se presentan en el Capítulo 5.

II. MODELOS DE PRECIOS DE COMMODITIES

Los modelos utilizados para describir el comportamiento estocástico de los precios de commodities pueden ser clasificados en: Modelos estacionarios y Modelos no estacionarios. Los modelos estacionarios se caracterizan porque las perturbaciones sufridas son transitorias y no tienen un efecto permanente en la dinámica de los precios. Esto hace, que el valor esperado del vector de estados en el largo plazo se aproxime a un valor constante no siendo afectado por las perturbaciones registradas en un tiempo t cualquiera. En el caso de los modelos no estacionarios, su dinámica de precios si puede ir incorporando las perturbaciones, de tal manera que los valores de largo plazo son modificados de forma permanente.

En relación a la formulación de ambos tipos de modelos, encontramos que los modelos estacionarios presentan una representación más general que los no estacionarios, ya que es posible transformar un modelo estacionario en uno no estacionario por medio de la imposición de restricciones en algunos parámetros. Sin embargo, la mayor parte de los modelos encontrados en la literatura de commodities corresponden a modelos no estacionarios.

Independiente de si la naturaleza del modelo es estacionaria o no, éste puede clasificarse de acuerdo al número de factores estocásticos utilizados para describir la dinámica de precios. A continuación se presenta una revisión bibliográfica con algunos de los modelos más importantes de precios de commodities presentes en la literatura y luego una expresión general para el cálculo de la estructura de volatilidad.

II.1 Modelos de 1 Factor Estocástico

a) Modelo de Brennan y Schwartz (1985)

Uno de los primeros modelos utilizados para estudiar la dinámica de los precios de commodities corresponde al de Brennan y Schwartz (1985), quienes suponen que el

precio spot de un commodity sigue un proceso browniano geométrico. El modelo propuesto por estos autores es el siguiente:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dz_t \quad (2.1)$$

Donde S_t corresponde al precio spot, μ es la tasa de rentabilidad esperada neta y σ la volatilidad instantánea del retorno.

Al ajustar por riesgo, el proceso queda de la siguiente forma:

$$dS_t = (r - \delta) S_t dt + \sigma S_t dz_t \quad (2.2)$$

Donde r es la tasa de interés libre de riesgo y δ el retorno por conveniencia, los cuales se asumen constantes.

En este caso, por ser un movimiento browniano geométrico, el modelo es no estacionario.

b) Modelo de Schwartz (1997)

Este modelo corresponde al Modelo 1 presentado por este autor, quien plantea un proceso con reversión a la media del tipo Ornstein-Uhlenbeck para el logaritmo del precio spot:

$$\ln S_t = x_t \quad (2.3)$$

$$dx_t = \kappa(\alpha - x_t) dt + \sigma_t dz_t \quad (2.4)$$

Donde α corresponde al valor esperado de largo plazo, κ es la velocidad de reversión y σ la volatilidad instantánea.

El proceso ajustado por riesgo en este caso es:

$$dx_t = (\kappa(\alpha - x_t) - \lambda) dt + \sigma_t dz_t \quad (2.5)$$

Este modelo forma parte de la familia de modelos de tipo estacionario y tiene un precio de mercado del riesgo constante.

II.2 Modelos de 2 Factores Estocásticos

a) Modelo de Gibson y Schwartz (1990)

El modelo propuesto por estos autores corresponde a un modelo no estacionario, el cual supone que el precio spot de un commodity sigue un proceso browniano geométrico, y que el retorno por conveniencia del commodity siga un proceso con reversión a la media.

$$dS_t = (\mu - \delta_t) S_t dt + \sigma_1 S_t dz_1(t) \quad (2.6)$$

$$d\delta_t = \kappa(\alpha - \delta_t) dt + \sigma_2 dz_2(t) \quad (2.7)$$

$$\text{Con } (dz_1)(dz_2) = \rho dt \quad (2.8)$$

Donde S_t es el precio spot del commodity y δ_t el retorno por conveniencia.

Ajustando por riesgo, los procesos quedan:

$$dS_t = (\mu - \delta_t - \lambda_1) S_t dt + \sigma_1 S_t dz_1^*(t) \quad (2.9)$$

$$d\delta_t = \kappa(\alpha - \delta_t - \lambda_2) dt + \sigma_2 dz_2^*(t) \quad (2.10)$$

$$\text{Con } (dz_1^*)(dz_2^*) = \rho dt \quad (2.11)$$

En este caso, nuevamente tenemos que los precios de mercado del riesgo de los factores son constantes.

b) Modelo de Schwartz y Smith (2000)

Estos autores proponen un modelo no estacionario de dos factores estocásticos, donde uno representa el nivel de equilibrio de los precios spot y el otro las perturbaciones de corto plazo. El modelo propuesto es el siguiente:

$$\ln S_t = \xi(t) + \chi(t) \quad (2.12)$$

$$d\xi_t = \mu_\xi dt + \sigma_\xi dz_\xi(t) \quad (2.13)$$

$$d\chi_t = -\kappa\chi_t dt + \sigma_\chi dz_\chi(t) \quad (2.14)$$

$$\text{Con } (dz_\xi)(dz_\chi) = \rho_{\xi\chi} dt \quad (2.15)$$

El factor $\xi(t)$ representa el nivel de equilibrio del precio spot y el factor $\chi(t)$ representa las perturbaciones de corto plazo. Las variaciones del primer factor mencionado, se espera que persistan en el tiempo, las del segundo factor no. El parámetro μ_ξ es la tasa esperada de largo plazo a la cual crece el nivel de equilibrio del precio spot.

El modelo ajustado por riesgo, que en este caso también presenta precios de mercado del riesgo constantes, es el siguiente:

$$d\xi_t = (\mu_\xi - \lambda_\xi) dt + \sigma_\xi dz_\xi^*(t) \quad (2.16)$$

$$d\chi_t = (-\kappa\chi_t - \lambda_\chi) dt + \sigma_\chi dz_\chi^*(t) \quad (2.17)$$

$$\text{Con } (dz_\xi^*)(dz_\chi^*) = \rho_{\xi\chi} dt \quad (2.18)$$

c) Modelo de Cortazar y Schwartz (2003)

El modelo no estacionario de 2 factores desarrollado por estos autores es el siguiente:

$$dS_t = (v - y_t)S_t dt + \sigma_1 S_t dz_1 \quad (2.19)$$

$$dy_t = -ky_t dt + \sigma_2 dz_2 \quad (2.20)$$

$$\text{Con } (dz_1)(dz_2) = \rho_{12}dt \quad (2.21)$$

Donde S_t es el precio del commodity e y_t representa un retorno por conveniencia modificado (se le ha restado la fracción de largo plazo).

Definiendo λ_i (constante) como el premio por riesgo para cada uno de los factores, podemos escribir el proceso en la medida ajustada por riesgo de la siguiente forma:

$$dS_t = (\nu - y_t - \lambda_1)S_t dt + \sigma_1 S_t dz_1^* \quad (2.22)$$

$$dy_t = (-ky_t - \lambda_2)dt + \sigma_2 dz_2^* \quad (2.23)$$

$$dz_1^* dz_2^* = \rho_{12}dt \quad (2.24)$$

II.3 Modelos de 3 Factores Estocásticos

a) Modelo de Schwartz (1997)

Este modelo no estacionario, extiende el modelo de Gibson y Schwartz (1990) agregando un factor estocástico más. El modelo propuesto es el siguiente:

$$dS_t = (\mu_t - \delta_t)S_t dt + \sigma_1 S_t dz_1(t) \quad (2.25)$$

$$d\delta_t = \kappa(\alpha - \delta_t)dt + \sigma_2 dz_2(t) \quad (2.26)$$

$$d\mu_t = a(m - \mu_t)dt + \sigma_3 dz_3(t) \quad (2.27)$$

Con

$$dz_1 dz_2 = \rho_1 dt \quad (2.28)$$

$$dz_2 dz_3 = \rho_2 dt \quad (2.29)$$

$$dz_1 dz_3 = \rho_3 dt \quad (2.30)$$

Donde S_t corresponde al precio spot, δ_t al retorno por conveniencia y μ_t a la media de largo plazo. Los parámetros κ y a representan las velocidades de reversión de los respectivos factores.

El modelo ajustado por riesgo permite premios por riesgo constante y queda de la siguiente manera:

$$dS_t = (r_t - \delta_t) S_t dt + \sigma_1 S_t dz_1^*(t) \quad (2.31)$$

$$d\delta_t = \kappa (\hat{\alpha} - \delta_t) dt + \sigma_2 dz_2^*(t) \quad (2.32)$$

$$dr_t = a (m^* - r_t) dt + \sigma_3 dz_3^*(t) \quad (2.33)$$

Donde

$$dz_1^* dz_2^* = \rho_1 dt \quad (2.34)$$

$$dz_2^* dz_3^* = \rho_2 dt \quad (2.35)$$

$$dz_1^* dz_3^* = \rho_3 dt \quad (2.36)$$

$$\hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda_2}{\kappa} \quad (2.37)$$

$$m^* = m - \frac{\lambda_3}{a} \quad (2.38)$$

En este caso, se tiene que una de las variables de estado tiene un significado económico específico, esta variable de estado corresponde a la tasa de interés r_t . Bajo esta perspectiva, la estimación de la tasa de interés puede realizarse con instrumentos financieros que no dependen del precio del commodity como pueden ser bonos del tesoro norteamericano.

b) Modelo de Cortazar y Schwartz (2003)

El modelo no estacionario de 3 factores desarrollado por estos autores es el siguiente:

$$dS_t = (v_t - y_t) S_t dt + \sigma_1 S_t dz_1 \quad (2.39)$$

$$dy_t = -\kappa y_t dt + \sigma_2 dz_2 \quad (2.40)$$

$$dv_t = a(\bar{v} - v_t) dt + \sigma_3 dz_3 \quad (2.41)$$

Con

$$dz_1 dz_2 = \rho_{12} dt \quad (2.42)$$

$$dz_1 dz_3 = \rho_{13} dt \quad (2.43)$$

$$dz_2 dz_3 = \rho_{23} dt \quad (2.44)$$

Definiendo λ_i como el premio por riesgo para cada uno de los tres factores de riesgo, podemos escribir el proceso ajustado por riesgo como:

$$dS_t = (v_t - y_t - \lambda_1) S_t dt + \sigma_1 S_t dz_1^* \quad (2.45)$$

$$dy_t = (-\kappa y_t - \lambda_2) dt + \sigma_2 dz_2^* \quad (2.46)$$

$$dv_t = (a(\bar{v} - v_t) - \lambda_3) dt + \sigma_3 dz_3^* \quad (2.47)$$

$$dz_1^* dz_2^* = \rho_{12} dt \quad (2.48)$$

$$dz_1^* dz_3^* = \rho_{13} dt \quad (2.49)$$

$$dz_2^* dz_3^* = \rho_{23} dt \quad (2.50)$$

c) Modelo de Casassus y Collin-Dufresne (2005)

El modelo desarrollado por estos autores corresponde a un modelo estacionario que utiliza 3 factores “canónicos” y la mayor cantidad de parámetros que hacen que sea económicamente identificable. El modelo presentado por estos autores está basado en los trabajos de Duffie y Kan (1996), Dai y Singleton (2000) y Duffie, Pan y Singleton (2000).

La especificación del modelo ajustado por riesgo es la siguiente³:

$$dY = -\kappa^* Y dt + dZ^* \quad (2.51)$$

Donde

$$\kappa^* = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & 0 \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$$dZ^* = \begin{bmatrix} dz_1^* \\ dz_2^* \\ dz_3^* \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Con dZ^* movimientos brownianos independientes.

Por otro lado, la especificación del proceso bajo la medida histórica es la siguiente:

$$dZ^Q = dZ + (\beta_{0Y} + \beta_{1Y} Y) dt \quad (2.55)$$

$$dY = (\beta_{0Y} - (\kappa^Q - \beta_{1Y}) Y) dt + dZ \quad (2.56)$$

Con β_{0Y} vector de 3x1 y β_{1Y} matriz de 3x3.

³ La notación fue modificada respecto al documento original

Con el término $-\beta_{1Y} * Y$, Casassus y Collin-Dufresne representan el premio por riesgo, el cual depende del nivel del vector de estados de ese momento, luego a diferencia de los modelos anteriores, presentan un premio por riesgo variable.

II.4 Modelos de N Factores Estocásticos

a) Modelo de Cortazar y Naranjo (2006)

Estos autores presentan una serie de modelos no estacionarios de N factores (1, 2, 3 y 4) basados en la representación canónica introducida por Dai y Singleton (2000).

En este modelo, el proceso para el precio spot del commodity puede ser descrito como:

$$\log S_t = \mathbf{1}' \mathbf{x}_t + \mu t \quad (2.57)$$

$$d\mathbf{x}_t = -\mathbf{K}\mathbf{x}_t dt + \Sigma d\mathbf{w}_t \quad (2.58)$$

Donde \mathbf{x}_t es un vector de N variables de estado, μ la tasa de crecimiento de largo plazo constante, K la matriz de reversión y Σ una matriz diagonal con las desviaciones estándar instantáneas.

El proceso ajustado por riesgo del modelo planteado es el siguiente:

$$d\mathbf{x}_t = (-\mathbf{K}\mathbf{x}_t - \boldsymbol{\lambda})dt + \Sigma d\mathbf{w}_t \quad (2.59)$$

Donde $\boldsymbol{\lambda}$ representa a un vector que contiene los premios por riesgo, los que son constantes.

II.5 Estructura de Volatilidad

En esta sección se presenta el desarrollo de una expresión general para determinar de forma analítica la estructura de volatilidad.

Definiendo el proceso para un contrato futuro como:

$$\frac{dF}{F} = \mu_F dt + \sigma_F dw_F \quad (2.60)$$

Aplicando el Lema de Ito a $F(\mathbf{x}, T)$ y desarrollando, se obtiene la siguiente expresión para la estructura de volatilidad:

$$dF = \sum_{i=1}^N F_{x_i} dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N F_{xx} (dx)^2 + F_T dT \quad (2.61)$$

$$\frac{dF}{F} = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^N F_{x_i} dx_i + \frac{1}{2} \frac{1}{F} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j - \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial T} dt \quad (2.62)$$

$$\left(\frac{dF}{F} \right) \left(\frac{dF}{F} \right) = \sigma_F^2 dt \quad (2.63)$$

$$\left(\frac{dF}{F} \right) \left(\frac{dF}{F} \right) = \frac{1}{F^2} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i \right)^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \left(\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \left(\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) dt \quad (2.64)$$

$$\sigma_F^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \left(\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \left(\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \quad (2.65)$$

III. ANÁLISIS EMPÍRICO DEL COMPORTAMIENTO DE MODELOS DE PRECIOS PARA ORO, PETRÓLEO Y COBRE

Los modelos presentados en la sección anterior pueden ser clasificados en dos grandes familias: la familia de modelos que siguen la línea del trabajo desarrollado por Schwartz (1997)⁴ y la familia de modelos impulsada por el trabajo de Dai y Singleton (2000)⁵.

En relación con estas dos familias, se escogieron dos modelos (uno representativo de cada familia) con el objetivo de analizar su comportamiento en la representación de la dinámica de precios de tres commodities: Oro, Petróleo y Cobre. Los modelos escogidos corresponden al modelo de Casassus y Collin-Dufresne (2005)⁶ y el modelo de Cortazar y Schwartz (2003)⁷. Aparte de pertenecer a familias distintas, estos modelos se diferencian en que el primer modelo seleccionado presenta un premio por riesgo variable y el segundo modelo seleccionado un premio por riesgo constante.

La elección de estos dos modelos permite comparar el ajuste de los precios de los contratos futuros y además comprobar el aporte de incorporar un premio por riesgo variable en el cálculo de los valores esperados.

La comparación se realiza en tres aspectos: ajuste de estructura de futuros, capacidad de predicción del precio spot y ajuste de estructura de volatilidad. Los commodities considerados fueron el cobre, petróleo y oro. En el caso de la comparación para el cobre y petróleo se utiliza el modelo de 3 factores de C&S y el modelo de 3 factores de C&C-D. En el caso de la comparación para el oro, se utiliza el modelo de 2 factores de C&S y el modelo de 3 factores de C&C-D.

El panel de datos utilizado en la calibración de ambos modelos fue el ocupado por C&C-D, el cual no contiene los contratos transados para todos los vencimientos existentes. Por

⁴ La cual incluye modelos anteriores como los de Brennan y Schwartz (1985) y Gibson y Schwartz (1990) y modelos posteriores como el de Cortazar y Schwartz (2003).

⁵ Que incluye modelos como el de Schwartz y Smith (2000), Casassus y Collin-Dufresne (2005) y Cortazar y Naranjo (2006).

⁶ En adelante será representado por la sigla C&C-D.

⁷ En adelante será representado por la sigla C&S.

esto se generó un panel adicional con algunos de los contratos con vencimientos mayores a los considerados en la estimación de parámetros y se calcularon los errores correspondientes. A continuación se muestra en mayor detalle los paneles de datos utilizados.

III.1 Descripción de los Datos Utilizados

Los commodities utilizados son el cobre, petróleo y oro. Los dos primeros son commodities utilizados en procesos productivos y el tercero como reserva de valor.

Los datos considerados corresponden a los precios de los contratos futuros de oro, cobre y petróleo transados en NYMEX entre 01/1990-04/2005. El panel de datos fue dividido en cuatro, con la intención de hacer un análisis tanto dentro (In-Sample) como fuera de la muestra (Out-of-Sample) en las dimensiones transversal y temporal.

Los datos del análisis dentro de la muestra en ambas dimensiones (transversal y temporal), son los utilizados en la estimación de parámetros, y corresponden a los mismos paneles de datos de contratos futuros utilizados por C&C-D⁸, los cuales comprenden el periodo 01/1990-08/2003 y fueron tomados con una frecuencia semanal. Para el análisis fuera de muestra en la dimensión temporal⁹, se toman datos entre 09/2003-04/2005 también con frecuencia semanal.

Dado que el panel de datos utilizado por C&C-D considera contratos para vencimientos menores a los transados para algunos de los commodities estudiados (sólo para el cobre se consideran los contratos con los vencimientos máximos existentes), se pudo comprobar el ajuste de los modelos a datos fuera de la muestra en el corte transversal. Para esto, se incorporaron contratos con vencimientos mayores a los utilizados en la estimación de los parámetros y variables de estado. Este análisis es importante ya que valida la capacidad de extrapolación de precios que posee este tipo de modelos. A

⁸ Se agradece a Jaime Casassus por proporcionar la base de datos utilizada en su trabajo.

⁹ En adelante los términos dentro y fuera de la muestra estarán referidos a la dimensión temporal. En caso de tratarse de la dimensión transversal se dirá explícitamente.

continuación se muestra una tabla resumen para cada commodity, con los paneles de datos utilizados.

Tabla III-1: Plazos de contratos de oro pertenecientes a cada uno de los paneles de datos utilizados.

Oro		Corte Transversal	
		In Sample	Out of Sample
Serie de Tiempo	In Sample 01/1990 - 08/2003	1 mes - 4 años	4 - 5 años
	Out of Sample 09/2003 - 04/2005	1 mes - 4 años	4 - 5 años

Tabla III-2: Plazos de contratos de petróleo pertenecientes a cada uno de los paneles de datos utilizados.

Petróleo		Corte Transversal	
		In Sample	Out of Sample
Serie de Tiempo	In Sample 01/1990 - 08/2003	1 mes - 3 años	4 - 7 años
	Out of Sample 09/2003 - 04/2005	1 mes - 3 años	4 - 7 años

Tabla III-3: Plazos de contratos de cobre pertenecientes a cada uno de los paneles de datos utilizados.

Cobre		Corte Transversal	
		In Sample	Out of Sample
Serie de Tiempo	In Sample 01/1990 - 08/2003	1 mes - 2 años	-
	Out of Sample 09/2003 - 04/2005	1 mes - 2 años	-

III.2 Resultados del Análisis Empírico para Oro, Petróleo y Cobre

En esta sección se presentan los resultados obtenidos en la comparación de los modelos anteriormente descritos.

El análisis se lleva a cabo considerando tres aspectos: ajuste de la estructura de futuros¹⁰, capacidad de predicción del precio spot y ajuste de estructura de volatilidad. En el caso del ajuste de la estructura de futuros, lo que se hace es ver si el futuro entregado por el modelo a un cierto plazo, se ajusta al contrato transado para ese plazo. En el caso de la medición de la capacidad de predicción, el análisis consiste en comparar los precios spot predichos por los modelos con los precios spot de mercado¹¹. La metodología utilizada para realizar la comparación consiste en primer lugar en calcular el valor esperado de las variables de estado¹² a un cierto plazo en la medida histórica o real (utilizando los premios por riesgo). Luego, con los valores esperados de las variables de estado se calcula el precio del contrato futuro más cercano (spot teórico) y se compara éste último con el contrato transado (spot observado)¹³.

Las expresiones para la estructura de volatilidad de cada modelo, fueron calculadas a partir de la expresión encontrada en la sección 2.5 y se encuentran en el anexo D.

III.2.1 Resultados Oro

En este caso, fueron comparados el modelo estacionario de 3 factores de C&C-D y el modelo no estacionario de 2 factores de C&S. La comparación fue llevada a cabo en tres aspectos: ajuste de contratos futuros, capacidad de predicción de precios spot y estructura de volatilidad.

¹⁰ Las expresiones para el cálculo de un contrato futuro del modelo de C&C-D se encuentra en el anexo A. En el caso del modelo de C&S se encuentra en el anexo B.

¹¹ Se entiende por precio spot al precio del futuro más cercano al vencimiento.

¹² La expresión utilizada en cálculo del valor esperado de las variables de estado se encuentra en el anexo C.

¹³ En Anexo E se muestra la metodología utilizada con mayor detalle.

La estimación de los parámetros para este commodity, fue realizada considerando el panel de precios que va desde 01/1990-08/2003 y cuenta con precios cuyos vencimientos van desde 1 mes hasta 4 años. En este caso los contratos transados presentan vencimientos superiores a los utilizados en la calibración del modelo, por lo cual se incorporaron datos fuera de muestra para el corte transversal, tanto en el periodo In-Sample como Out-of-Sample¹⁴.

a) Ajuste de Contratos Futuros

En esta sección se presenta el ajuste de la estructura de precios de contratos futuros. La figura 3-1 muestra el ajuste de los modelos para el día 25 de Agosto de 2003. Los puntos corresponden a los contratos utilizados en la calibración de los modelos. El triángulo corresponde a un contrato no utilizado en la calibración de los modelos, es decir, fuera de la muestra en el corte transversal.

La tabla III-4 presenta los errores por plazo para cada modelo. Esta tabla está dividida en dos partes, en la primera parte se muestran los errores de ajuste para los contratos dentro de la muestra en el corte transversal. La columna Sub-Total entrega los errores totales para los contratos mencionados. En la segunda parte de la tabla (en gris), se muestra el error de ajuste para un contrato dentro de la muestra pero para un plazo superior al utilizado en la calibración (fuera de muestra en el corte transversal). La columna Total, entrega los errores totales para todos los contratos. La tabla III-5 presenta los errores de ajuste de los modelos para los contratos fuera de la muestra. En este caso, nuevamente se presenta el error de un contrato fuera de la muestra en el corte transversal y los correspondientes errores totales para contratos dentro de la muestra en el corte transversal y para todos los contratos.

¹⁴ Ver tabla III-1

Se aprecia que el modelo de C&S presenta la mitad del error de ajuste que tiene el modelo de C&C-D tanto dentro como fuera de la muestra. Para el caso del análisis dentro de la muestra el RMSE total del modelo de C&S es de un 0.39% contra un 0.9% del modelo de C&C-D. En el caso del panel fuera de la muestra el RMSE total del modelo de C&S es de 0.20% contra un 0.36% del modelo de C&C-D. Un resultado importante se refiere al hecho de que para los contratos de corto plazo el modelo de C&C-D presenta un menor error de ajuste que el modelo de C&S, sin embargo, a medida que se van considerando contratos de mayor vencimiento esta situación se invierte, dando como resultado un error de ajuste total menor para el modelo de C&S. Otro resultado importante, se refiere a que ambos modelos duplican sus errores en contratos con vencimientos de mayor plazo a los utilizados en la calibración.

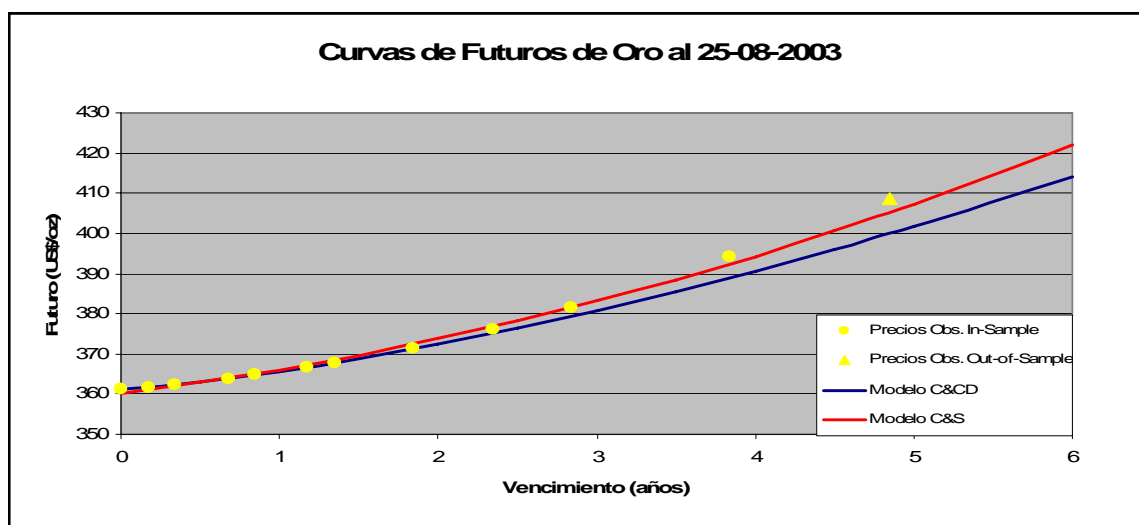


Figura 3-1: Precios Observados y curvas teóricas de contratos futuros de Oro para el día 25-08-2003 utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

Tabla III-4: Errores Porcentuales de Ajuste de Contratos Futuros de Oro para plazos dentro de la muestra y fuera de la muestra en el corte transversal.

Errores In-Sample	Plazos Promedio												SUB-TOTAL	4,73	TOTAL
	0,04	0,20	0,46	0,71	0,95	1,21	1,45	1,90	2,43	2,92	3,90				
RMSE C&C-D	0,15%	0,08%	0,10%	0,10%	0,07%	0,04%	0,10%	0,29%	0,60%	0,93%	1,71%	0,61%	2,43%	0,90%	
RMSE C&S	0,39%	0,25%	0,12%	0,11%	0,18%	0,24%	0,27%	0,29%	0,21%	0,11%	0,51%	0,27%	1,05%	0,39%	
MAE C&C-D	0,12%	0,06%	0,08%	0,08%	0,05%	0,03%	0,08%	0,24%	0,49%	0,77%	1,46%	0,30%	2,09%	0,44%	
MAE C&S	0,32%	0,21%	0,10%	0,09%	0,14%	0,19%	0,22%	0,25%	0,18%	0,08%	0,44%	0,20%	0,92%	0,26%	
ME C&C-D	0,03%	-0,04%	0,00%	0,01%	0,00%	0,00%	0,01%	0,04%	0,07%	0,09%	0,01%	0,02%	-0,06%	0,01%	
ME C&S	0,06%	-0,02%	0,00%	-0,01%	-0,03%	-0,03%	-0,03%	0,01%	0,04%	0,06%	-0,04%	0,00%	-0,17%	-0,01%	

Tabla III-5: Errores Porcentuales de Ajuste de Contratos Futuros de Oro para plazos fuera de la muestra.

Errores Out-of-Sample	Plazos Promedio												SUB-TOTAL	4,68	TOTAL
	0,04	0,23	0,37	0,70	0,87	1,20	1,37	1,95	2,34	2,83	3,84				
RMSE C&C-D	0,51%	0,24%	0,14%	0,12%	0,19%	0,29%	0,31%	0,26%	0,17%	0,05%	0,45%	0,28%	0,85%	0,36%	
RMSE C&S	0,23%	0,11%	0,08%	0,08%	0,11%	0,14%	0,15%	0,15%	0,12%	0,08%	0,25%	0,15%	0,51%	0,20%	
MAE C&C-D	0,45%	0,21%	0,11%	0,10%	0,16%	0,25%	0,27%	0,22%	0,14%	0,04%	0,38%	0,21%	0,69%	0,25%	
MAE C&S	0,17%	0,09%	0,07%	0,07%	0,08%	0,11%	0,12%	0,12%	0,10%	0,07%	0,21%	0,11%	0,42%	0,14%	
ME C&C-D	0,44%	0,20%	0,11%	-0,08%	-0,16%	-0,25%	-0,27%	-0,22%	-0,13%	0,03%	0,38%	0,00%	0,67%	0,06%	
ME C&S	0,16%	0,03%	0,01%	0,00%	-0,07%	-0,09%	-0,09%	-0,02%	0,02%	0,07%	0,03%	0,00%	-0,14%	-0,01%	

b) Ajuste de Valor Esperado

En esta sección se presentan los resultados respecto a la capacidad de predicción de los modelos. Las tablas III-6 y III-7 muestran los errores de predicción de precios spot encontrados para ambos modelos para plazos dentro y fuera de la muestra respectivamente. En ambas tablas se aprecia que el modelo de C&C-D logra errores menores, teniendo un RMSE total de 5.33% contra un 5.89% del modelo de C&S para los datos dentro de la muestra, y un RMSE total de 5.3% contra un 5.75% para los datos fuera de la muestra.

Las predicciones del precio spot realizadas por medio del valor esperado de los modelos en la medida real o histórica (considerando premios por riesgo), fueron comparadas con las predicciones realizadas a través de los futuros (valor esperado ajustado por riesgo) entregados por los mismos modelos y con el valor esperado de un proceso de caminata

aleatoria (valor constante)¹⁵. Las figuras 3-2 y 3-3 muestran los RMSE de predicción de cada uno de los procedimientos mencionados para los datos dentro y fuera de la muestra respectivamente.

Tabla III-6: Errores de Predicción de Oro para el periodo entre 01/1990-08/2003.
Utilizando parámetros calibrados dentro de la muestra.

Errores In-Sample	Plazos (Meses)						TOTAL
	1	2	3	4	5	6	
RMSE C&C-D	3,42%	4,76%	5,22%	5,62%	6,03%	6,37%	5,33%
RMSE C&S	3,53%	5,03%	5,64%	6,20%	6,81%	7,30%	5,89%
MAE C&C-D	2,52%	3,51%	4,00%	4,41%	4,76%	5,05%	4,04%
MAE C&S	2,61%	3,72%	4,29%	4,75%	5,26%	5,72%	4,39%
ME C&C-D	-0,01%	-0,07%	-0,05%	0,02%	0,11%	0,18%	0,03%
ME C&S	0,02%	-0,03%	0,01%	0,10%	0,21%	0,32%	0,10%

Tabla III-7: Errores de Predicción de Oro para el periodo entre 09/2003-05/2005.
Utilizando parámetros calibrados fuera de la muestra.

Errores Out-of-Sample	Plazos (Meses)						TOTAL
	1	2	3	4	5	6	
RMSE C&C-D	3,78%	4,90%	5,16%	5,56%	5,99%	6,09%	5,30%
RMSE C&S	3,82%	5,13%	5,55%	6,04%	6,60%	6,87%	5,75%
MAE C&C-D	3,16%	4,03%	4,17%	4,51%	4,87%	4,79%	4,25%
MAE C&S	3,23%	4,19%	4,47%	4,86%	5,21%	5,44%	4,56%
ME C&C-D	0,86%	1,56%	1,84%	2,07%	2,71%	3,31%	2,05%
ME C&S	0,81%	1,76%	2,24%	2,66%	3,52%	4,34%	2,55%

¹⁵ En Anexo F se muestran las tablas con el detalle de los errores por plazo para cada commodity.

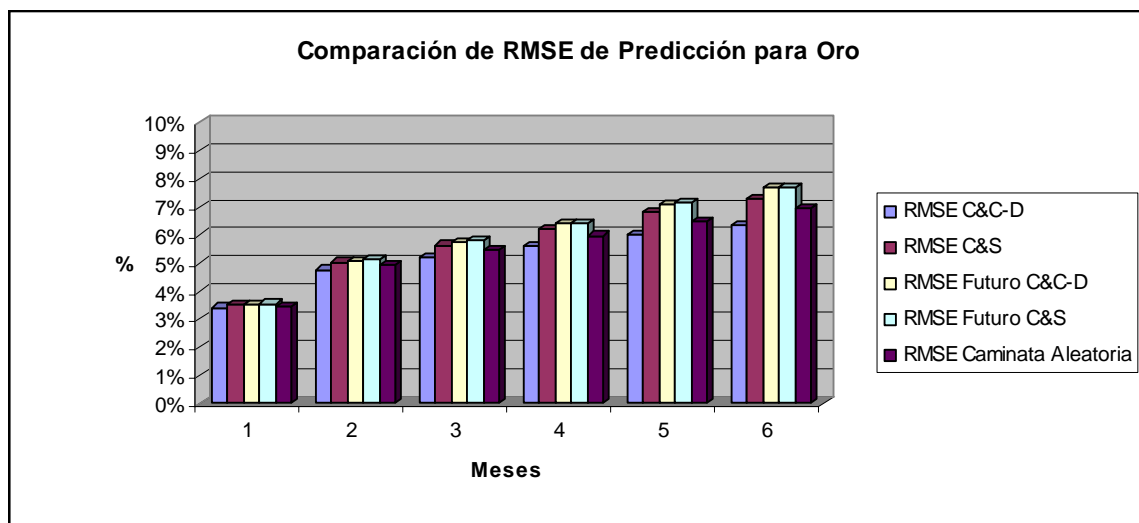


Figura 3-2: RMSE de ajuste de predicción de modelos para Oro y comparación con predicción a través de contratos futuros (RMSE Futuro) y caminata aleatoria (RMSE Caminata Aleatoria) para datos dentro de la muestra.

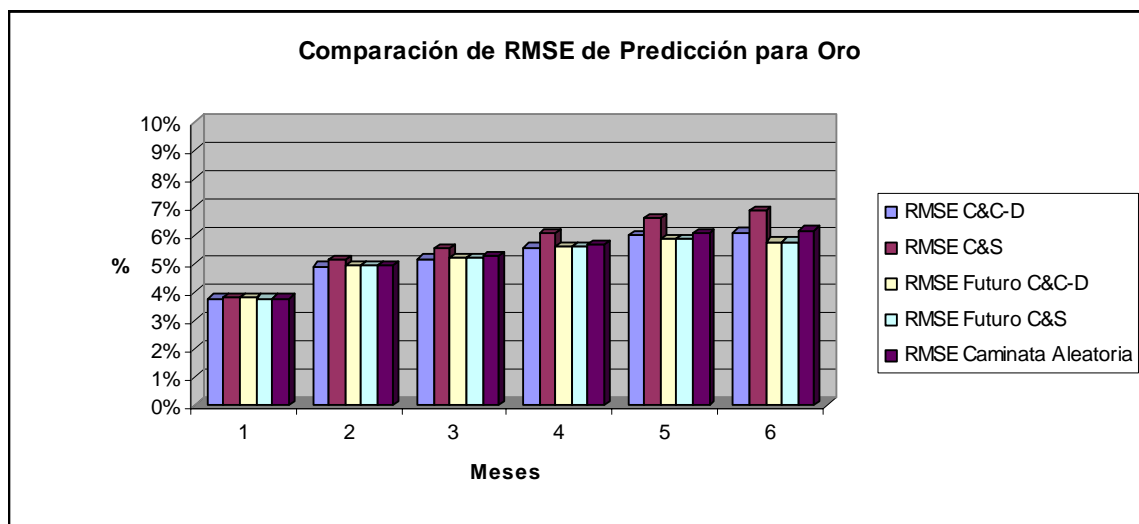


Figura 3-3: RMSE de ajuste de predicción de modelos para Oro y comparación con predicción a través de contratos futuros (RMSE Futuro) y caminata aleatoria (RMSE Caminata Aleatoria) para datos fuera de la muestra.

c) Estructura de Volatilidad

En esta sección se presentan las estructuras de volatilidades obtenidas para el oro por medio de dos procedimientos. El primer procedimiento calcula la estructura de volatilidad para ambos modelos utilizando las expresiones analíticas del anexo D. El segundo procedimiento corresponde al cálculo de la estructura de volatilidad a partir de un panel completo de precios obtenido a través de las curvas. La diferencia entre ambos está en que en el primer caso sólo se utilizan los parámetros en el cálculo de la estructura, en cambio en el segundo, se utilizan tanto los parámetros como las variables de estado.

En la tabla III-8 y las figuras 3-4 y 3-5 se presentan los resultados para la estructura de volatilidad calculada de manera analítica y por medio de las curvas para el periodo utilizado en la calibración de los parámetros. Dada la pequeña diferencia existente entre ambas formas de calcular la estructura de volatilidad, se puede concluir que ambos procedimientos presentan resultados equivalentes en cuanto al ajuste de las volatilidades dentro de la muestra.

En el análisis de la estructura de volatilidad para el panel de datos fuera de la muestra, el cual se muestra en la tabla III-9 y en las figuras 3-6 y 3-7, se aprecia que para ambos modelos, la volatilidad extraída de las curvas entrega un menor error de ajuste a la volatilidad empírica que la calculada de manera analítica. En el caso del modelo de C&S se obtiene un RMSE de 0.189% contra un 0.273% y para el modelo de C&C-D los errores son de 0.187% contra 0.257%.

Al comparar ambos modelos se aprecia que los errores de ajuste de la estructura de volatilidad del oro dentro de la muestra son similares. Fuera de la muestra el modelo de C&C-D presenta un menor error de ajuste.

Tabla III-8: Estructura de Volatilidad Semanal de Oro para el periodo entre 01/1990-08/2003. Utilizando parámetros calibrados dentro de la muestra.

Plazos Promedio Semanales	Volatilidades semanales	EV analítica		EV curvas	
		EV C&C-D	EV C&S	EV C&C-D	EV C&S
0,04	1,82%	1,83%	1,84%	1,84%	1,84%
0,20	1,82%	1,82%	1,83%	1,83%	1,83%
0,46	1,81%	1,81%	1,82%	1,82%	1,82%
0,71	1,81%	1,80%	1,80%	1,81%	1,81%
0,95	1,80%	1,79%	1,79%	1,80%	1,80%
1,21	1,79%	1,79%	1,78%	1,79%	1,79%
1,45	1,79%	1,78%	1,77%	1,79%	1,78%
1,90	1,80%	1,77%	1,76%	1,79%	1,76%
2,43	1,74%	1,77%	1,75%	1,78%	1,75%
2,92	1,72%	1,77%	1,74%	1,78%	1,74%
3,90	1,69%	1,77%	1,73%	1,79%	1,73%
4,73	1,69%	1,78%	1,73%	1,80%	1,73%
	RMSE	0,040%	0,022%	0,048%	0,023%

Tabla III-9: Estructura de Volatilidad Semanal de Oro para el periodo entre 09/2003-05/2005. Utilizando parámetros calibrados fuera de la muestra.

Plazos Promedio Semanales	Volatilidades semanales	EV analítica		EV curvas	
		EV C&C-D	EV C&S	EV C&C-D	EV C&S
0,041	1,94%	1,83%	1,84%	1,98%	1,97%
0,229	1,95%	1,82%	1,83%	1,96%	1,95%
0,371	1,96%	1,81%	1,82%	1,95%	1,95%
0,704	1,96%	1,80%	1,80%	1,92%	1,93%
0,871	1,95%	1,79%	1,79%	1,91%	1,92%
1,205	1,94%	1,79%	1,78%	1,89%	1,90%
1,371	1,94%	1,78%	1,77%	1,89%	1,89%
1,952	2,15%	1,77%	1,76%	1,87%	1,87%
2,335	2,19%	1,77%	1,75%	1,86%	1,86%
2,835	2,18%	1,77%	1,74%	1,85%	1,84%
3,836	2,17%	1,77%	1,73%	1,84%	1,83%
4,681	1,81%	1,78%	1,73%	1,84%	1,82%
	RMSE	0,257%	0,273%	0,187%	0,189%

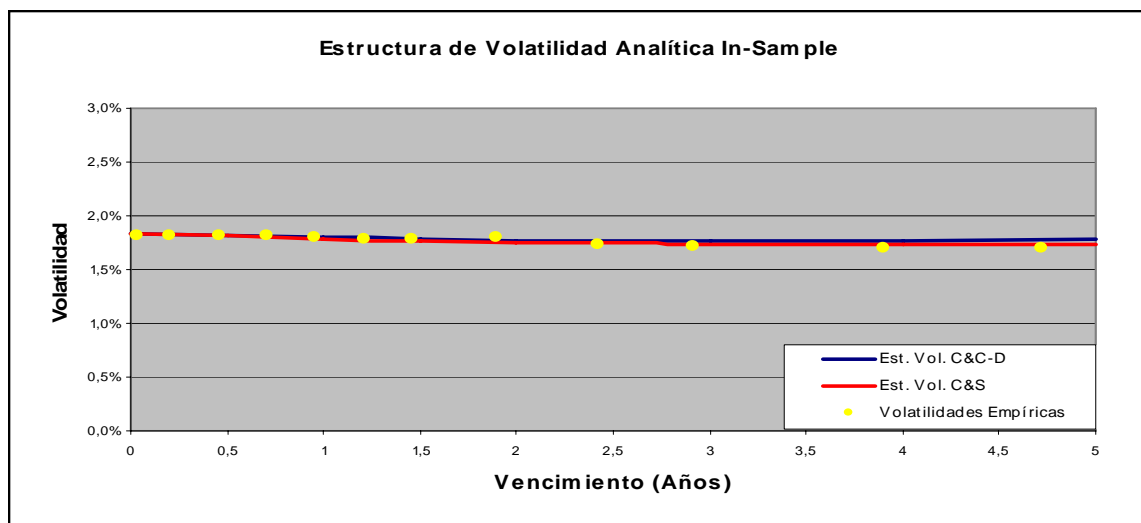


Figura 3-4: Estructura de Volatilidad Analítica Semanal de Oro para el periodo entre 01/1990-08/2003. Utilizando parámetros calibrados dentro de la muestra.

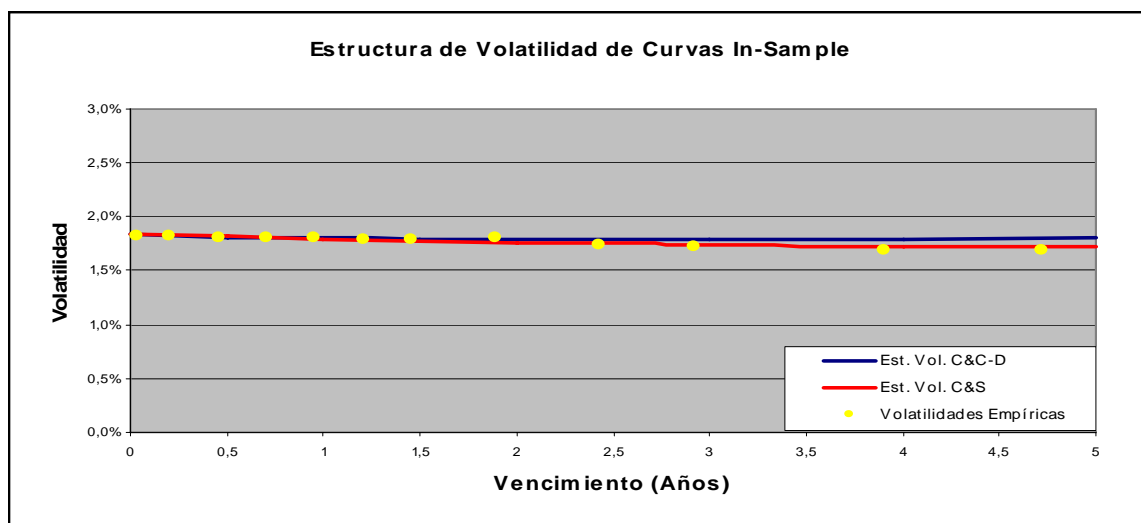


Figura 3-5: Estructura de Volatilidad de las Curvas Semanal de Oro para el periodo entre 01/1990-08/2003. Utilizando parámetros calibrados dentro de la muestra.

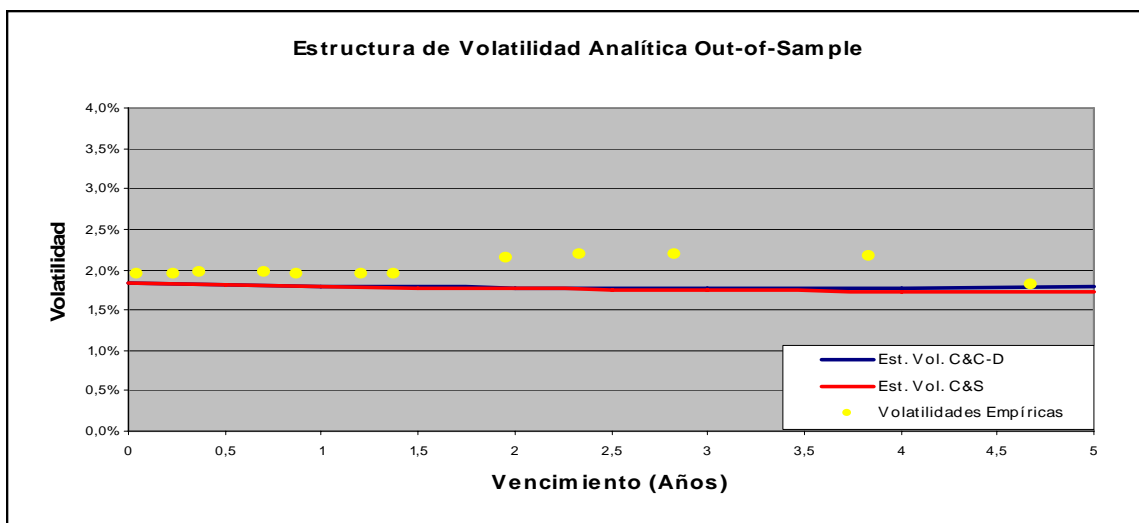


Figura 3-6: Estructura de Volatilidad Analítica Semanal de Oro para el periodo 09/2003-05/2005. Utilizando parámetros calibrados fuera de la muestra.

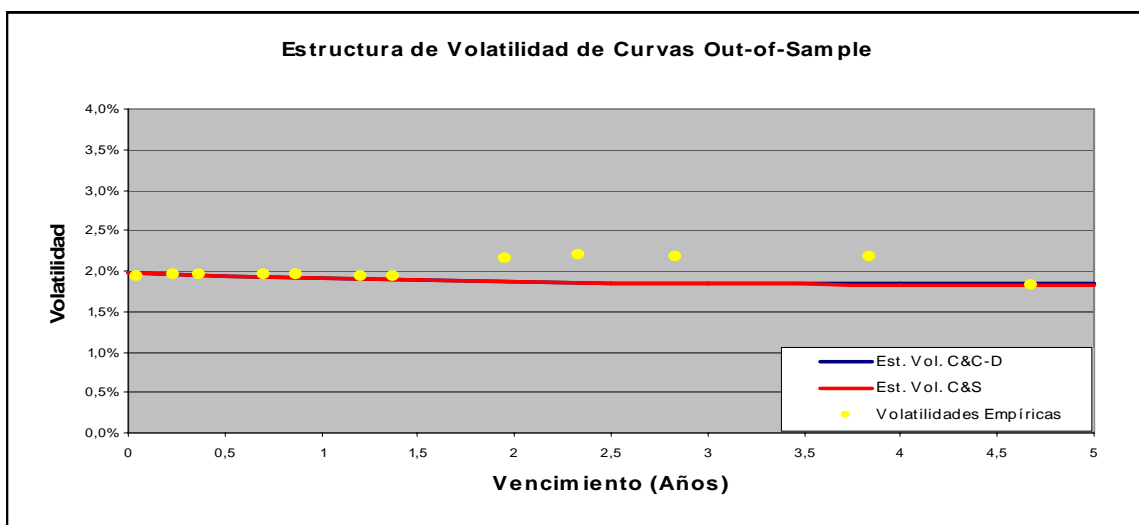


Figura 3-7: Estructura de Volatilidad de las Curvas Semanal de Oro para el periodo 09/2003- 05/2005. Utilizando parámetros calibrados fuera de la muestra.

III.2.2 Resultados Petróleo

En el caso de este commodity fueron comparados el modelo estacionario de 3 factores de C&C-D y el modelo no estacionario de 3 factores de C&S. Al igual que en el caso anterior se estudiaron tres aspectos: ajuste de contratos futuros, capacidad de predicción de precios spot y estructura de volatilidad.

La estimación de los parámetros para este commodity, fue realizada considerando el panel de precios que va desde 01/1990-08/2003 y cuenta con precios cuyos vencimientos van desde 1 mes hasta 3 años. En este caso los contratos transados también presentan vencimientos superiores a los utilizados en la calibración del modelo, por lo cual se creó un panel de datos fuera de muestra para el corte transversal, tanto en el periodo In-Sample (dentro de la muestra) como Out-of-Sample (fuera de la muestra)¹⁶.

a) Ajuste de Contratos Futuros

En esta sección se presenta el ajuste de la estructura de precios de contratos futuros de petróleo. La figura 3-8 muestra el ajuste de los modelos dentro de la muestra y fuera de la muestra en el corte transversal (triángulos) para el día 25 de Agosto de 2003. La tabla III-10 presenta los errores porcentuales dentro de la muestra para cada modelo. Esta tabla está dividida en dos partes, en la primera parte se muestran los errores de ajuste para los contratos dentro de la muestra en el corte transversal. La columna Sub-Total entrega los errores totales para los contratos mencionados. En la segunda parte de la tabla (en gris) se muestran los errores de ajuste para los contratos dentro de la muestra pero para plazos superiores a los utilizados en la calibración del modelo (fuera de muestra en el corte transversal). La columna Total, entrega los errores totales para todos los contratos. La tabla III-11 presenta los errores de ajuste de los modelos para los contratos fuera de la muestra. En este caso, nuevamente se presentan los errores de

¹⁶ Ver tabla III-2

contratos fuera de la muestra en el corte transversal y los correspondientes errores totales para contratos dentro de la muestra en el corte transversal y para todos los contratos.

Para el caso del análisis dentro de la muestra el RMSE total del modelo de C&S es de un 2.01% contra un 2.03% del modelo de C&C-D. En el caso del panel fuera de la muestra el RMSE total del modelo de C&S es de 3.5% contra un 10.23% del modelo de C&C-D. Al igual que en el caso anterior cabe destacar el aumento del error de ajuste que presentan ambos modelos a los contratos con vencimientos superiores a los utilizados en la calibración de los modelos (contratos fuera de la muestra en el corte transversal).

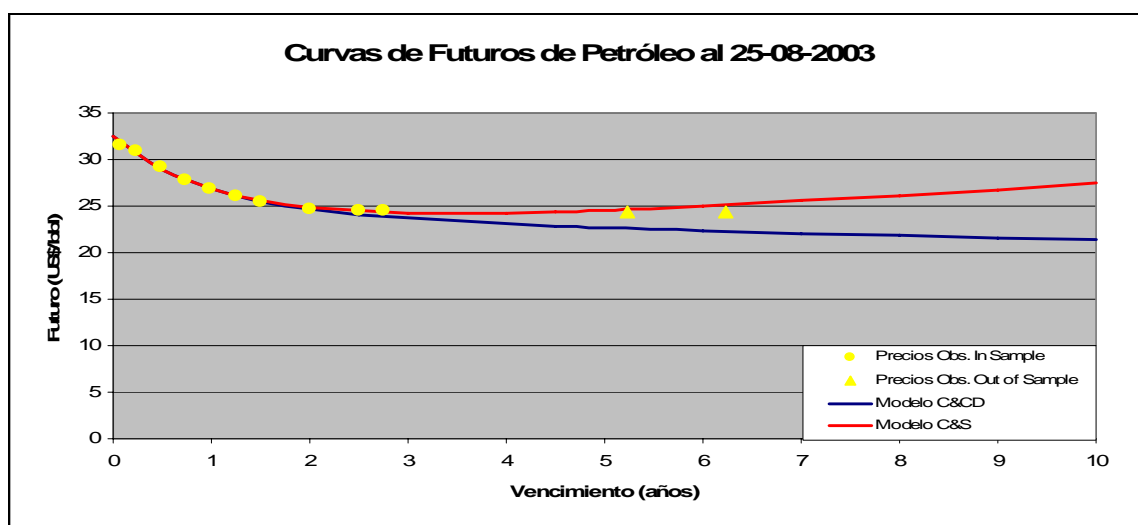


Figura 3-8: Precios Observados y curvas teóricas de contratos futuros de Petróleo para el día 25-08-2003 utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

Tabla III-10: Errores Porcentuales de Ajuste de Contratos Futuros de Petróleo para plazos dentro de la muestra y fuera de la muestra en el corte transversal.

Errores In-Sample	Plazos Promedio											SUB-TOTAL	5,00	6,00	6,74	TOTAL
	0,04	0,20	0,45	0,70	0,95	1,20	1,45	1,95	2,43	2,83	2,71%					
RMSEC&C-D	1,20%	1,03%	1,12%	0,67%	0,32%	0,59%	1,05%	1,73%	2,33%	2,71%	1,40%	4,39%	4,73%	5,26%	2,03%	
RMSEC&S	0,61%	0,85%	0,45%	0,32%	0,38%	0,36%	0,43%	0,37%	0,26%	0,52%	0,49%	4,37%	6,59%	7,62%	2,01%	
MAEC&C-D	0,83%	0,69%	0,79%	0,50%	0,23%	0,42%	0,79%	1,31%	1,80%	2,15%	0,90%	3,60%	3,86%	4,38%	1,22%	
MAEC&S	0,44%	0,60%	0,33%	0,23%	0,27%	0,26%	0,32%	0,27%	0,19%	0,37%	0,33%	3,59%	5,64%	7,10%	0,83%	
MEC&C-D	-0,03%	0,04%	0,01%	-0,04%	-0,03%	-0,01%	0,03%	-0,24%	-0,25%	-0,22%	-0,07%	-1,29%	-1,01%	0,33%	-0,15%	
MEC&S	-0,04%	0,05%	0,05%	-0,03%	-0,04%	-0,04%	0,00%	0,07%	0,05%	-0,05%	0,00%	-3,49%	-5,60%	-7,05%	-0,53%	

Tabla III-11: Errores Porcentuales de Ajuste de Contratos Futuros de Petróleo para plazos fuera de la muestra.

Errores Out-of-Sample	Plazos Promedio											SUB-TOTAL	4,94	5,94	6,75	TOTAL
	0,03	0,20	0,45	0,70	0,95	1,20	1,45	1,95	2,28	2,67	5,02%					
RMSEC&C-D	3,67%	1,95%	1,15%	2,90%	3,54%	3,27%	2,47%	0,67%	2,83%	5,02%	3,00%	17,84%	21,94%	27,10%	10,23%	
RMSEC&S	0,36%	0,53%	0,36%	0,26%	0,26%	0,31%	0,39%	0,31%	0,21%	0,50%	0,37%	5,74%	8,31%	9,34%	3,50%	
MAEC&C-D	3,20%	1,72%	0,97%	2,54%	3,10%	2,87%	2,18%	0,43%	2,37%	4,49%	2,39%	16,33%	20,29%	25,13%	5,97%	
MAEC&S	0,31%	0,44%	0,27%	0,24%	0,23%	0,23%	0,33%	0,25%	0,15%	0,41%	0,29%	4,93%	7,25%	8,26%	1,58%	
MEC&C-D	3,20%	1,72%	-0,93%	-2,54%	-3,10%	-2,87%	-2,18%	0,23%	2,37%	4,49%	0,04%	16,33%	20,29%	25,13%	4,10%	
MEC&S	-0,18%	0,33%	0,00%	-0,19%	-0,14%	0,00%	0,09%	0,15%	0,11%	-0,19%	0,00%	-4,82%	-7,14%	-8,11%	-1,33%	

b) Ajuste de Valor Esperado

En esta sección se presentan los resultados respecto a la capacidad de predicción de los modelos. Las tablas III-12 y III-13 muestran los errores de predicción de futuros encontrados para ambos modelos para plazos dentro y fuera de la muestra respectivamente. En la tabla III-12 se aprecia que el modelo de C&C-D presenta menores niveles de error de predicción de precios spot, teniendo un RMSE total de 16.91% contra un 17.28% del modelo de C&S. En esta misma tabla se aprecia también el efecto de incorporar un premio por riesgo variable, ya que si se comparan los errores por plazos, se aprecia que para el plazo más cercano, el modelo de C&S presenta un error similar al de C&C-D, sin embargo, a medida que se predice a plazos mayores, los errores del modelo de C&S van creciendo en mayor medida respecto a los del modelo de

C&C-D, lo cual es de esperar si consideramos que el premio al riesgo de C&S es constante.

En la tabla III-13 se aprecia una situación distinta al caso anterior. En este caso el modelo de C&S presenta un RMSE total de 15.31%, mientras que el modelo de C&C-D tiene un RMSE total de 21.75%. Luego, tenemos que para el análisis fuera de la muestra, el modelo de C&S presenta menores errores de predicción que el modelo de C&C-D. Es importante destacar el hecho de que en el modelo de C&S los errores por plazos no son muy distintos para el análisis dentro y fuera de la muestra, en cambio para el modelo de C&C-D los errores se incrementan considerablemente. Este hecho muestra la dependencia de C&C-D de los datos utilizados.

Las predicciones del precio spot realizadas por medio del valor esperado de los modelos en la medida real o histórica (considera premios por riesgo), fueron comparadas con las predicciones realizadas a través de los futuros (valor esperado ajustado por riesgo) entregados por los mismos modelos y con el valor esperado de un proceso de caminata aleatoria (valor constante). Las figuras 3-9 y 3-10 muestran los RMSE de predicción de cada uno de los procedimientos mencionados para los datos dentro y fuera de la muestra respectivamente.

Tabla III-12: Errores de Predicción de Petróleo para el periodo entre 01/1990-08/2003.

Utilizando parámetros calibrados dentro de la muestra.

Errores In-Sample	Plazos (Meses)						TOTAL
	1	2	3	4	5	6	
RMSE C&C-D	9,34%	13,79%	16,14%	18,26%	20,10%	21,01%	16,91%
RMSE C&S	9,40%	13,92%	16,34%	18,60%	20,63%	21,73%	17,28%
MAE C&C-D	7,25%	10,51%	12,45%	14,46%	16,31%	17,20%	13,03%
MAE C&S	7,28%	10,58%	12,65%	14,69%	16,59%	17,70%	13,25%
ME C&C-D	-0,52%	-1,03%	-1,31%	-1,49%	-1,56%	-1,44%	-1,22%
ME C&S	-0,54%	-1,07%	-1,37%	-1,60%	-1,73%	-1,69%	-1,33%

Tabla III-13: Errores de Predicción de Petróleo para el periodo entre 09/2003-05/2005.
Utilizando parámetros calibrados fuera de la muestra.

Errores Out-of-Sample	Plazos (Meses)						TOTAL
	1	2	3	4	5	6	
RMSE C&C-D	10,33%	15,21%	18,67%	22,42%	27,03%	30,47%	21,75%
RMSE C&S	8,87%	12,06%	13,59%	15,47%	18,04%	20,90%	15,31%
MAE C&C-D	8,86%	14,02%	17,00%	21,35%	26,49%	29,84%	19,55%
MAE C&S	7,31%	10,68%	11,60%	13,83%	16,27%	18,89%	13,07%
ME C&C-D	7,08%	12,50%	16,91%	21,35%	26,49%	29,84%	18,98%
ME C&S	2,29%	5,98%	9,09%	12,37%	16,24%	18,80%	10,76%

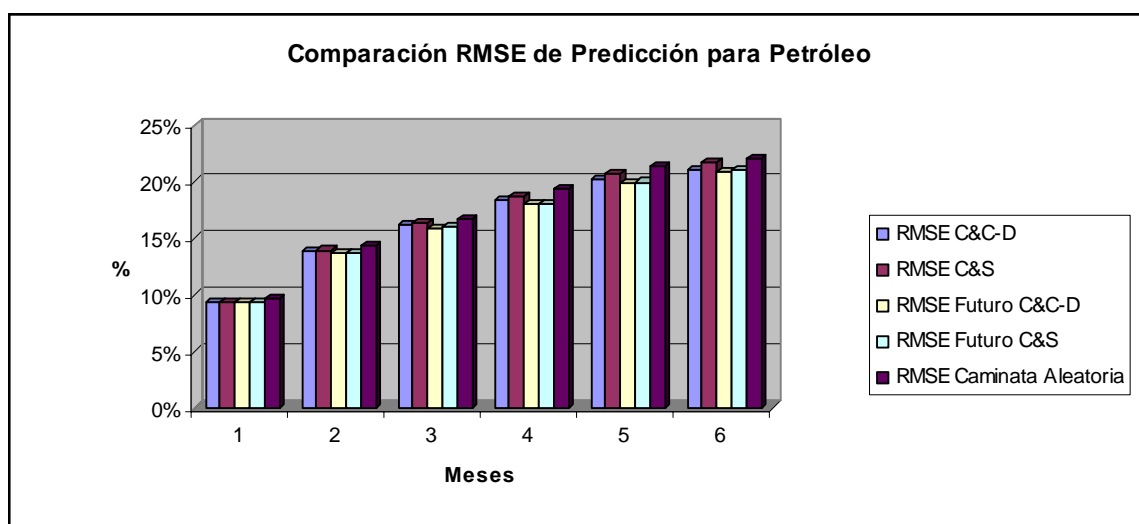


Figura 3-9: RMSE de ajuste de predicción de modelos para petróleo y comparación con predicción a través de contratos futuros (RMSE Futuro) y caminata aleatoria (RMSE Caminata Aleatoria) para datos dentro de la muestra.

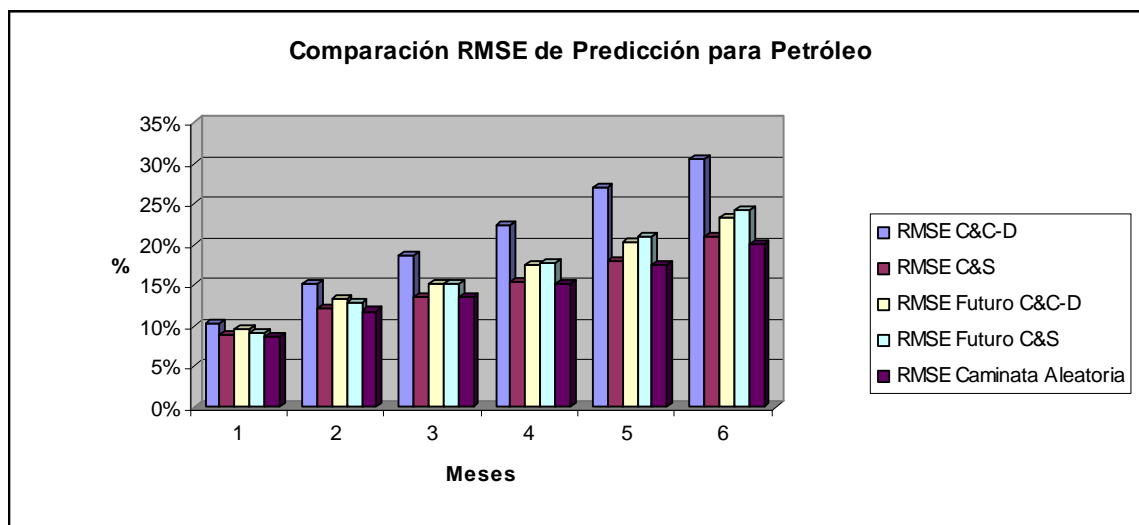


Figura 3-10: RMSE de ajuste de predicción de modelos para petróleo y comparación con predicción a través de contratos futuros (RMSE Futuro) y caminata aleatoria (RMSE Caminata Aleatoria) para datos fuera de la muestra.

c) Estructura de Volatilidad

En esta sección se presentan las estructuras de volatilidad obtenidas para el petróleo por medio de los mismos procedimientos explicados en la sección anterior.

En la tabla III-14 y las figuras 3-11 y 3-12, presentan los resultados para la estructura de volatilidad calculada de manera analítica y por medio de las curvas para el periodo utilizado en la calibración de los parámetros. Al igual que con el oro, no se aprecia una gran diferencia entre ambos procedimientos utilizados en el cálculo de la estructura de volatilidad. En el caso del modelo de C&S, el RMSE de las curvas es de 0.366% contra un 0.379%. En el caso del modelo de C&C-D, el RMSE de las curvas es de 0.720% contra un 0.726%. Al igual que con el oro, en este caso nuevamente se obtiene una pequeña diferencia entre ambas formas de calcular la estructura de volatilidad, lo cual

hace concluir que ambos procedimientos presentan resultados equivalentes en cuanto al ajuste de las volatilidades dentro de la muestra.

El análisis de la estructura de volatilidad para el panel de datos fuera de la muestra se muestra en la tabla III-15 y en las figuras 3-13 y 3-14. En este caso, se aprecia que para ambos modelos la volatilidad extraída de las curvas presenta errores de ajuste menores a los de la estructura de volatilidad calculada de manera analítica. En el caso del modelo de C&S, el RMSE de las curvas es de 0.122% contra un 0.631%. En el caso del modelo de C&C-D, el RMSE de las curvas es de 0.950% contra un 1.373%.

Al comparar ambos modelos se aprecia que el modelo de C&S presenta la mitad del error de ajuste que presenta el modelo de C&C-D para el panel dentro de la muestra. Para el panel fuera de la muestra, nuevamente el modelo de C&S presenta errores de ajuste menores a los del modelo de C&C-D.

Tabla III-14: Estructura de Volatilidad Semanal de Petróleo para el periodo entre 01/1990-08/2003. Utilizando parámetros calibrados dentro de la muestra.

Plazos Promedio Semanales	Volatilidades semanales	EV analítica		EV curvas	
		EV C&C-D	EV C&S	EV C&C-D	EV C&S
0,04	5,44%	5,30%	5,17%	5,00%	5,18%
0,20	4,18%	4,52%	4,22%	4,31%	4,23%
0,45	3,46%	3,67%	3,42%	3,55%	3,42%
0,70	3,05%	3,11%	2,98%	3,06%	2,97%
0,95	2,78%	2,75%	2,72%	2,74%	2,71%
1,20	2,60%	2,50%	2,57%	2,51%	2,55%
1,45	2,47%	2,32%	2,50%	2,35%	2,48%
1,95	2,10%	2,06%	2,49%	2,09%	2,47%
2,43	2,06%	1,85%	2,56%	1,89%	2,54%
2,83	2,04%	1,70%	2,63%	1,73%	2,61%
5,00	2,30%	1,04%	2,88%	1,05%	2,86%
6,00	2,34%	0,83%	2,92%	0,84%	2,90%
6,74	2,31%	0,70%	2,93%	0,71%	2,91%
	RMSE	0,726%	0,379%	0,720%	0,366%

Tabla III-15: Estructura de Volatilidad Semanal de Petróleo para el periodo entre 09/2003-05/2005. Utilizando parámetros calibrados fuera de la muestra.

Plazos Promedio Semanales	Volatilidades semanales	EV analítica		EV curvas	
		EV C&C-D	EV C&S	EV C&C-D	EV C&S
0,03	5,06%	5,30%	5,17%	5,08%	5,03%
0,20	4,72%	4,52%	4,22%	4,68%	4,63%
0,45	4,25%	3,67%	3,42%	4,25%	4,19%
0,70	3,88%	3,11%	2,98%	3,96%	3,87%
0,95	3,62%	2,75%	2,72%	3,74%	3,62%
1,20	3,44%	2,50%	2,57%	3,55%	3,44%
1,45	3,31%	2,32%	2,50%	3,38%	3,30%
1,95	3,09%	2,06%	2,49%	3,06%	3,13%
2,28	3,11%	1,85%	2,56%	2,85%	3,06%
2,67	3,17%	1,70%	2,63%	2,61%	3,02%
4,94	3,06%	1,04%	2,88%	1,53%	2,97%
5,94	3,08%	0,83%	2,92%	1,21%	2,97%
6,75	3,33%	0,70%	2,93%	0,99%	2,97%
RMSE		1,373%	0,631%	0,950%	0,122%

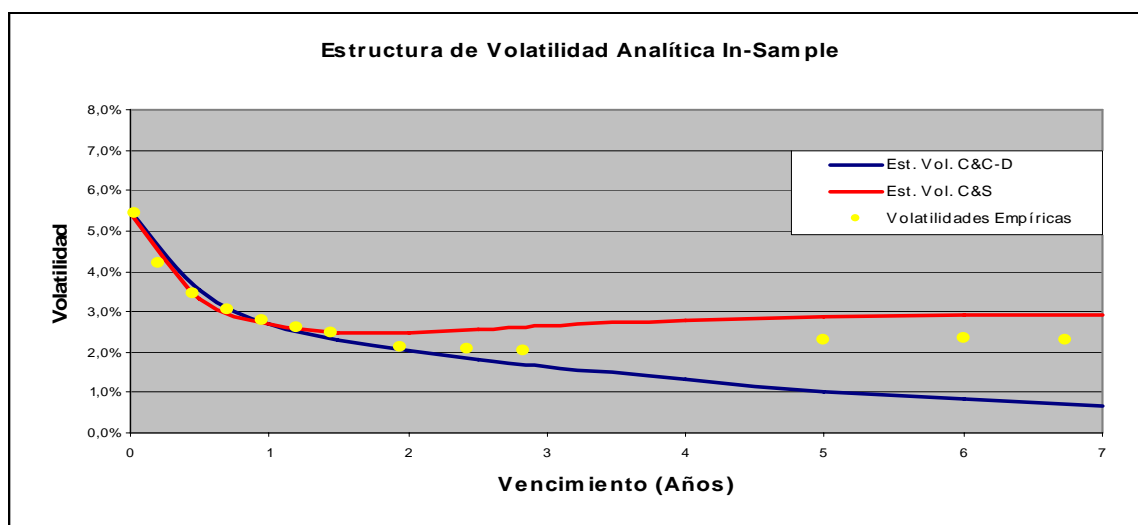


Figura 3-11: Estructura de Volatilidad Analítica Semanal de Petróleo para el periodo entre 01/1990-08/2003. Utilizando parámetros calibrados dentro de la muestra.

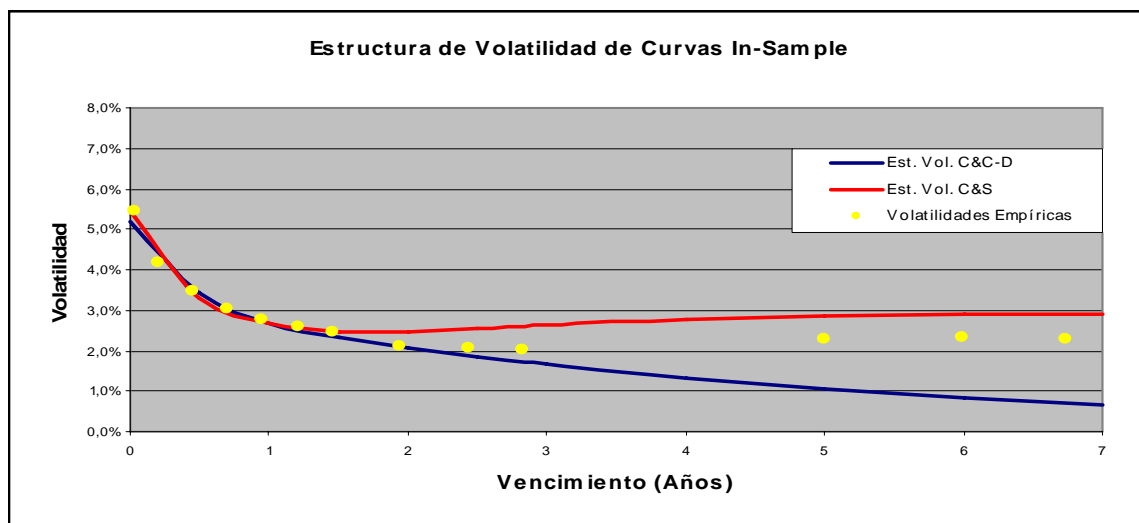


Figura 3-12: Estructura de Volatilidad de las Curvas Semanal de Petróleo para el periodo entre 01/1990-08/2003. Utilizando parámetros calibrados dentro de la muestra.

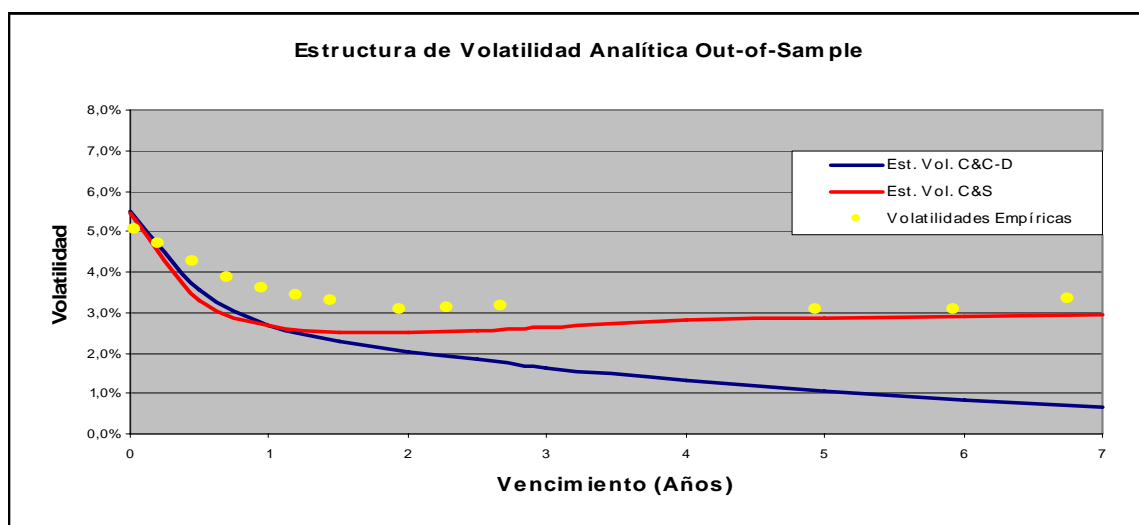


Figura 3-13: Estructura de Volatilidad Analítica Semanal de Petróleo para el periodo 09/2003- 05/2005. Utilizando parámetros calibrados fuera de la muestra.

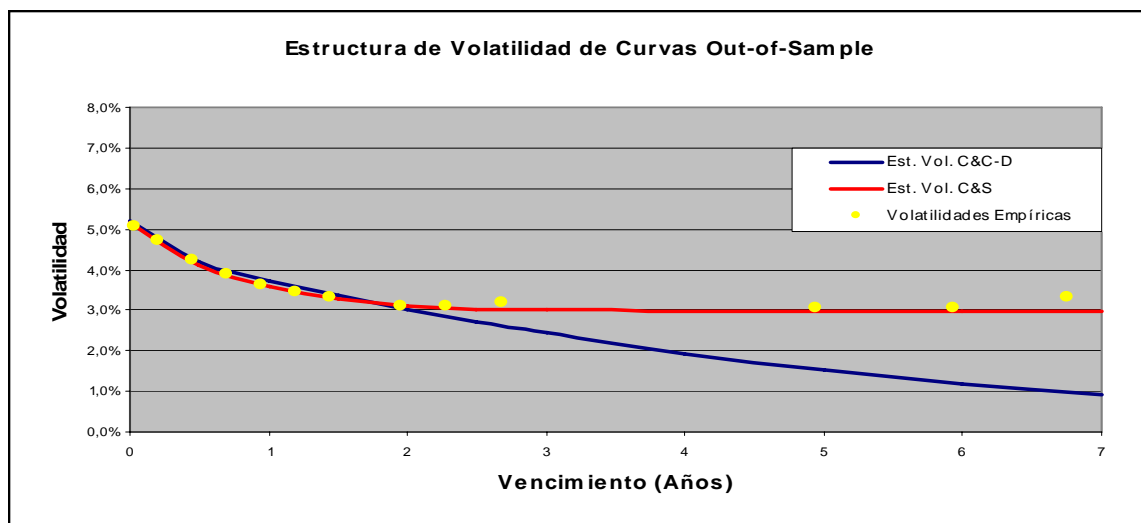


Figura 3-14: Estructura de Volatilidad de las Curvas Semanal de Petróleo para el periodo 09/2003- 05/2005. Utilizando parámetros calibrados fuera de la muestra.

III.2.3 Resultados Cobre

En el caso de este commodity fueron comparados el modelo de C&C-D y el modelo de 3 factores de C&S. Al igual que en los casos anteriores se estudiaron los aspectos de ajuste de contratos futuros, capacidad de predicción del precio spot y estructura de volatilidad.

La estimación de los parámetros para este commodity, fue realizada considerando el panel de precios que va desde 01/1990-08/2003 y cuenta con precios cuyos vencimientos van desde 1 mes hasta 2 años. En este caso los parámetros fueron calibrados utilizando un panel con datos que los contratos de mayor vencimiento, por lo cual no hay panel de datos fuera de muestra en el corte transversal¹⁷.

a) Ajuste de Contratos Futuros

En esta sección se presenta el ajuste de la estructura de precios de contratos futuros de cobre. La figura 3-15 muestra el ajuste de los modelos dentro de la muestra. La tabla III-16 presenta los errores porcentuales dentro de la muestra para cada modelo. La tabla III-17 presenta los errores de ajuste de los modelos para los contratos fuera de la muestra.

Se aprecia que el modelo de C&C-D presenta el doble del error de ajuste que tiene el modelo de C&S dentro de la muestra. En este caso, el RMSE total del modelo de C&S es de un 0.23% contra un 0.51% del modelo de C&C-D. Para el caso fuera de la muestra, el error del modelo de C&C-D es el triple del error de ajuste del modelo de C&S, con un RMSE total de 1.15% contra un 0.41% del modelo de C&S.

¹⁷ Ver tabla 3.3

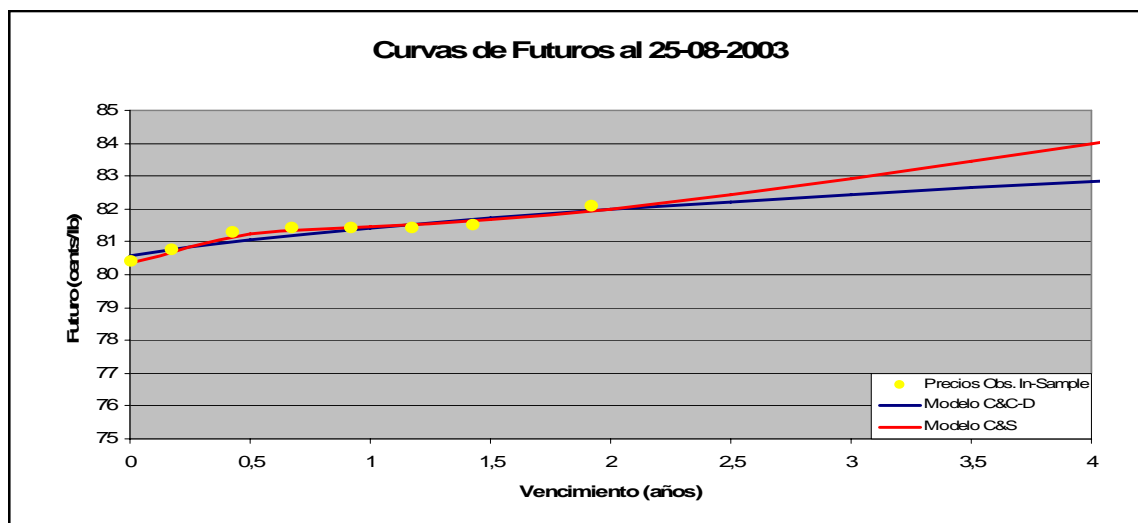


Figura 3-15: Precios Observados y curvas teóricas de contratos futuros de Cobre para el día 25-08-2003 utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

Tabla III-16: Errores Porcentuales de Ajuste de Contratos Futuros de Cobre para plazos dentro de la muestra.

Errores In-Sample	Plazos Promedio								TOTAL
	0,04	0,20	0,45	0,70	0,95	1,20	1,45	1,95	
RMSE C&C-D	0,76%	0,49%	0,64%	0,42%	0,20%	0,32%	0,50%	0,69%	0,51%
RMSE C&S	0,19%	0,35%	0,17%	0,20%	0,22%	0,18%	0,23%	0,26%	0,23%
MAE C&C-D	0,48%	0,28%	0,41%	0,29%	0,14%	0,20%	0,35%	0,50%	0,32%
MAE C&S	0,12%	0,21%	0,12%	0,13%	0,15%	0,12%	0,16%	0,18%	0,15%
ME C&C-D	-0,08%	0,04%	0,07%	0,05%	-0,01%	-0,07%	-0,01%	-0,05%	0,00%
ME C&S	0,02%	-0,04%	-0,01%	0,04%	0,04%	-0,03%	-0,04%	0,07%	0,00%

Tabla III-17: Errores Porcentuales de Ajuste de Contratos Futuros de Cobre para plazos fuera de la muestra.

Errores Out-of-Sample	Plazos Promedio								TOTAL
	0,04	0,20	0,45	0,71	0,96	1,21	1,45	1,86	
RMSE C&C-D	2,21%	0,37%	1,38%	1,16%	0,76%	0,62%	0,50%	1,06%	1,15%
RMSE C&S	0,28%	0,45%	0,36%	0,26%	0,25%	0,47%	0,41%	0,63%	0,41%
MAE C&C-D	1,75%	0,26%	1,14%	0,90%	0,57%	0,50%	0,34%	0,80%	0,78%
MAE C&S	0,22%	0,35%	0,27%	0,17%	0,19%	0,36%	0,32%	0,46%	0,29%
ME C&C-D	-1,67%	0,01%	1,14%	0,86%	0,38%	-0,02%	-0,30%	-0,32%	0,01%
ME C&S	0,16%	-0,27%	0,00%	0,02%	0,09%	0,13%	0,04%	-0,18%	0,00%

b) Ajuste de Valor Esperado

En esta sección se presentan los resultados respecto a la capacidad de predecir los precios spot de cobre. Las tablas III-18 y III-19 muestran los errores en la predicción de encontrados para ambos modelos para plazos dentro y fuera de la muestra respectivamente. En la tabla III-18 se aprecia que el modelo de C&C-D presenta menores errores que el modelo de C&S, teniendo un RMSE total de 11.45% contra un 11.90% del modelo de C&S. En esta misma tabla, al igual que con el petróleo, se aprecia también el efecto de incorporar un premio por riesgo variable, en el sentido que al ir aumentando los plazos, los errores se van incrementando en mayor medida para el modelo de C&S que para el modelo de C&C-D.

En la tabla III-19 se aprecia una situación distinta al caso anterior. En este caso el modelo de C&S presenta un RMSE total de 23.26%, mientras que el modelo de C&C-D tiene un RMSE total de 23.61%. Luego, tenemos que para el análisis fuera de la muestra, el modelo de C&S es quien presenta menores errores de predicción de los precios spot.

Al igual que con los commodities anteriores, las predicciones del precio spot realizadas por medio del valor esperado en la medida real de los modelos, fueron comparadas con predicciones realizadas a través de los futuros entregados por los mismos modelos y con

el valor esperado de un proceso de caminata aleatoria. Las figuras 3-16 y 3-17 muestran los RMSE de predicción de cada uno de los procedimientos mencionados para los datos dentro y fuera de la muestra respectivamente.

Tabla III-18: Errores de Predicción de Cobre para el periodo entre 01/1990-08/2003.

Utilizando parámetros calibrados dentro de la muestra.

Errores In-Sample	Plazos (Meses)						TOTAL
	1	2	3	4	5	6	
RMSE C&C-D	5,99%	8,77%	10,24%	11,68%	13,23%	14,57%	11,12%
RMSE C&S	6,03%	8,84%	10,41%	11,87%	13,45%	14,83%	11,29%
MAE C&C-D	4,64%	6,90%	8,27%	9,41%	10,58%	11,52%	8,55%
MAE C&S	4,70%	6,98%	8,45%	9,81%	11,09%	12,06%	8,85%
MEC&C-D	-0,23%	-0,36%	-0,53%	-0,64%	-0,71%	-0,70%	-0,53%
MEC&S	0,06%	0,18%	0,20%	0,30%	0,49%	0,73%	0,33%

Tabla III-19: Errores de Predicción de Cobre para el periodo entre 09/2003-05/2005.

Utilizando parámetros calibrados fuera de la muestra.

Errores Out-of-Sample	Plazos (Meses)						TOTAL
	1	2	3	4	5	6	
RMSE C&C-D	7,26%	12,45%	15,77%	18,95%	22,14%	23,98%	17,67%
RMSE C&S	7,20%	12,14%	15,27%	18,42%	21,62%	24,06%	17,37%
MAE C&C-D	5,50%	10,73%	13,64%	16,93%	20,79%	23,14%	15,09%
MAE C&S	5,46%	10,46%	13,30%	16,28%	19,90%	22,83%	14,67%
MEC&C-D	3,27%	8,98%	13,17%	16,92%	20,79%	23,14%	14,34%
MEC&S	3,70%	8,38%	12,17%	15,83%	19,89%	22,81%	13,76%

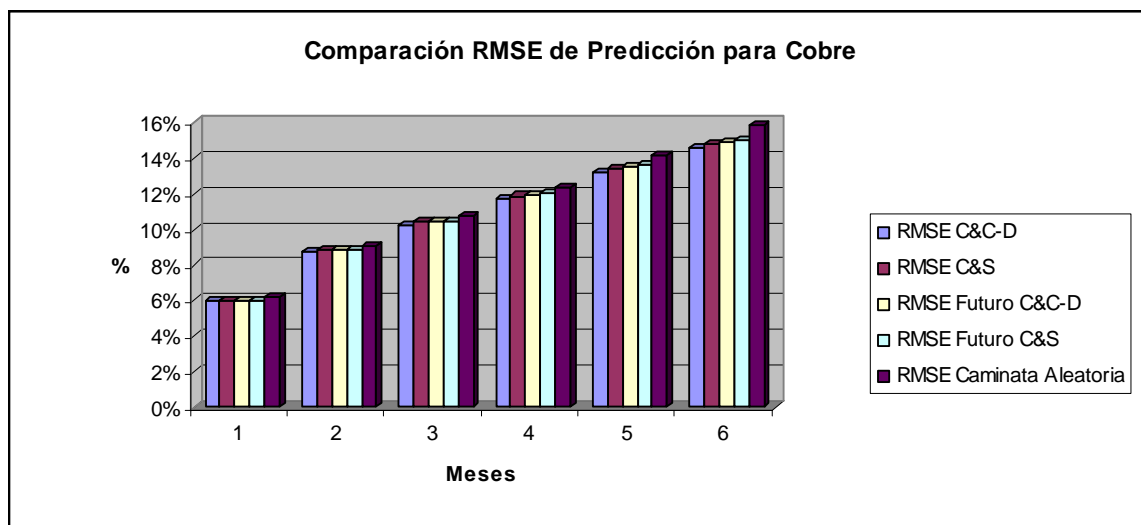


Figura 3-16: RMSE de ajuste de predicción de modelos para cobre y comparación con predicción a través de contratos futuros (RMSE Futuro) y caminata aleatoria (RMSE Caminata Aleatoria) para datos dentro de la muestra.

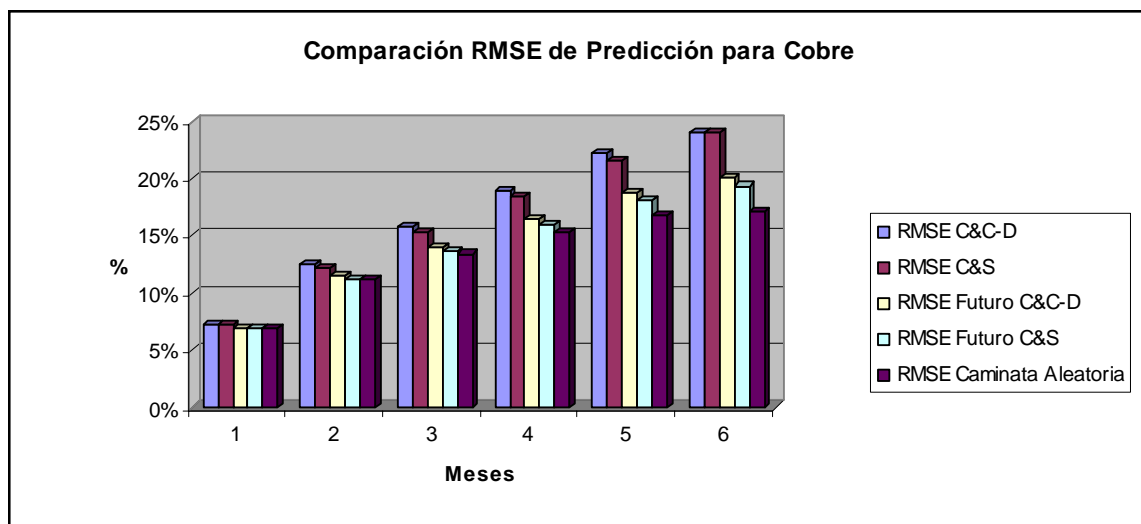


Figura 3-17: RMSE de ajuste de predicción de modelos para cobre y comparación con predicción a través de contratos futuros (RMSE Futuro) y caminata aleatoria (RMSE Caminata Aleatoria) para datos fuera de la muestra.

c) Estructura de Volatilidad

En esta sección se presentan las estructuras de volatilidad obtenidas para el cobre por medio de los mismos procedimientos explicados en la sección anterior.

En la tabla III-20 y las figuras 3-18 y 3-19, presentan los resultados para la estructura de volatilidad calculada de manera analítica y por medio de las curvas para el periodo utilizado en la calibración de los parámetros. Al igual que con los commodities anteriores, no se aprecia una gran diferencia entre ambos procedimientos utilizados en el cálculo de la estructura de volatilidad. En el caso del modelo de C&S, el RMSE de las curvas es de 0.095% contra un 0.082%. En el caso del modelo de C&C-D, el RMSE de las curvas es de 0.118% contra un 0.116%. Al igual que en los casos anteriores, nuevamente se concluye que ambos procedimientos presentan resultados equivalentes en cuanto al ajuste de las volatilidades dentro de la muestra.

El análisis de la estructura de volatilidad para el panel de datos fuera de la muestra se muestra en la tabla III-21 y en las figuras 3-20 y 3-21, se aprecia que para ambos modelos la volatilidad extraída de las curvas presenta errores de ajuste menores a la volatilidad empírica que la estructura calculada de forma analítica. En el caso del modelo de C&S, el RMSE de las curvas es de 0.106% contra un 1.104%. En el caso del modelo de C&C-D, el RMSE de las curvas es de 0.193% contra un 1.141%.

En general, al comparar ambos modelos se aprecia que el modelo de C&S proporciona errores de ajuste menores de la estructura de volatilidad del cobre tanto dentro como fuera de la muestra.

Tabla III-20: Estructura de Volatilidad Semanal de Cobre para el periodo entre 01/1990-08/2003. Utilizando parámetros calibrados dentro de la muestra.

Plazos Promedio Semanales	Volatilidades semanales	EV analítica		EV curvas	
		EV C&C-D	EV C&S	EV C&C-D	EV C&S
0,04	3,11%	3,09%	3,09%	3,08%	3,09%
0,20	2,91%	2,83%	2,84%	2,82%	2,83%
0,45	2,58%	2,55%	2,59%	2,54%	2,58%
0,70	2,36%	2,36%	2,40%	2,36%	2,38%
0,95	2,19%	2,23%	2,25%	2,23%	2,22%
1,20	2,12%	2,14%	2,15%	2,14%	2,11%
1,45	2,07%	2,06%	2,09%	2,06%	2,05%
1,95	2,25%	1,94%	2,04%	1,93%	2,00%
	RMSE	0,116%	0,082%	0,118%	0,095%

Tabla III-21: Estructura de Volatilidad Semanal de Cobre para el periodo entre 09/2003-05/2005. Utilizando parámetros calibrados fuera de la muestra.

Plazos Promedio Semanales	Volatilidades semanales	EV analítica		EV curvas	
		EV C&C-D	EV C&S	EV C&C-D	EV C&S
0,04	3,87%	3,09%	3,09%	3,90%	3,94%
0,20	3,83%	2,83%	2,84%	3,79%	3,76%
0,45	3,57%	2,55%	2,59%	3,68%	3,59%
0,71	3,37%	2,36%	2,40%	3,61%	3,48%
0,96	3,27%	2,23%	2,25%	3,54%	3,42%
1,21	3,28%	2,14%	2,15%	3,47%	3,40%
1,45	3,33%	2,06%	2,09%	3,39%	3,40%
1,86	3,60%	1,94%	2,04%	3,26%	3,44%
	RMSE	1,141%	1,104%	0,193%	0,106%

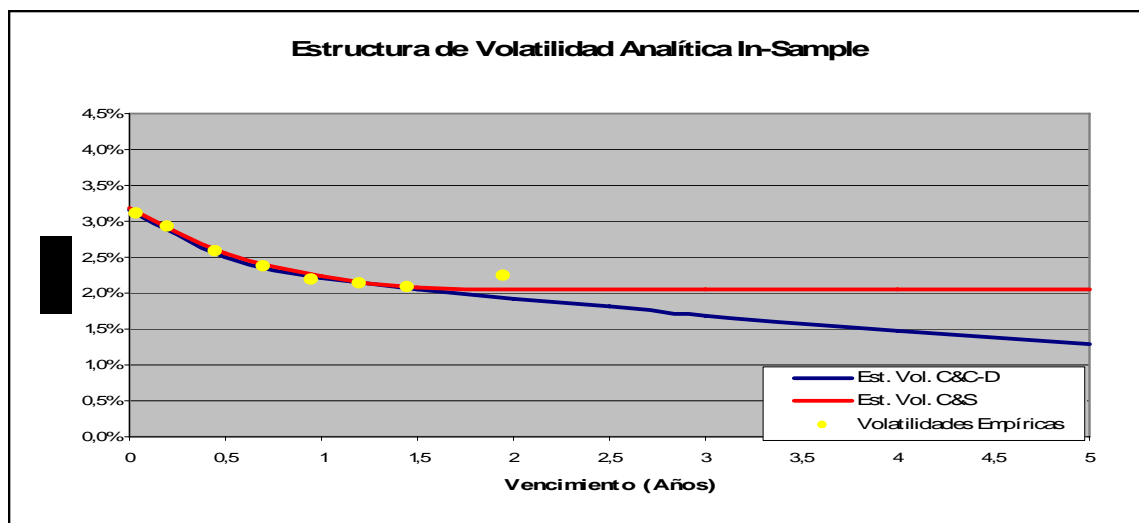


Figura 3-18: Estructura de Volatilidad Analítica Semanal de Cobre para el periodo entre 01/1990-08/2003. Utilizando parámetros calibrados dentro de la muestra.

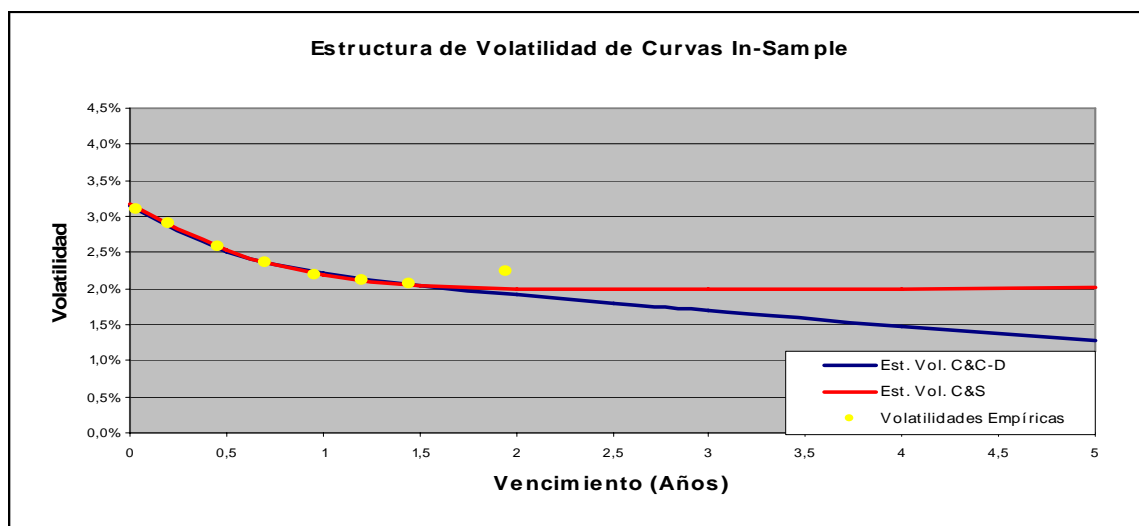


Figura 3-19: Estructura de Volatilidad de las Curvas Semanal de Cobre para el periodo entre 01/1990-08/2003. Utilizando parámetros calibrados dentro de la muestra.

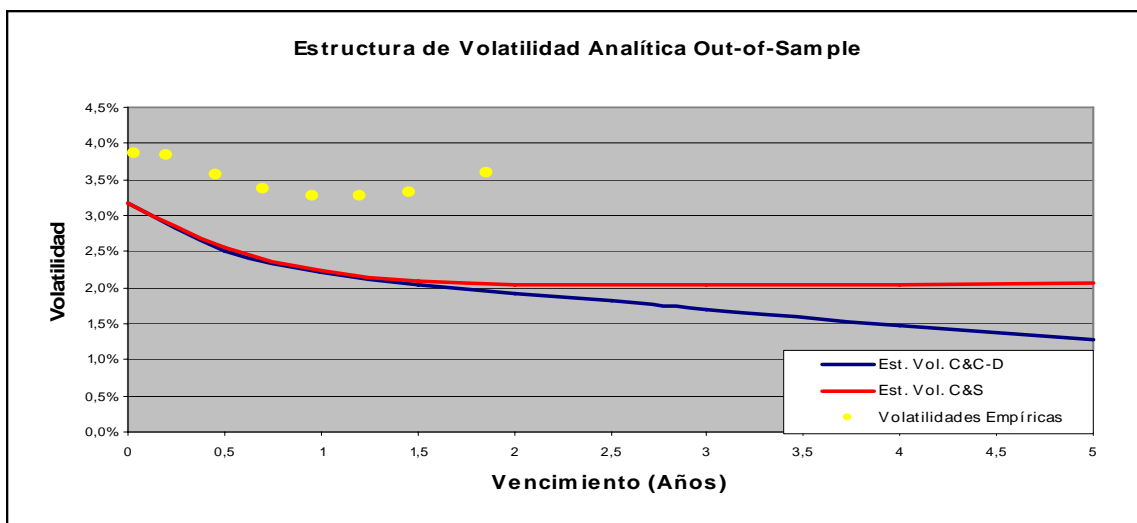


Figura 3-20: Estructura de Volatilidad Analítica Semanal de Cobre para el periodo 09/2003- 05/2005. Utilizando parámetros calibrados fuera de la muestra.

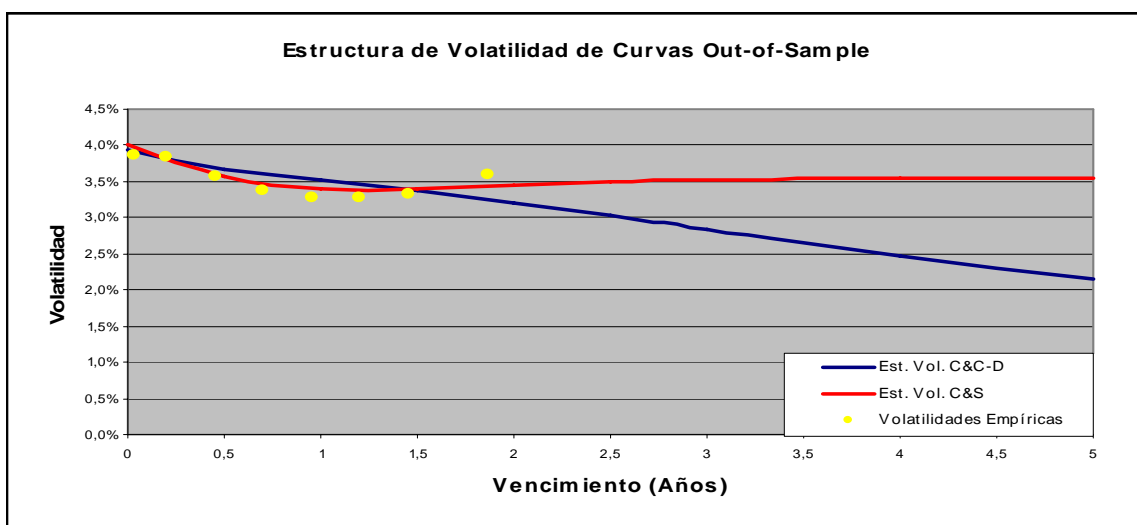


Figura 3-21: Estructura de Volatilidad de las Curvas Semanal de Cobre para el periodo 09/2003- 05/2005. Utilizando parámetros calibrados fuera de la muestra.

III.3 Conclusiones Preliminares del Estudio Empírico

En esta primera parte de la tesis, se realizó un estudio empírico donde se comparan dos modelos de precios de commodities pertenecientes a familias de modelos distintas y que cuentan con especificaciones de premios por riesgo distintas. La comparación fue realizada para oro, petróleo y cobre.

A partir de los resultados obtenidos, se puede concluir con respecto al ajuste de los contratos futuros dentro de la muestra, que para los tres commodities el modelo de C&S presenta un mejor ajuste, el cual queda evidenciado en el menor error total encontrado, aunque para plazos fuera de muestra en el corte transversal, el modelo de C&C-D presenta un menor error de ajuste en el caso del petróleo. La diferencia existente en el ajuste de ambos modelos se incrementa a favor del modelo de C&S en el análisis para datos fuera de la muestra (Out-of-Sample). En general ambos modelos no ajustan bien los contratos para vencimientos superiores a los utilizados en la calibración de los parámetros (Out of Sample en el corte transversal). Este aspecto es importante ya que muchos de estos modelos son utilizados en la valorización de proyectos, en los cuales es necesario tener contratos para plazos superiores a los transados.

En cuanto a la capacidad de predicción, el modelo de C&C-D presenta un mejor desempeño para todos los commodities cuando se trabaja dentro de la muestra. En el análisis fuera de muestra, el modelo de C&C-D sólo es superior para el caso del oro. Lo que es consistente con lo encontrado por C&C-D, donde una de las conclusiones es que para commodities utilizados como reserva de valor, el premio por riesgo es importante para explicar la mayor parte de la reversión del precio spot.

Con respecto a la estructura de volatilidad, se tiene que ambos modelos representan bien la volatilidad empírica de los contratos futuros de los tres commodities para los vencimientos que forman parte del panel de datos utilizado en la calibración de los parámetros. Se compararon dos procedimientos para el cálculo de la estructura de volatilidad. El primero corresponde a una expresión analítica que depende sólo de los

parámetros calibrados. El segundo procedimiento calcula la estructura de volatilidad directamente a través de las curvas. A partir de este análisis, se concluye que la estructura de volatilidad calculada por ambos procedimientos es equivalente para los datos dentro de la muestra. En el caso de los datos fuera de muestra la estructura de volatilidad proporcionada por las curvas es mejor, debido a que se ajusta a los nuevos datos, cosa que no ocurre al calcularla de forma analítica, la cual es siempre constante. Esta conclusión es válida para ambos modelos. Al comparar el ajuste de la volatilidad empírica por parte de ambos modelos se observa que el ajuste del modelo de C&S es superior al conseguido por el modelo de C&C-D tanto dentro como fuera de la muestra.

En resumen, se puede concluir que en aspectos referentes al corte transversal (ajuste de contratos futuros y estructura de volatilidad) el modelo de C&S presenta un mejor desempeño que el modelo de C&C-D, a pesar de que este último estima una mayor cantidad de parámetros. En aspectos de serie de tiempo (capacidad de predicción) el modelo de C&C-D presenta mejor desempeño para los datos dentro de la muestra. Sin embargo, la capacidad de predicción presente en las expresiones de valor esperado en la medida real o histórica, no es distinto a la predicción realizada a través de los contratos futuros (valor esperado ajustado por riesgo) y a la predicción por medio del valor esperado de un proceso de caminata aleatoria (valor constante)¹⁸.

Finalmente, se puede concluir que en general, con ambos modelos se realiza una mala extrapolación de datos y particularmente el modelo de C&C-D tiene un desempeño inferior al de C&S en lo relacionado con el análisis fuera de muestra.

¹⁸ En Anexo G se presentan los test de significancia.

Tabla IV-2: Matriz de Correlaciones de retornos diarios de precios spot de distintos commodities para el periodo 2001 - 2005

	Aluminio	Petróleo Brent	Cobre	Gas Natural	Gasolina	Heating Oil	Oro	Plata	Petróleo WTI
Aluminio	100%	-10%	68%	9%	15%	14%	30%	36%	12%
Petróleo Brent		100%	13%	36%	66%	71%	11%	8%	71%
Cobre			100%	7%	12%	10%	20%	27%	11%
Gas Natural				100%	32%	42%	11%	7%	36%
Gasolina					100%	70%	8%	7%	66%
Heating Oil						100%	14%	9%	75%
Oro							100%	66%	14%
Plata								100%	9%
Petróleo WTI									100%

La estimación conjunta ya ha sido explorada en el estudio de las tasas de interés, con el fin de plantear un modelo internacional para el mercado de bonos y describir el comportamiento de dos economías (Ahn, 2004; Brennan & Xia, 2004; Mosburger & Schneider, 2005).

En el caso de esta tesis, el método de estimación conjunta propuesto está basado en el Filtro de Kalman, procedimiento ampliamente utilizado en finanzas para la estimación de modelos multifactoriales, que cuenta con la ventaja de poder incorporar errores de medición (Schwartz, 1997; Schwartz & Smith, 2000; Manoliu & Tompaidis, 2002; Sørensen, 2002; Cortazar & Naranjo, 2006).

La metodología de estimación propuesta fue probada con dos commodities pertenecientes al mercado del petróleo, el WTI y el Brent. Como se muestra en las tablas anteriores, la correlación entre los precios spot de ambos commodities es de un 99%, y la correlación entre los retornos de los precios spot es de un 71%. Esto era esperable dado que ambos commodities son crudos de petróleo. Esto último plantearía la posibilidad de modelar la dinámica de los precios de ambos crudos por medio de factores comunes. Con respecto a lo anterior, un análisis de componentes principales permitiría apreciar la cantidad de factores necesarios para explicar la mayor parte de la varianza de los precios de WTI y Brent por separado y ambos commodities en conjunto. La siguiente tabla presenta la varianza explicada acumulada al ir agregando factores para el WTI y Brent analizados de forma individual y conjunta.

Tabla IV-3: Análisis de Componentes Principales de la estructura de futuros diaria para WTI y Brent. Utilizando los datos de manera individual y conjunta para el periodo 10/2001-12/2004.

	Factor 1	Factor 2	Factor 3	Factor 4
WTI Individual	98,15%	99,84%	99,98%	99,99%
Brent Individual	98,75%	99,93%	99,98%	99,99%
WTI-Brent Conjunto	91,15%	98,64%	99,54%	99,89%

El análisis anterior entrega información importante respecto al número de factores que es necesario tener en cuenta para describir el comportamiento de ambos commodities, debido a que 3 ó 4 factores explican sobre el 99,9% de la varianza encontrada en cada uno de los commodities de forma individual y para explicar el 99% de la varianza de los precios de ambos commodities de forma conjunta se necesitan también 3 ó 4 factores. Esto último entrega evidencia de que bastarían 3 ó 4 factores para modelar la dinámica conjunta de precios de ambos commodities. En este sentido, uno de los principales aportes del presente trabajo, es que hace posible la obtención simultánea de dinámicas de precios para el mercado del petróleo, obteniéndose un conjunto común de parámetros y variables de estado. En este caso, se plantea un modelo multifactorial que cuenta con factores comunes más un factor extra que afecta sólo a uno de los commodities pero que está correlacionado con el resto de los factores. Este factor extra puede ser interpretado como la diferencia o spread entre ambos tipos de crudos. Este spread podría representar ajustes por calidad, costos de transporte, etc.

La estimación conjunta hace posible también obtener un modelo más parsimonioso, reduciendo el número de parámetros a estimar en comparación con una estimación individual para cada uno de los commodities.

Otro aporte se refiere a que puede utilizar la información contenida en los precios de ambos crudos para obtener la estructura de precios individual de cada uno, aprovechando la alta correlación existente en los precios de ambos. Como se mostró en

los resultados del estudio empírico del capítulo anterior, uno de los problemas que presenta la estimación individual es la baja capacidad de extrapolación de precios para vencimientos superiores a los transados. En el caso del petróleo, la estimación conjunta de estos crudos hace posible que se obtenga una mejor extrapolación de los precios del crudo que presenta los contratos con menor vencimiento (Brent), al aprovechar la información contenida en los contratos del crudo con mayor cantidad de precios largos (WTI). Finalmente, al permitir que uno de los factores sea el spread, la metodología de estimación propuesta permite también la obtención de una curva de spreads por plazos entre ambos tipos de crudo.

IV.1 Modelo Multifactorial Utilizado

El modelo utilizado para describir el comportamiento de los precios de ambos commodities corresponde al desarrollado por Cortazar y Naranjo (2006) que consiste en un modelo multifactorial no estacionario basado en la representación canónica $A_0(N)$ desarrollada por Dai y Singleton (2000) para tasas de interés.

En este modelo, el proceso para el precio spot del commodity puede ser descrito como:

$$\log S_t = \mathbf{1}'\mathbf{x}_t + \mu t \quad (4.1)$$

Donde \mathbf{x}_t es un vector de variables de estado de dimensión $n \times 1$ y μ , la tasa de crecimiento de largo plazo constante. El vector de variables de estado \mathbf{x}_t sigue el proceso dado por:

$$d\mathbf{x}_t = -\mathbf{K}\mathbf{x}_t dt + \mathbf{\Sigma}d\mathbf{w}_t \quad (4.2)$$

$$\text{Donde } \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \kappa_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \kappa_n \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix} \text{ son matrices diagonales de}$$

dimensión $n \times n$ con valores constantes y positivos. También, $d\mathbf{w}_t$ es un vector de incrementos brownianos de dimensión $n \times 1$ tales que $(d\mathbf{w}_t)'(d\mathbf{w}_t) = \mathbf{\Omega}dt$, donde el (i, j) elemento de $\mathbf{\Omega}$ es $\rho_{ij} \in [-1, 1]$, el coeficiente de correlación instantánea entre las variables de estado i y j .

Esta especificación del modelo hace que éste sea no estacionario, luego, cualquier perturbación en la primera variable de estado del precio spot es permanente.

El proceso ajustado por riesgo del modelo planteado es el siguiente:

$$d\mathbf{x}_t = (-\mathbf{K}\mathbf{x}_t - \boldsymbol{\lambda})dt + \mathbf{\Sigma}d\mathbf{w}_t \quad (4.3)$$

El precio de un contrato futuro en t con vencimiento en T , se define como el valor esperado del precio spot bajo la medida ajustada por riesgo (Harrison & Kreps, 1979; Harrison & Pliska, 1981; Cox, Ingersoll & Ross, 1981). Luego:

$$F(\mathbf{x}_t, t, T) = E_t^Q(S_T) \quad (4.4)$$

A partir de esta definición es posible determinar una expresión para el precio de un contrato futuro¹⁹:

$$F(\mathbf{x}_t, t, T) = \exp \left(x_1(t) + \sum_{i=2}^N e^{-\kappa_i(T-t)} x_i(t) + \mu t + (\mu - \lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2)(T-t) \right. \\ \left. - \sum_{i=2}^N \frac{1 - e^{-\kappa_i(T-t)}}{\kappa_i} \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq 1} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(\kappa_i + \kappa_j)(T-t)}}{\kappa_i + \kappa_j} \right) \quad (4.5)$$

Esta expresión para el precio de un futuro está dada para un número N de factores y cuenta con la ventaja de ser simple y que el logaritmo del precio futuro es una función lineal en las variables de estado $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$, lo que hace que sea posible estimarlas por medio del Filtro de Kalman.

¹⁹ El desarrollo completo para obtener la expresión para el futuro, puede encontrarse en Cortazar y Naranjo (2006)

IV.2 Metodología de Estimación

La metodología utilizada para la estimación de las variables de estado del modelo conjunto corresponde a una adaptación del Filtro de Kalman, el cual fue desarrollado inicialmente por Kalman (1960) para controlar procesos de ingeniería y consiste en una metodología recursiva que calcula estimadores óptimos para variables de estado no observables, utilizando toda la información disponible hasta algún instante de tiempo. Para estimar los parámetros del modelo se utiliza el método de máxima verosimilitud.

En general el Filtro de Kalman se aplica principalmente a paneles de datos completos, aunque también es posible su aplicación para paneles de datos incompletos, con el fin de utilizar toda la información (Sørensen, 2002; Cortazar, Schwartz & Naranjo, 2003; Cortazar & Naranjo, 2006).

La aplicación del Filtro de Kalman es posible para modelos dinámicos multifactoriales que puedan ser representados en el espacio de estados, el que queda definido por medio de ecuaciones de medida y de transición. Para cada instante del tiempo la ecuación de medida relaciona un vector de variables observables \mathbf{z}_t con un vector de variables no observables llamadas variables de estado, \mathbf{x}_t :

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{d}_t + \mathbf{v}_t \quad \mathbf{v}_t \sim N(0, \mathbf{R}_t) \quad (4.6)$$

Donde \mathbf{z}_t es un vector de dimensión $m \times 1$, \mathbf{H}_t es una matriz de $m \times n$, \mathbf{d}_t es un vector de $m \times 1$ y \mathbf{v}_t es un vector de errores Gaussianos no correlacionados entre si, con media cero y matriz de varianza-covarianza \mathbf{R}_t . Este último término permite la incorporación de errores de medición en los datos observados.

La ecuación de transición describe la dinámica de las variables de estado:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_t \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{c}_t + \mathbf{w}_t \quad \mathbf{w}_t \sim N(0, \mathbf{Q}_t) \quad (4.7)$$

Donde \mathbf{A}_t es una matriz de dimensión $n \times n$, \mathbf{c}_t un vector de dimensión $n \times 1$ y \mathbf{w}_t es un vector de errores Gaussianos no correlacionados entre si, con media cero y matriz de varianza-covarianza \mathbf{Q}_t .

El Filtro de Kalman es un proceso iterativo que entrega estimadores óptimos de las variables de estado, $\hat{\mathbf{x}}_t$, dada toda la información hasta el instante t . Este proceso se puede dividir en dos etapas, la primera corresponde a la etapa de predicción, y la segunda a la etapa de actualización.

Sea \mathbf{P}_t la matriz de varianza-covarianza de los errores de estimación:

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{E}(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)' \quad (4.8)$$

Luego, dados $\hat{\mathbf{x}}_{t-1}$ y \mathbf{P}_{t-1} , los que incluyen toda la información hasta el instante $t-1$, el estimador de las variables de estado y de la matriz de varianza-covarianza de los errores de estimación en el momento t están dados por:

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} = \mathbf{A}_t \hat{\mathbf{x}}_{t-1} + \mathbf{c}_t \quad (4.9)$$

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{A}_t \mathbf{P}_{t-1} \mathbf{A}_t' + \mathbf{Q}_t \quad (4.10)$$

Estas ecuaciones corresponden a la etapa de predicción.

La predicción del vector variables de estado permite realizar una predicción sobre las variables observadas:

$$\hat{\mathbf{z}}_{t|t-1} = \mathbf{H}_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{d}_t \quad (4.11)$$

Cuando hay nueva información (\mathbf{z}_t), se incorpora para obtener una mejor estimación de las variables de estado y de la matriz de varianza-covarianza de los errores:

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{H}_t' \mathbf{F}_t^{-1} (\mathbf{z}_t - \hat{\mathbf{z}}_{t|t-1}) \quad (4.12)$$

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{P}_{t|t-1} - \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{H}_t' \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{H}_t \mathbf{P}_{t|t-1} \quad (4.13)$$

Con

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{P}_{t/t-1} \mathbf{H}_t' + \mathbf{R}_t \quad (4.14)$$

La ecuación 4.14 muestra la varianza de la predicción de las innovaciones. Las ecuaciones 4.12 y 4.13 corresponden a la etapa de actualización.²⁰ Esta etapa corresponde al cálculo de la esperanza condicional de las variables de estado (\mathbf{x}_t) dado la historia de observaciones $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{t-1}$ y la nueva información disponible \mathbf{z}_t .

Para el uso de paneles de datos incompletos, la dimensión de las filas, m , de los vectores \mathbf{z}_t , \mathbf{d}_t y \mathbf{v}_t , y de las matrices \mathbf{H}_t y \mathbf{R}_t , que en la forma tradicional del filtro es constante pasa a ser ahora una variable del tipo m_t , y corresponde al número de observaciones de las que se dispone en t . La etapa de estimación permanece inalterada.

En este caso el filtro es utilizado para la estimación de las variables de estado del modelo. La estimación de los parámetros ($\hat{\boldsymbol{\psi}}$) se realiza mediante el método de máxima verosimilitud. Este método consiste en la maximización del logaritmo de la función de verosimilitud de las innovaciones:

$$\log L(\boldsymbol{\psi}) = -\frac{1}{2} \sum_t \log |\mathbf{F}_t| - \frac{1}{2} \sum_t (\mathbf{z}_t - \mathbf{z}_t^-)' \mathbf{F}_t^{-1} (\mathbf{z}_t - \mathbf{z}_t^-) \quad (4.15)$$

Bajo ciertas condiciones de regularidad, se tiene que $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ distribuye asintóticamente normal con media $\boldsymbol{\psi}$ (parámetros verdaderos) y varianza dada por $\mathbf{I}(\boldsymbol{\psi})^{-1}$, con²¹:

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\psi}) = \frac{\partial^2 \log L(\boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\psi} \partial \boldsymbol{\psi}'} \quad (4.16)$$

Dado que no hay una expresión analítica para la matriz de información ($\mathbf{I}(\boldsymbol{\psi})$), las segundas derivadas deben ser calculadas de forma numérica. La evaluación de la matriz de información entrega detalles adicionales sobre la identificación de los parámetros.

²⁰ Ver Harvey (1989).

²¹ La diagonal de esta matriz contiene las varianzas de los errores de estimación.

IV.2.1 Estimación Conjunta de Variables de Estado mediante la utilización del Filtro de Kalman

La metodología tradicional del Filtro de Kalman utiliza la ecuación de medida para relacionar datos observables con variables no observables llamadas variables de estado. Como fue mostrado en la sección anterior la ecuación de medida es:

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{d}_t + \mathbf{v}_t \quad \mathbf{v}_t \sim N(0, \mathbf{R}_t) \quad (4.17)$$

Para la estimación de un modelo multifactorial para 1 commodity, los términos de la ecuación de medida son (Cortazar & Naranjo, 2006):

$$\mathbf{z}_t = \begin{pmatrix} \log F_{1,t} \\ \vdots \\ \log F_{m_t,t} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{H}_t = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\kappa_2 \tau_{1,t}} & \dots & e^{-\kappa_n \tau_{1,t}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-\kappa_2 \tau_{m_t,t}} & \dots & e^{-\kappa_n \tau_{m_t,t}} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

$$\mathbf{d}_t = \begin{pmatrix} v_{1,t} \\ \vdots \\ v_{m_t,t} \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Donde

$$v_{i,t} = \mu t + (\mu - \lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2) \tau_{k,t} - \sum_{i=2}^N \frac{1 - e^{-\kappa_i \tau_{k,t}}}{\kappa_i} \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq 1} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(\kappa_i + \kappa_j) \tau_{k,t}}}{\kappa_i + \kappa_j} \quad (4.21)$$

Para la estimación conjunta, si bien, a partir de los datos de ambos commodities se estima un solo conjunto de parámetros y variables de estado, no se modelan las dinámicas de los precios de los dos commodities con todos los parámetros y factores

estimados, se le asigna a cada uno un número de factores específico. En este caso, para modelar los precios de WTI se utilizó un factor menos que para el Brent. Es decir, para el WTI se utilizaron N-1 factores y para el Brent se utilizaron los mismos N-1 factores anteriores más un factor que puede ser interpretado como un spread por sobre (o bajo) el WTI. Esto se hizo para que los precios del Brent puedan ser interpretados como equivalentes a los precios del WTI más (o menos) un spread y de esta forma obtener una curva de spreads a partir de la dinámica conjunta de ambos commodities.

De acuerdo al número de factores relevantes encontrado en el análisis de componentes principales presentado, se estimaron conjuntamente dos modelos multifactoriales para el WTI y Brent. El primero (Modelo 1) es un modelo de 3 factores y el segundo (Modelo 2) corresponde a un modelo de 4 factores. En el caso del Modelo 1, se utilizaron dos factores para los precios de WTI y tres factores para el Brent²². En el caso del Modelo 2, se utilizaron tres factores para los precios de WTI y cuatro para el Brent²³. A continuación se presenta una tabla resumen con el número de factores totales estimados conjuntamente para cada modelo y de éstos, el número de factores utilizados para cada commodity.

²² Los mismos 2 factores del WTI más un factor adicional que afecta solo al Brent.

²³ Los mismos 3 factores del WTI más un factor adicional que afecta solo al Brent.

Tabla IV-4: Número de factores estimados y utilizados para WTI y Brent para cada uno de los modelos estimados conjuntamente. El Modelo 1 es de 3 factores y el Modelo 2 es de 4 factores.

		WTI	Brent
Modelo 1	Nº de Factores Totales Estimados	3	
	Nº de Factores Utilizados	2	3
Modelo 2	Nº de Factores Totales Estimados	4	
	Nº de Factores Utilizados	3	4

Para poder estimar dos commodities de manera conjunta es necesario modificar la ecuación de medida de tal manera que los valores de la matriz H_t y la dimensión y valores del vector $v_{i,t}$ sean los que correspondan a las observaciones del commodity presentes en el vector z_t . A continuación se presentan los términos en la ecuación de medida que permiten la estimación conjunta²⁴.

$$z_t = \begin{pmatrix} \log F^{Com1}_{1,t} \\ \vdots \\ \log F^{Com1}_{m_1,t} \\ \log F^{Com2}_{m_1+1,t} \\ \vdots \\ \log F^{Com2}_{m_1+m_2,t} \end{pmatrix}$$

con

$$m_t = m_1 + m_2$$

(4.22)

²⁴ El término m_t de la ecuación 4.21 es equivalente al término de la ecuación 4.17 y corresponde al número de datos en t .

$$\mathbf{H}_t = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\kappa_2 \tau_{1,t}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-\kappa_2 \tau_{m_1,t}} & \dots & 0 \\ 1 & e^{-\kappa_2 \tau_{m_1+1,t}} & \dots & e^{-\kappa_n \tau_{m_1+1,t}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-\kappa_2 \tau_{m_1+m_2,t}} & \dots & e^{-\kappa_n \tau_{m_1+m_2,t}} \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{d}_t = \begin{pmatrix} v^{Com1}_{1,t} \\ \vdots \\ v^{Com1}_{m_1,t} \\ v^{Com2}_{m_1+1,t} \\ \vdots \\ v^{Com2}_{m_1+m_2,t} \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Donde para el commodity 1:

$$v^{Com1}_{i,t} = \mu t + (\mu - \lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2) \tau_{k,t} - \sum_{i=2}^{N_1} \frac{1 - e^{-\kappa_i \tau_{k,t}}}{\kappa_i} \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \neq (1,1)}^{N_1} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(\kappa_i + \kappa_j) \tau_{k,t}}}{\kappa_i + \kappa_j} \quad (4.25)$$

Para el commodity 2:

$$v^{Com2}_{i,t} = \mu t + (\mu - \lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2) \tau_{k,t} - \sum_{i=2}^{N_2} \frac{1 - e^{-\kappa_i \tau_{k,t}}}{\kappa_i} \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \neq (1,1)}^{N_2} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(\kappa_i + \kappa_j) \tau_{k,t}}}{\kappa_i + \kappa_j} \quad (4.26)$$

Donde N_1 y N_2 representan el número de factores utilizados para el commodity 1 y para el commodity 2 respectivamente. El resto de las ecuaciones del Filtro de Kalman no son modificadas.

IV.3 Estructura de Spreads

Uno de los objetivos de esta investigación consiste en la determinación de una curva spreads que entregue la diferencia por plazos existente entre los dos tipos de crudos de petróleo estudiados.

Los modelos fueron planteados considerando que el Brent presentaba un factor más que el WTI, y que el resto de los factores eran comunes para ambos. Esta especificación permite expresar el precio del Brent como igual al precio del WTI más un spread.

Precio Brent = Precio WTI + Spread

La determinación del spread surge de las expresiones utilizadas para valorizar los contratos futuros a partir de un modelo multifactorial estimado. La expresión para los contratos futuros de WTI y Brent son las siguientes:

$$F_{BRENT}(\mathbf{x}_t, t, T) = \exp \left(x_1(t) + \sum_{i=2}^N e^{-\kappa_i(T-t)} x_i(t) + \mu t + (\mu - \lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2)(T-t) - \sum_{i=2}^N \frac{1 - e^{-\kappa_i(T-t)}}{\kappa_i} \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \neq (1,1)}^N \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \frac{1 - e^{-(\kappa_i + \kappa_j)(T-t)}}{\kappa_i + \kappa_j} \right) \quad (4.27)$$

Con N: Max(N₁, N₂) (i.e. N° de factores de Brent).

Luego, la estructura de spreads queda:

$$Spread(\mathbf{x}_t, t, T) = F_{WTI} \left(\exp \left(\left(e^{-\kappa_N(T-t)} x_N(t) - \frac{1 - e^{-\kappa_N(T-t)}}{\kappa_N} \lambda_N + \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i \sigma_N \rho_{iN} \frac{1 - e^{-(\kappa_i + \kappa_N)(T-t)}}{\kappa_i + \kappa_N} + \frac{1}{2} \sigma_N \sigma_N \rho_{NN} \frac{1 - e^{-(\kappa_N + \kappa_N)(T-t)}}{\kappa_N + \kappa_N} \right) - 1 \right) \right) \quad (4.28)$$

IV.4 Resultados de estimación conjunta para WTI y Brent

En esta sección se presentan los datos utilizados y se analizan los resultados obtenidos al calibrar los modelos con la metodología presentada en la sección IV.2.1.

En primer lugar se muestra como fueron estructurados los paneles de datos utilizados en las estimaciones. Luego, se presentan los resultados de la estimación de parámetros tanto de manera conjunta como individual, junto con las desviaciones estándar de cada uno de los parámetros estimados.

Para estudiar las ventajas de la estimación conjunta versus la estimación individual en lo que respecta a la extrapolación de precios para contratos con plazos fuera de la muestra en el corte transversal y el aporte de considerar la información contenida en los precios de WTI para modelar los precios del Brent, se eliminan del panel de datos los contratos de Brent para plazos superiores a 3.5 años. Con este panel reducido se estiman las variables de estado de los modelos y se calculan los errores de ajuste para los distintos modelos. En el periodo utilizado en la calibración de los parámetros de los modelos no existían contratos de petróleo Brent con vencimientos superiores a los 3 años.

A continuación se realiza un segundo análisis que tiene por objetivo ver las diferencias en el ajuste de las dinámicas de los precios y volatilidades proporcionada por la estimación conjunta versus la estimación individual. En este caso, se estiman las variables de estado de cada modelo considerando todos los precios de los contratos futuros. Este análisis es llevado a cabo tanto para el panel de datos dentro de la muestra considerada en la estimación de los parámetros (In Sample), como para datos fuera de la muestra (Out of Sample).

IV.4.1 Datos

El petróleo, al igual que el resto de los commodities, presenta distintos tipos y calidades. Pero además, cuenta con la particularidad de que los distintos tipos de crudo, se transan

de forma independiente y sirven como subyacentes para contratos específicos para cada uno. En los mercados financieros se transan una serie de contratos futuros, relacionados con los precios de distintos crudos.

Los *marcadores de crudo* son tipos de petróleo estándar que entregan precios de referencia para distintas regiones del mundo dependiendo de donde se producen y del área de influencia del mercado donde se transa el contrato. El principal criterio para ser un marcador de crudo es ser vendido en volúmenes suficientes para entregar liquidez en el mercado físico, así como tener una calidad física similar a la de crudos de petróleo alternativos. Los principales marcadores de crudo en el mundo son el WTI²⁵, que es transado en NYMEX (New York Mercantile Exchange), y el Brent, que es transado principalmente en IPE (International Petroleum Exchange, ubicada en Londres), aunque éste último también es transado en Estados Unidos (NYMEX), esto se hace para entregar una mayor liquidez al mercado, no contemplando la entrega física del commodity.

La diferencia existente entre los precios de ambos commodities esta dada por factores tales como calidad, ubicación geográfica y condiciones de oferta y demanda. Milonas y Henker (2001) presentan un estudio acerca del comportamiento de los precios WTI y Brent e identifican una serie de factores que afectan el diferencial de precios de ambos tipos de crudo.

Los datos utilizados corresponden a observaciones diarias de precios de cierre de contratos futuros de crudos de petróleo WTI y Brent. Los contratos futuros de petróleo WTI utilizados para calibrar los modelos de precios corresponden a futuros transados en NYMEX. Actualmente se transa un máximo de 36 contratos para distintos vencimientos, que van desde 1 mes hasta 7 años. Por otro lado, los contratos de futuros de petróleo Brent, corresponden a los futuros transados en IPE. Actualmente se transa un máximo de 39 contratos para distintos vencimientos, que van desde 1 mes hasta 7 años. Es importante destacar el hecho que hasta Febrero de 2005 sólo eran transados contratos de

²⁵ Es la sigla de West Texas Intermediate.

Brent para vencimientos no superiores a los 3 años, esto será utilizado para estudiar la capacidad de extrapolación de datos presente en la estimación conjunta versus la estimación individual.

El periodo de tiempo utilizado va entre Octubre de 2001 y Junio de 2005. Este periodo fue dividido en dos, con el fin de considerar un panel de datos dentro de la muestra (In-Sample) utilizada en la estimación de los parámetros de los modelos y un panel de datos fuera de muestra (Out-of-Sample). El periodo entre Octubre de 2001 y Diciembre de 2004 fue considerado para la estimación de parámetros (In-Sample). En este periodo los contratos de WTI presentan plazos que van desde 1 mes a 7 años. En el caso del Brent, en el periodo de estimación, los contratos de este crudo presentan plazos que van desde 1 mes a 3 años.

En el caso del periodo considerado Out-of-Sample, los contratos de WTI mantienen sus plazos, en cambio los contratos de Brent, comienzan a ser transados, como ya fue mencionado, con plazos de hasta 7 años. En la tabla IV-5 se presentan los plazos de los contratos considerados para los paneles dentro de la muestra y fuera de ella para el WTI y en la tabla IV-6 se presentan los plazos de los contratos considerados para los paneles dentro de la muestra y fuera de ella para el Brent. La tabla IV-7 muestra el número máximo de contratos existentes para cada commodity en los periodos dentro y fuera de muestra para la serie temporal.

Tabla IV-5: Rango de plazos de Petróleo WTI utilizados para los paneles dentro y fuera de la muestra en el corte transversal y en la serie de tiempo.

		Corte Transversal	
		In Sample	Out of Sample
Serie de Tiempo	In Sample Oct. 2001 - Dic. 2004	1 mes - 7 años	-
	Out of Sample Ene. 2005 - Jun. 2005	1 mes - 7 años	-

Tabla IV-6: Rango de plazos de Petróleo Brent utilizados para los paneles dentro y fuera de la muestra en el corte transversal y en la serie de tiempo.

		Corte Transversal	
		In Sample	Out of Sample
Serie de Tiempo	In Sample Oct. 2001 - Dic. 2004	1 mes - 3 años	-
	Out of Sample Ene. 2005 - Jun. 2005	1 mes - 3 años	3 - 7 años

Tabla IV-7: Número Máximo de Contratos para un día, utilizados en las estimaciones dentro y fuera de muestra para WTI y Brent.

	WTI	Brent
Nº Máximo de Contratos para un día. In-Sample	32	19
Nº Máximo de Contratos para un día. Out-of-Sample	32	39

IV.4.2 Resultados de la Estimación de Parámetros

En esta sección se presentan las estimaciones conjuntas e individuales de parámetros realizadas para los modelos. El primer modelo estimado conjuntamente, corresponde a un modelo de 3 factores, donde los 3 factores son utilizados para el Brent y sólo 2 factores para el WTI (Modelo 1, Sección 4.2.1). El segundo, corresponde a un modelo de 4 factores, donde 4 factores son para el Brent y 3 para el WTI (Modelo 2, Sección 4.2.1). Los parámetros estimados y las desviaciones estándar de éstos se presentan en la tabla IV-8. A partir de las desviaciones encontradas se aprecia que la mayor parte de los parámetros estimados son significativos, sólo algunos lambda son poco significativos.

La tabla IV-9 presenta los parámetros estimados individualmente para modelos de 2 y 3 factores para el WTI y modelos de 3 y 4 factores para el Brent.

Aquí es posible apreciar la ventaja de utilizar la estimación conjunta, dado que se obtiene la dinámica de precios de dos commodities con un menor número de parámetros y variables de estado, es decir, se consigue un modelo más parsimonioso para ajustar la dinámica conjunta de ambos commodities. Es así como, por ejemplo, en el caso del modelo conjunto que asigna 4 factores al Brent y 3 factores al WTI, el número de parámetros estimados es de 20 y en total se estiman 4 variables de estado. En el caso de estimar de forma individual un modelo de 4 factores para el Brent y de 3 factores para el WTI el número total de parámetros estimados sería de 33 (20 para el Brent y 13 para el WTI) y en total se estimarían 7 variables de estado.

Tabla IV-8: Parámetros estimados para el modelo conjunto de 3 factores para WTI y 4 factores de Brent y para el modelo conjunto de 2 factores para el WTI y 3 factores para el Brent. El periodo de estimación va desde Octubre 2001 a Diciembre 2004. La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.

	3-4 Factores	2-3 Factores
k_1	-	-
k_2	0,384 (0,005)	1,061 (0,002)
k_3	0,911 (0,002)	3,055 (0,002)
k_4	0,435 (0,001)	-
σ_1	0,196 (0,000)	0,187 (0,000)
σ_2	0,178 (0,003)	0,356 (0,004)
σ_3	0,336 (0,003)	0,107 (0,007)
σ_4	0,080 (0,003)	-
ρ_{21}	-0,389 (0,022)	0,240 (0,050)
ρ_{31}	0,370 (0,020)	0,097 (0,006)
ρ_{32}	-0,589 (0,017)	-0,261 (0,004)
ρ_{41}	-0,192 (0,004)	-
ρ_{42}	0,180 (0,007)	-
ρ_{43}	-0,087 (0,006)	-
μ	0,002 (0,000)	-0,0003 (0,000)
λ_1	0,022 (0,000)	0,021 (0,000)
λ_2	0,046 (0,058)	0,033 (0,151)
λ_3	-0,003 (0,138)	0,150 (0,000)
λ_4	0,017 (0,000)	-
ε_1	0,005 (0,000)	0,016 (0,000)
ε_2	0,008 (0,000)	0,007 (0,000)
log L	182458	156790

Tabla IV-9: Parámetros estimados individualmente para modelos de 3 y 4 factores para el Brent y 3 y 2 factores para el WTI. El periodo de estimación va desde Octubre 2001 a Diciembre 2004. . La desviación estándar del error se presenta entre paréntesis.

	BRENT		WTI	
	4 Factores	3 Factores	3 Factores	2 Factores
k_1	-	-	-	-
k_2	0,460 (0,006)	0,278 (0,002)	0,318 (0,001)	1,061 (0,002)
k_3	0,697 (0,005)	0,899 (0,007)	1,106 (0,001)	-
k_4	6,951 (0,094)	-	-	-
σ_1	0,252 (0,003)	0,349 (0,004)	0,424 (0,000)	0,158 (0,000)
σ_2	0,885 (0,007)	0,611 (0,004)	0,688 (0,001)	0,408 (0,004)
σ_3	1,000 (0,006)	1,000 (0,002)	0,977 (0,002)	-
σ_4	0,121 (0,005)	-	-	-
ρ_{21}	-0,567 (0,003)	-0,822 (0,012)	-0,902 (0,006)	0,385 (0,053)
ρ_{31}	0,525 (0,003)	0,726 (0,027)	0,892 (0,006)	-
ρ_{32}	-0,965 (0,002)	-0,862 (0,009)	-0,948 (0,002)	-
ρ_{41}	-0,055 (0,011)	-	-	-
ρ_{42}	0,275 (0,025)	-	-	-
ρ_{43}	-0,310 (0,023)	-	-	-
μ	2,4E-05 (0,001)	0,001 (0,001)	0,001 (0,000)	0,018 (0,000)
λ_1	0,051 (0,001)	0,115 (0,001)	0,079 (0,000)	0,034 (0,000)
λ_2	-0,068 (0,359)	0,011 (0,145)	0,054 (0,137)	0,094 (0,173)
λ_3	0,213 (0,450)	0,011 (0,332)	0,137 (0,229)	-
λ_4	-0,179 (0,080)	-	-	-
ε	0,003 (0,000)	0,004 (0,000)	0,005 (0,000)	0,014 (0,000)
log L	71267	66660	123560	98526

IV.4.3 Ajuste de los Modelos a los Precios Observados fuera de la muestra utilizando el panel de precios de futuros para el Brent sin datos de largo plazo

Esta sección tiene por objetivo analizar la capacidad de extrapolación de precios de los contratos futuros por parte de la estimación conjunta. Para esto, no se consideran en la estimación de las variables de estado, los precios de los contratos de largo plazo para el Brent. Se escogió este commodity porque sólo a partir del Febrero de 2005 se comenzaron a transar contratos para plazos superiores a 3 años. Los datos eliminados corresponden a los precios de los 7 últimos contratos transados para cada día y que presentan vencimientos superiores a los 3.5 años.

Para cuantificar el ajuste de los distintos modelos a los datos observados, se calcularon 3 medidas de error distintas. La primera de ellas es el RMSE (Root Mean Square Error), que representa la raíz cuadrada del error cuadrático medio entre el valor teórico y el valor observado de los futuros. La segunda medida corresponde al MAE (Mean Absolut Error) que representa es el error absoluto medio entre el valor teórico y el valor observado de los futuros. La tercera medida de error considerada es el ME (Mean Error), que representa el error medio entre el valor teórico y el valor observado de los futuros.

Las figuras 4-1 a 4-4 muestran el ajuste obtenido por los distintos modelos. La tabla IV-10 presenta los errores totales de ajuste de los contratos de Brent con vencimientos menores a 3,5 años. La tabla IV-11 presenta los errores para los contratos de Brent con vencimientos superiores a 3,5 años. Las tablas IV-12 y IV-13 muestran los errores totales para todos los vencimientos fuera de muestra de WTI y Brent respectivamente.

El análisis estará centrado en el Petróleo Brent, dado que precisamente a este commodity se le eliminaron precios y, por lo tanto, cuenta con vencimientos menores a los existentes²⁶. Sin embargo, se muestran los errores obtenidos para los modelos de 2 y 3 factores de WTI, los cuales son similares.

²⁶ Los distintos errores de ajuste son calculados entre el precio entregado por el modelo y el valor del contrato transado, tanto para los contratos utilizados en la estimación de las variables de estado (< 3.5 años) como para los no utilizados (> 3.5 años).

Es posible apreciar que en los contratos con vencimiento inferior a 3,5 años, los errores de los modelos calibrados de manera individual son inferiores a los de los modelos calibrados de manera conjunta. Para los contratos de largo plazo (>3.5 años), el error que presentan ambos tipos de procedimientos de estimación (conjunta e individual) es mucho mayor. En el caso de la estimación conjunta el RMSE para el modelo de 4 factores de Brent es de 1.44% y en el caso de la estimación individual, el RMSE es de 2.59%. Para los modelos de tres factores estimados para el Brent, estos errores de ajuste son mayores. En ambos casos, los errores de la estimación individual duplican a los de la estimación conjunta.

Al comparar los RMSE totales para el panel fuera de la muestra (Out of Sample), se encuentra que el RMSE de 0.74% obtenido por la estimación conjunta es menor al 1.05% obtenido con la estimación individual para el modelo de 4 factores para el Brent. Esta diferencia se mantiene al comparar los RMSE totales del modelo de 3 factores para el Brent. Luego, en los errores totales, la estimación conjunta es superior en términos de ajuste a la estimación individual.

A pesar de que las magnitudes de los errores aumentaron, el error que presenta el modelo estimado conjuntamente es menor que el presentado por el modelo estimado de forma individual. Este último resultado es concluyente respecto de la capacidad de extrapolación presente en la estimación del modelo conjunto versus la estimación individual y confirma la idea de que al estimar conjuntamente dos commodities correlacionados, el que uno de ellos posea precios para vencimientos mayores²⁷, aporta en la extrapolación de los precios del commodity que presenta menores vencimientos. Este último efecto no es capturado con una estimación individual de cada commodity.

²⁷ WTI en este caso.

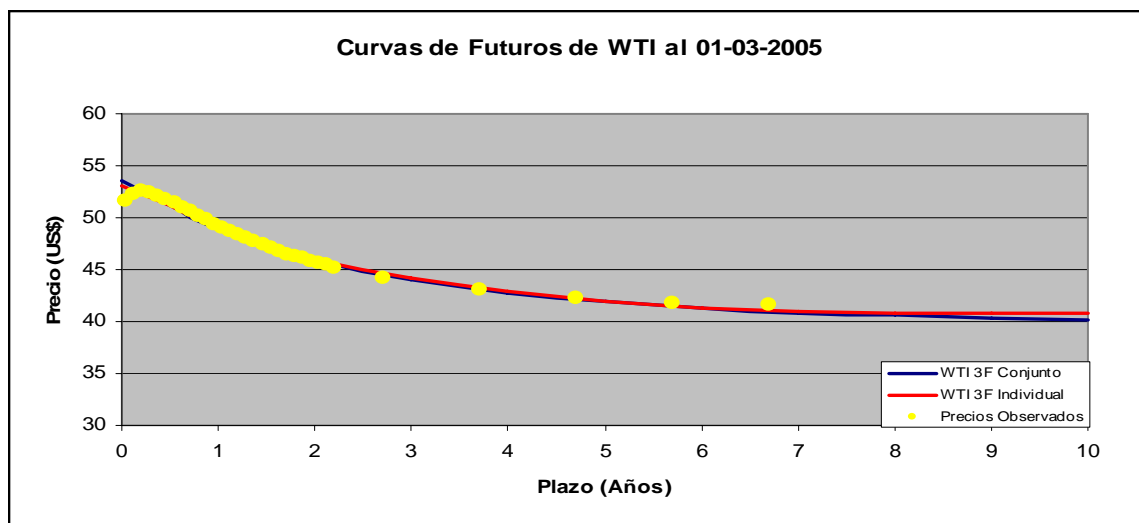


Figura 4-1: Precios observados y curvas teóricas de futuros de 3 factores de WTI. Estimadas conjunta e individualmente para el día 01-03-2005 utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra y no considerando los precios de los contratos de Brent con vencimiento superior a los 3.5 años en la estimación de las variables de estado.

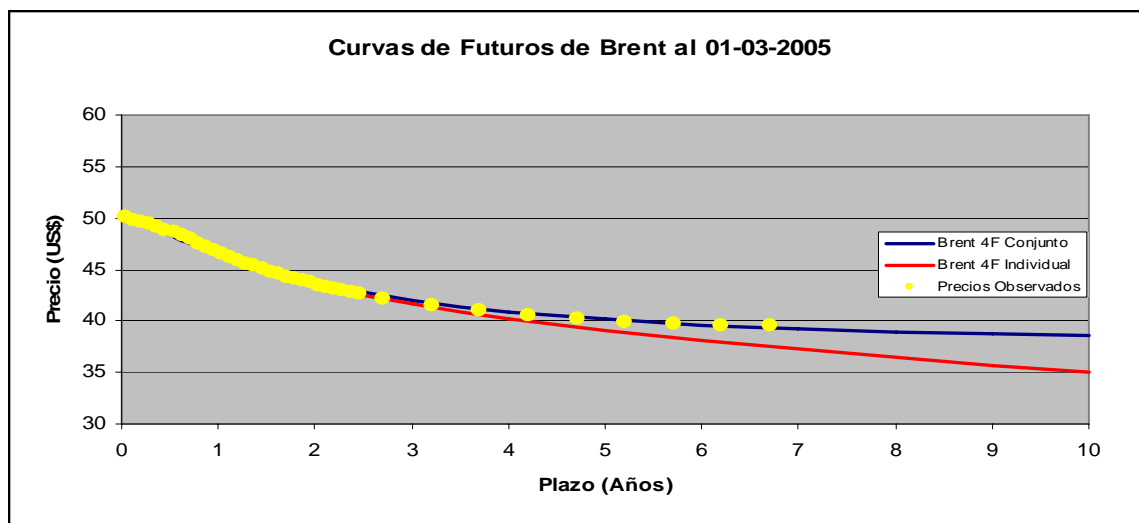


Figura 4-2: Precios observados y curvas teóricas de futuros de 4 factores de Brent. Estimadas conjunta e individualmente para el día 01-03-2005 utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra y no considerando los precios de los contratos de Brent con vencimiento superior a los 3.5 años en la estimación de las variables de estado.

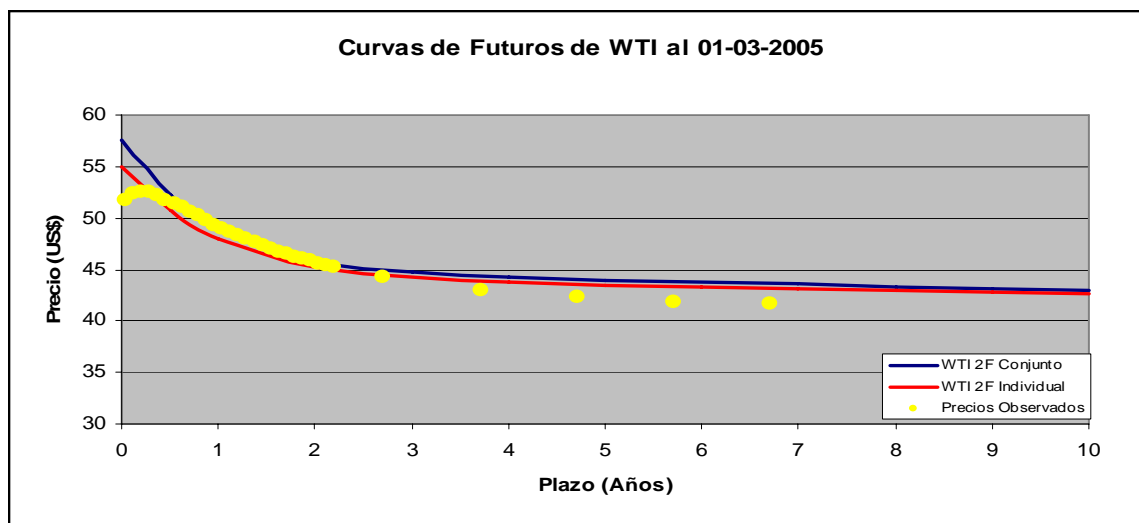


Figura 4-3: Precios observados y curvas teóricas de futuros de 2 factores de WTI. Estimadas conjunta e individualmente para el día 01-03-2005 utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra y no considerando los precios de los contratos de Brent con vencimiento superior a los 3.5 años en la estimación de las variables de estado.

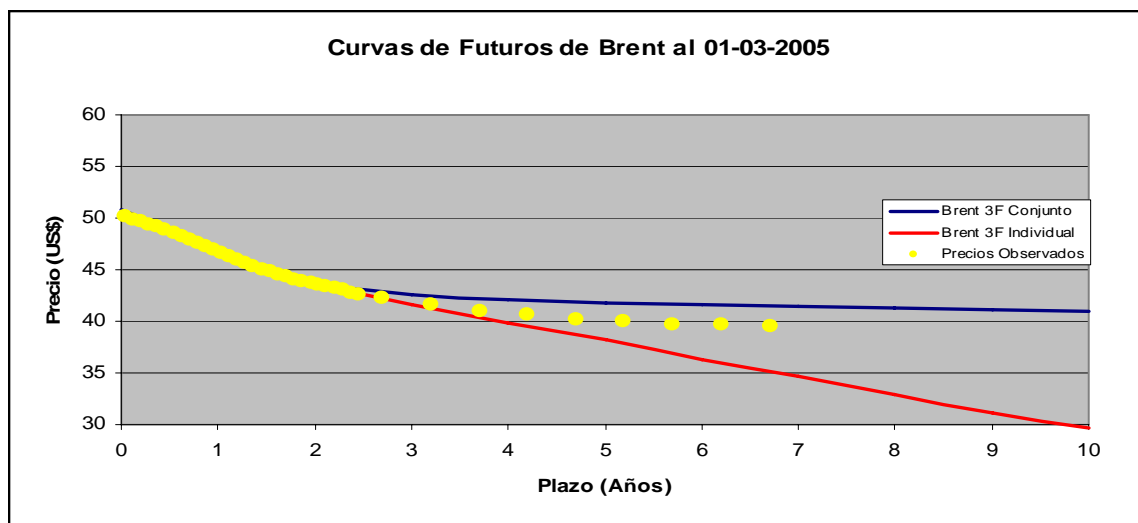


Figura 4-4: Precios observados y curvas teóricas de futuros de 3 factores de Brent. Estimadas conjunta e individualmente para el día 01-03-2005 utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra y no considerando los precios de los contratos de Brent con vencimiento superior a los 3.5 años en la estimación de las variables de estado.

Tabla IV-10: Errores porcentuales de ajuste de Brent para vencimientos inferiores a 3.5 años. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra y no considerando los precios de los contratos de Brent con vencimiento superior a los 3.5 años en la estimación de las variables de estado.

Errores Vencimientos < 3,5	Modelo de 4 Factores de Brent		Modelo de 3 Factores de Brent	
	Estimación Conjunta	Estimación Individual	Estimación Conjunta	Estimación Individual
RMSE	0,50%	0,12%	0,93%	0,28%
MAE	0,38%	0,09%	0,79%	0,19%
ME	-0,02%	0,00%	0,42%	0,01%

Tabla IV-11: Errores porcentuales de ajuste de Brent para vencimientos superiores a 3.5 años. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra y no considerando los precios de los contratos de Brent con vencimiento superior a los 3.5 años en la estimación de las variables de estado.

Errores Vencimientos > 3,5	Modelo de 4 Factores de Brent		Modelo de 3 Factores de Brent	
	Estimación Conjunta	Estimación Individual	Estimación Conjunta	Estimación Individual
RMSE	1,44%	2,59%	3,48%	6,46%
MAE	1,18%	2,19%	3,24%	5,59%
ME	1,08%	2,19%	-3,24%	5,59%

Tabla IV-12: Errores porcentuales totales de ajuste de los modelos de WTI. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra y no considerando los precios de los contratos de Brent con vencimiento superior a los 3.5 años en la estimación de las variables de estado.

Errores Totales	Modelo de 3 Factores de WTI		Modelo de 2 Factores de WTI	
	Estimación Conjunta	Estimación Individual	Estimación Conjunta	Estimación Individual
RMSE	0,69%	0,54%	2,65%	1,93%
MAE	0,47%	0,39%	1,87%	1,54%
ME	0,04%	0,01%	-1,67%	0,19%

Tabla IV-13: Errores porcentuales totales de ajuste de los modelos de Brent. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra y no considerando los precios de los contratos de Brent con vencimiento superior a los 3.5 años en la estimación de las variables de estado.

Errores Totales	Modelo de 4 Factores de Brent		Modelo de 3 Factores de Brent	
	Estimación Conjunta	Estimación Individual	Estimación Conjunta	Estimación Individual
RMSE	0,74%	1,05%	1,64%	2,61%
MAE	0,51%	0,43%	1,19%	1,06%
ME	0,16%	0,35%	-0,17%	0,91%

Las siguientes figuras permiten apreciar como cambian los errores de ajuste de los modelos de 4 factores de Brent, dependiendo de los contratos considerados y como para los contratos no considerados en la estimación de las variables de estado (>3.5 años), los errores del modelo calibrado conjuntamente son menores a los del modelo calibrado de forma individual.

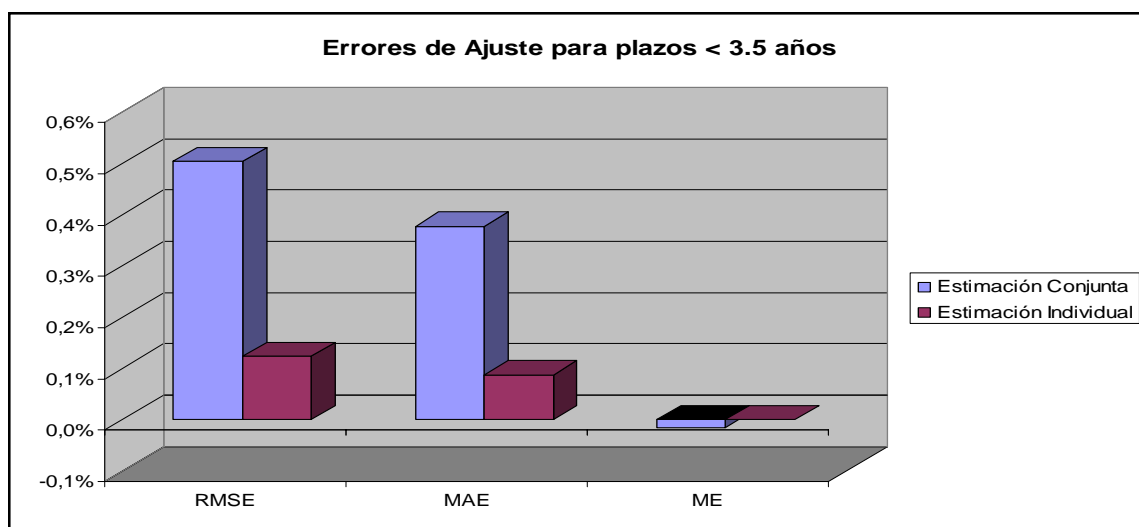


Figura 4-5: Errores de ajuste de contratos futuros de Brent para plazos inferiores a 3.5 años. Para modelos de 4 factores estimados conjunta e individualmente utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra y no considerando los precios de los contratos de Brent con vencimiento inferior a los 3.5 años en la estimación de las variables de estado.

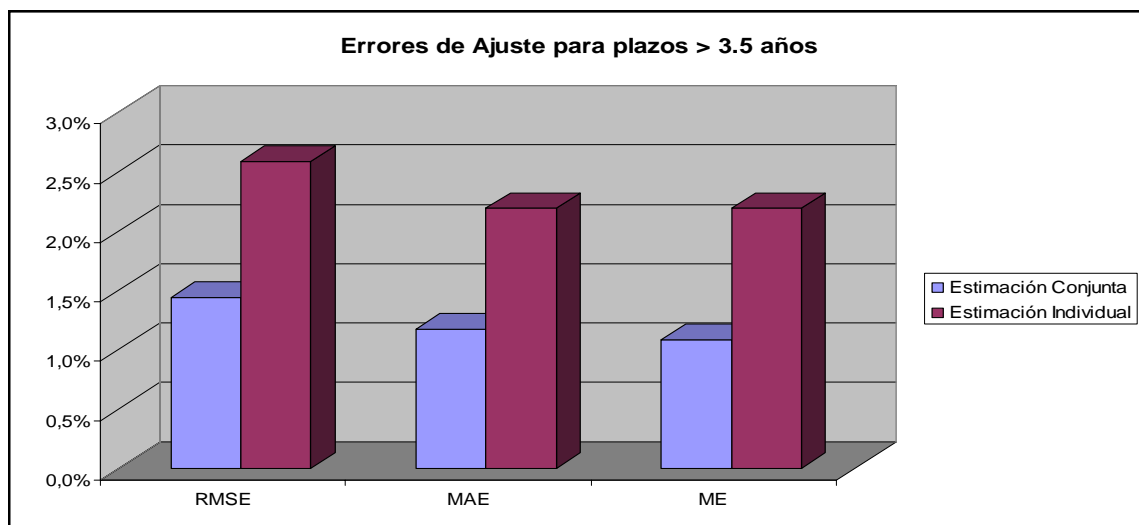


Figura 4-6: Errores de ajuste de contratos futuros de Brent para plazos superiores a 3.5 años. Para modelos de 4 factores estimados conjunta e individualmente utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra y no considerando los precios de los contratos de Brent con vencimiento inferior a los 3.5 años en la estimación de las variables de estado.

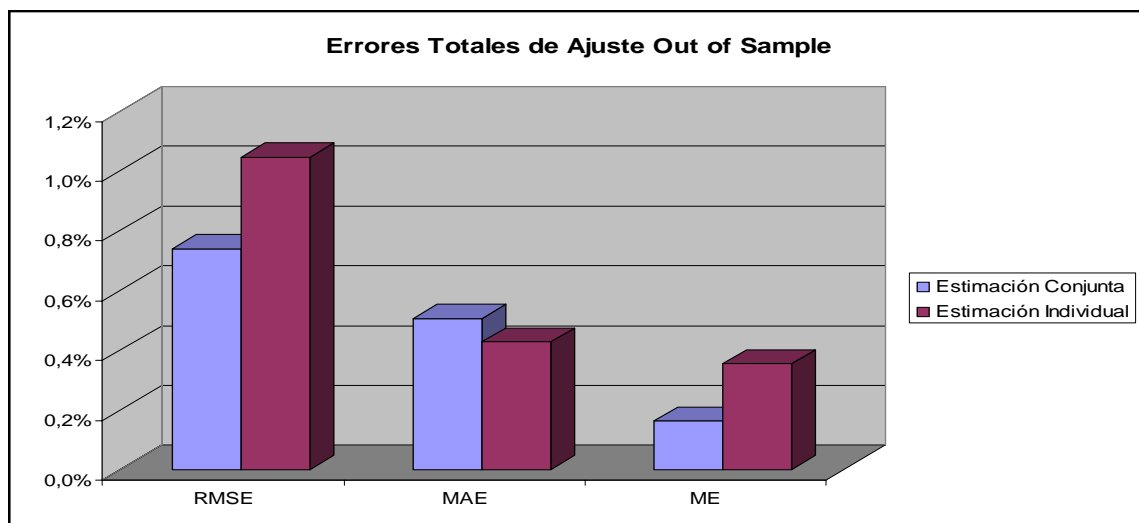


Figura 4-7: Errores de totales ajuste de contratos futuros de Brent para todos los plazos.

Para modelos de 4 factores estimados conjunta e individualmente utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra y no considerando los precios de los contratos de Brent con vencimiento inferior a los 3.5 años en la estimación de las variables de estado.

IV.4.4 Ajuste de los Modelos a los Precios Observados dentro de la muestra utilizando el panel completo de contratos para el Brent

En esta sección se analiza el ajuste de los modelos estimados conjunta e individualmente a los precios observados de futuros de petróleo que fueron utilizados en la calibración de los parámetros. El objetivo es comparar el ajuste de la estimación conjunta versus una estimación individual.

La figura 4-8 muestra el ajuste para el WTI para el día 15 de Diciembre de 2004 del modelo de 3 factores calibrado conjuntamente y el modelo de 3 factores calibrado de manera independiente. La figura 4-9 muestra el ajuste para el Brent para el día 15 de Diciembre de 2004 del modelo de 4 factores calibrado conjuntamente y el modelo de 4 factores calibrado independientemente. La figura 4-10 muestra el ajuste para el WTI del modelo de 2 factores de WTI calibrado conjuntamente y el modelo de 2 factores individual para el mismo día mencionado. La figura 4-11 muestra el ajuste para el Brent de los modelos de 3 factores calibrados conjunta e independientemente.

La tabla IV-14 presenta los errores encontrados por medio de los modelos de 2 y 3 factores estimado conjunta e individualmente para el WTI. En este caso se aprecia que el ajuste proporcionado por la estimación conjunta e individual para este commodity son similares y en torno al 0.5% de RMSE en el caso de los modelos de 3 factores. Para el caso del WTI calibrado utilizando un modelo de 2 factores estimado de manera conjunta e individual, nuevamente que los ajustes son similares pero con errores mayores.

La tabla IV-15 presenta los errores encontrados para los modelos de 3 y 4 factores de Brent estimado conjunta e individualmente. Para este commodity se aprecia que la estimación individual es superior a la estimación conjunta, encontrándose un 0.77% de RMSE en la estimación conjunta del modelo de 4 factores versus un 0.26% de RMSE de la estimación individual. En el caso de los modelos de 3 factores nuevamente la estimación individual presenta errores menores que la estimación conjunta.

En resumen, para ambos modelos se tiene que al utilizar el mismo panel de datos con el cual se estimaron los parámetros (dentro de la muestra) y utilizando todos los contratos en la estimación de las variables de estado, para el caso del WTI ambos procedimientos son equivalentes, en cambio, en el caso del Brent la estimación individual entrega errores menores que la estimación conjunta. Sin embargo, si consideramos el error de ajuste sumado de ambos commodities, tenemos que un modelo de 4 factores (3 para WTI y 4 para Brent) calibrado de manera conjunta, presenta un error menor al encontrado si se suman los errores de dos modelos calibrados de forma individual con un número de factores equivalente (en este caso, un modelo de 5 factores, 2 para WTI y 3 para Brent).

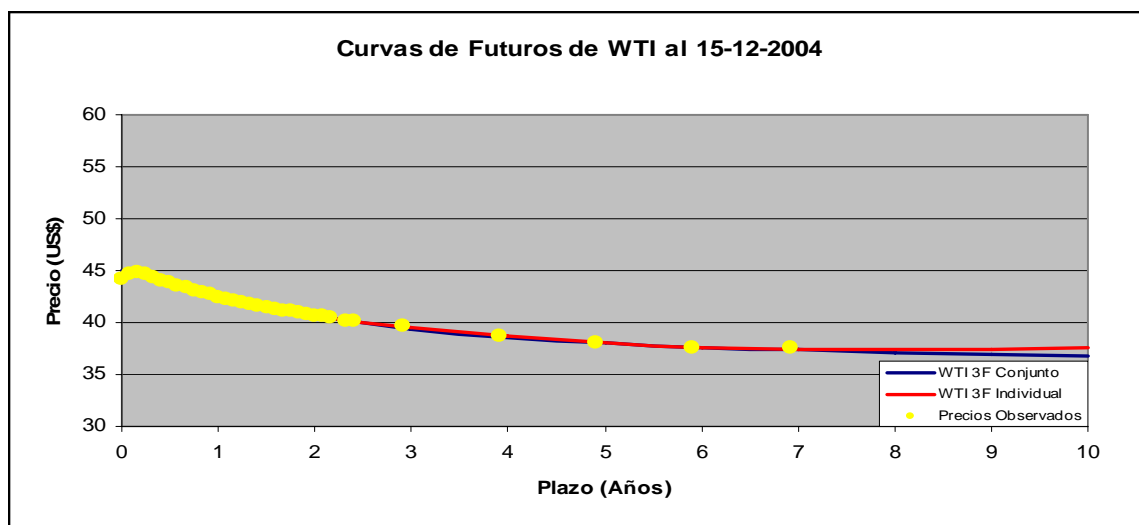


Figura 4-8: Precios observados y curvas teóricas de futuros de 3 factores de WTI. Estimadas conjunta e individualmente para el día 15-12-2004 utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

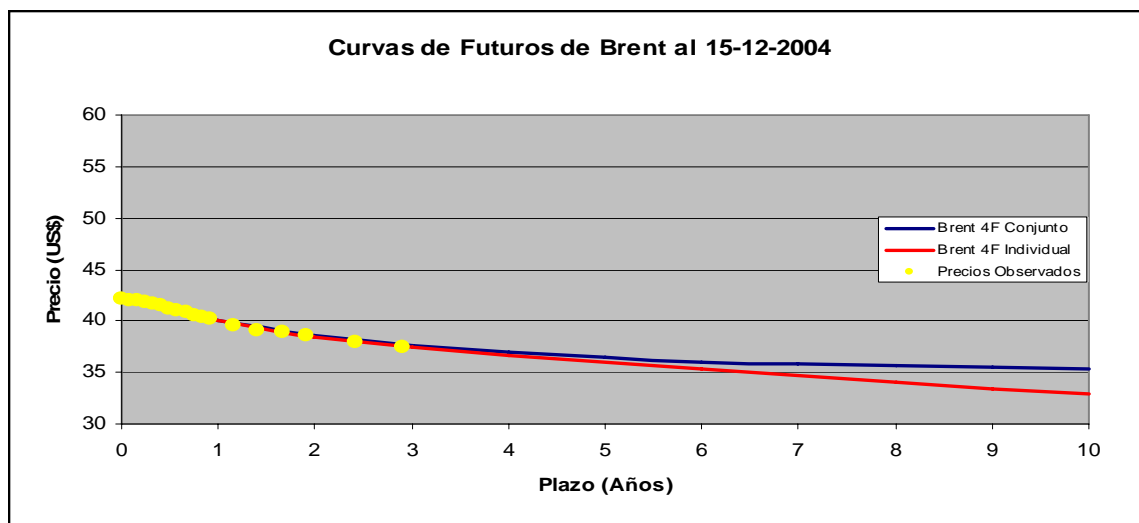


Figura 4-9: Precios observados y curvas teóricas de futuros de 4 factores de Brent. Estimadas conjunta e individualmente para el día 15-12-2004 utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

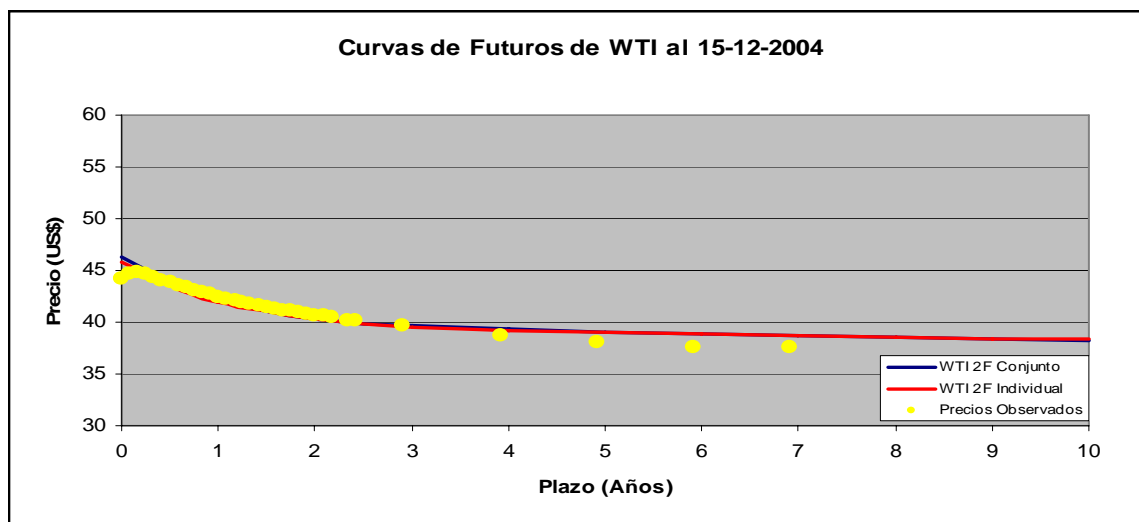


Figura 4-10: Precios observados y curvas teóricas de futuros de 2 factores de WTI. Estimadas conjunta e individualmente para el día 15-12-2004 utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

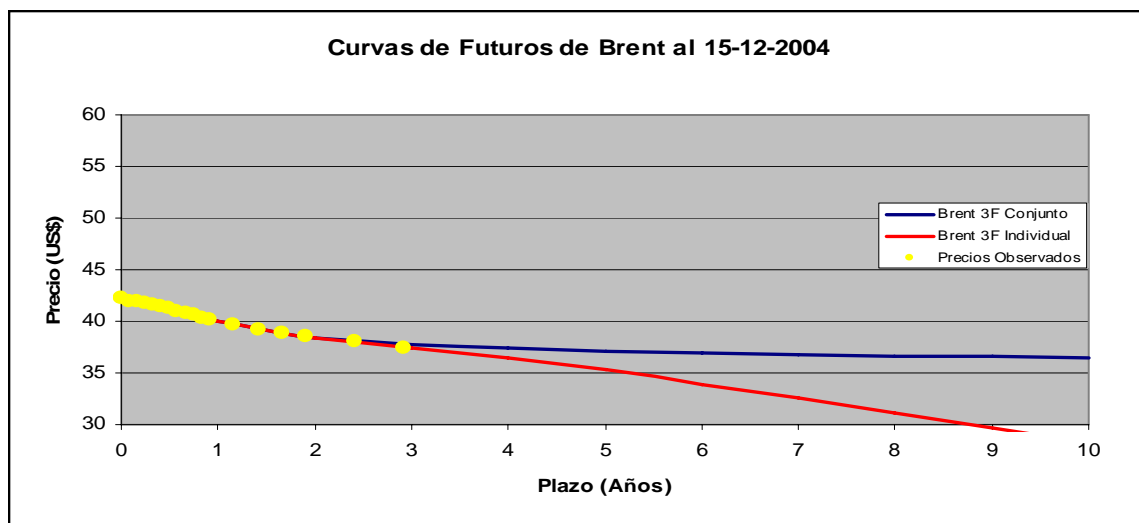


Figura 4-11: Precios observados y curvas teóricas de futuros de 3 factores de Brent. Estimadas conjunta e individualmente para el día 15-12-2004 utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

Tabla IV-14: Errores porcentuales del ajuste de los modelos de 2 y 3 factores para WTI estimados conjunta e individualmente utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

Errores In-Sample	Modelo de 3 Factores de WTI		Modelo de 2 Factores de WTI	
	Estimación Conjunta	Estimación Individual	Estimación Conjunta	Estimación Individual
RMSE	0,53%	0,48%	1,59%	1,46%
MAE	0,37%	0,33%	1,12%	1,00%
ME	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Tabla IV-15: Errores porcentuales del ajuste de los modelos de 3 y 4 factores para Brent estimados conjunta e individualmente utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

Errores In-Sample	Modelo de 4 Factores de Brent		Modelo de 3 Factores de Brent	
	Estimación Conjunta	Estimación Individual	Estimación Conjunta	Estimación Individual
RMSE	0,77%	0,26%	0,64%	0,39%
MAE	0,55%	0,18%	0,49%	0,26%
ME	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Las siguientes figuras muestran los errores de ajuste de los modelos de 3 factores para el WTI y de 4 factores para el Brent calibrados tanto conjunta como individualmente.

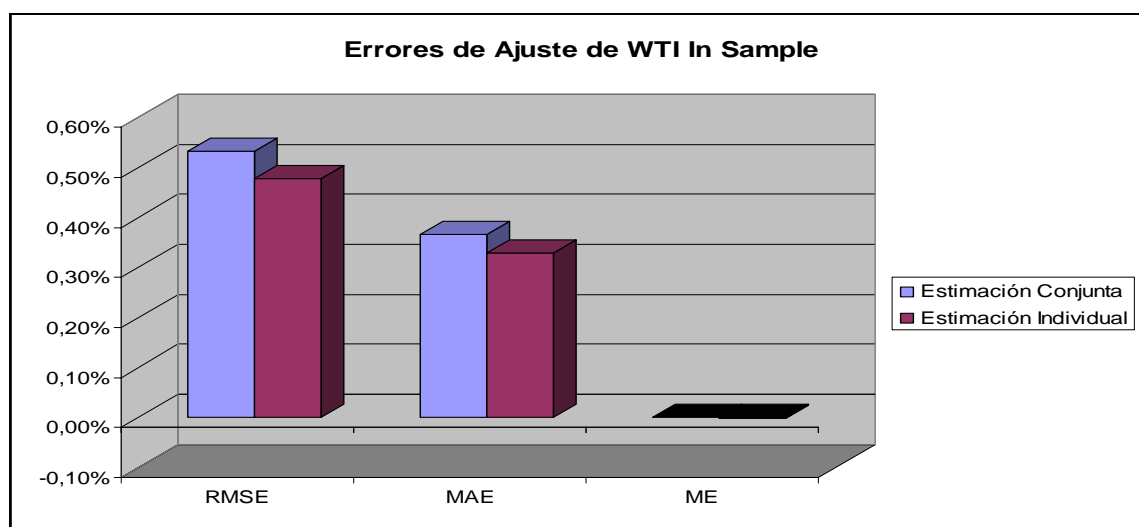


Figura 4-12: Errores de totales ajuste de contratos futuros de WTI para todos los plazos.

Para modelos de 3 factores estimados conjunta e individualmente utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

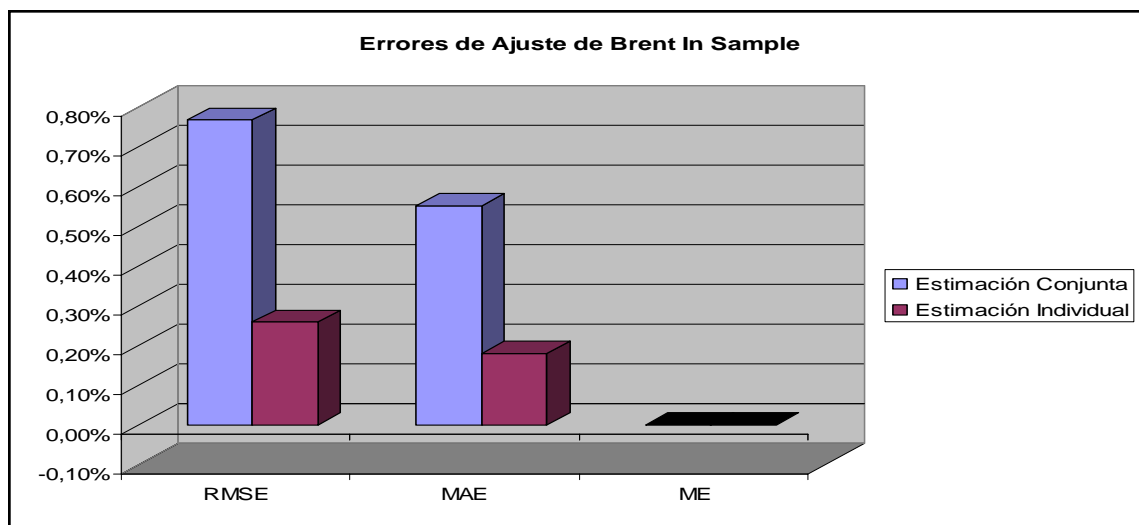


Figura 4-13: Errores de totales ajuste de contratos futuros de Brent para todos los plazos. Para modelos de 4 factores estimados conjunta e individualmente utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

IV.4.5 Ajuste de los Modelos a los Precios Observados fuera de la muestra utilizando el panel completo de contratos para el Brent

En esta sección se analiza el ajuste de los modelos estimados conjunta e individualmente a los precios observados de futuros de petróleo no utilizados en la estimación de los parámetros, es decir, el ajuste fuera de muestra de los modelos.

Al igual que en la sección anterior se presentan cuatro figuras, en las cuales se muestra el ajuste de los modelos calibrados para el día 1 de Marzo de 2005. La figura 4-14 muestra el ajuste para el WTI del modelo de 3 factores calibrado conjuntamente y el modelo de 3 factores calibrado de manera independiente. La figura 4-15 muestra el ajuste para el modelo de 2 factores de WTI calibrado conjunta e independientemente. Las figuras 4-16 y 4-17 muestran el ajuste para el mismo día de los modelos de Brent de 4 y 3 factores respectivamente.

Se calcularon, al igual que en las secciones anteriores, las tres medidas de error descritas. Los errores para el panel de datos fuera de muestra se presentan en las tablas IV-16 y IV-17 para el WTI y el Brent respectivamente.

En este caso, al igual que en la sección anterior, se aprecia que la estimación individual presenta errores menores que la estimación conjunta en la comparación de los commodities por separado, pero si se comparan los errores sumados de ambos commodities para modelos con un número similar de factores, se tiene que el modelo estimado de manera conjunta entrega un menor error total sumado para ambos commodities.

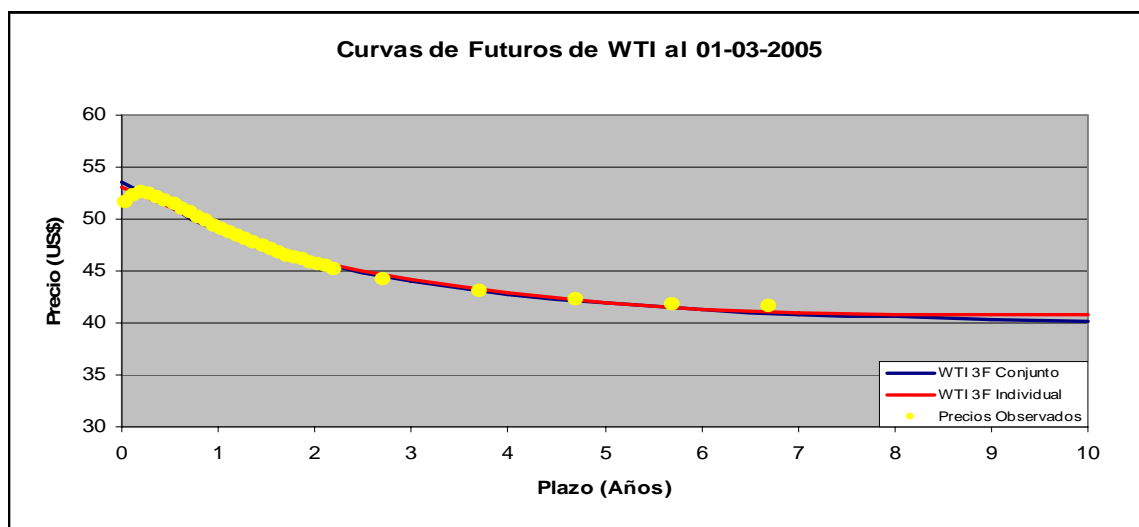


Figura 4-14: Precios observados y curvas teóricas de futuros de 3 factores de WTI. Estimadas conjunta e individualmente para el día 01-03-2005 utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.

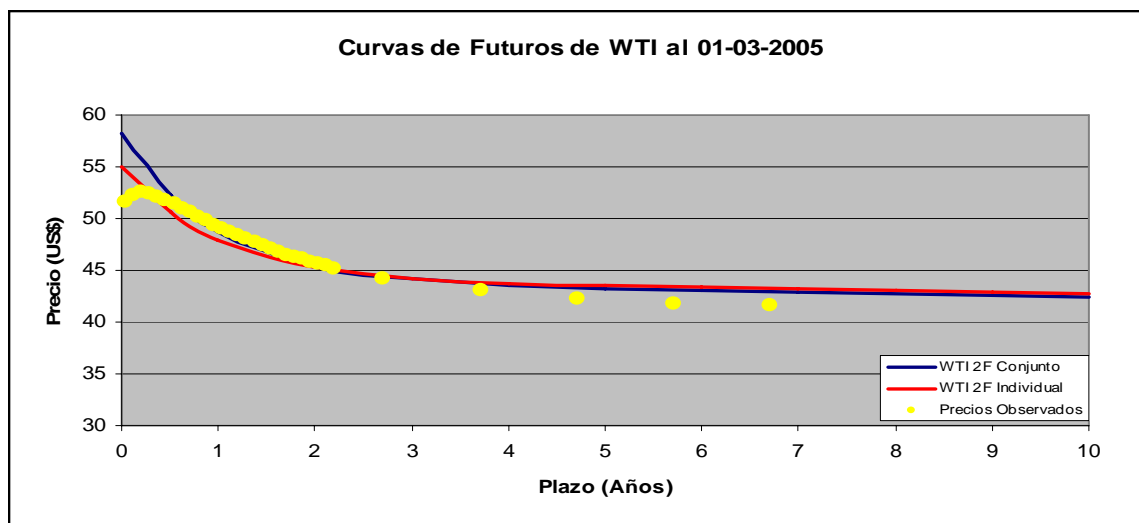


Figura 4-15: Precios observados y curvas teóricas de futuros de 2 factores de WTI. Estimadas conjunta e individualmente para el día 01-03-2005 utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.

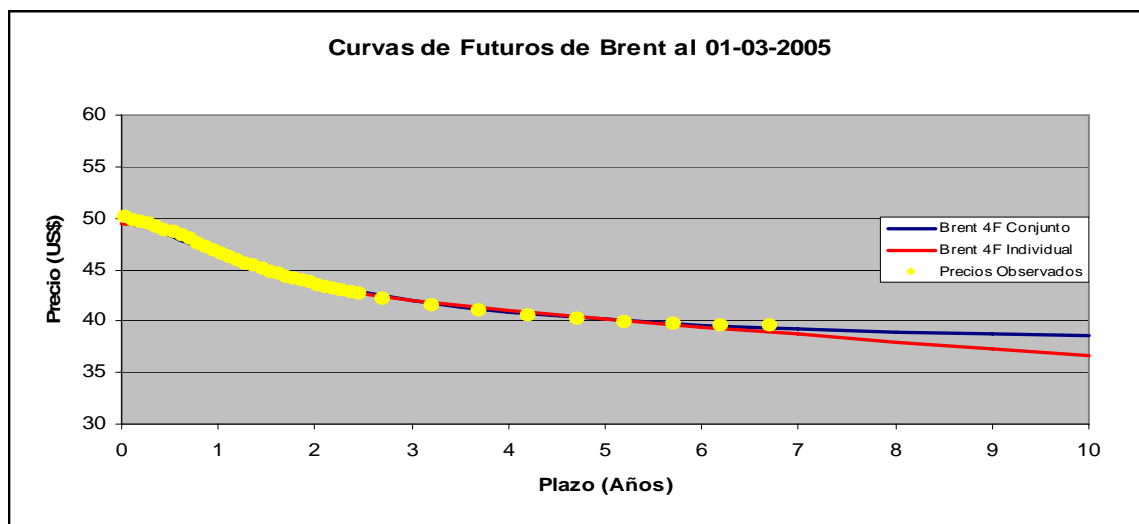


Figura 4-16: Precios observados y curvas teóricas de futuros de 4 factores de Brent. Estimadas conjunta e individualmente para el día 01-03-2005 utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.

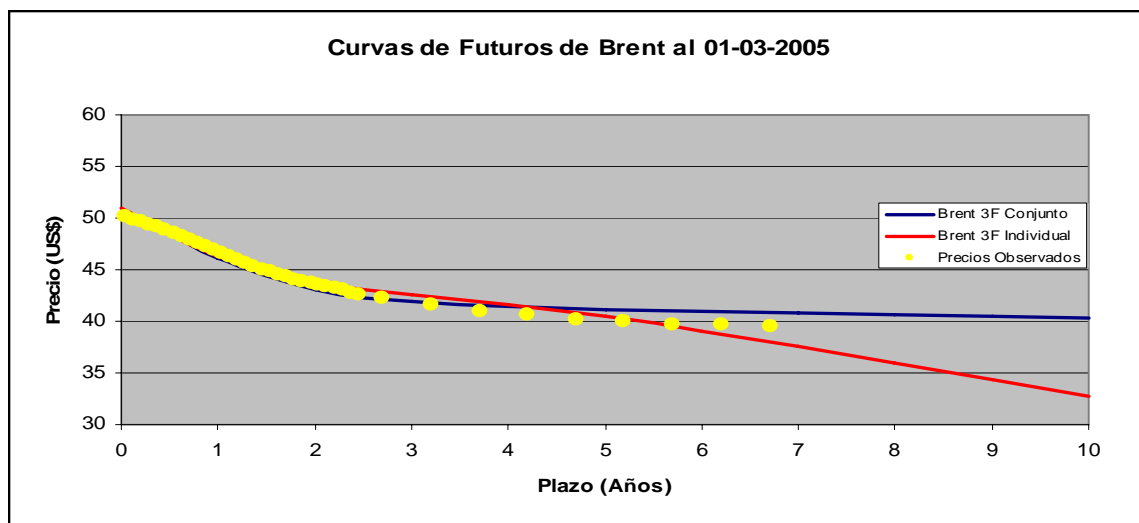


Figura 4-17: Precios observados y curvas teóricas de futuros de 3 factores de Brent. Estimadas conjunta e individualmente para el día 01-03-2005 utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.

Tabla IV-16: Errores porcentuales del ajuste de los modelos de WTI estimados conjunta e individualmente utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.

Errores Out-of-Sample	Modelo de 3 Factores de WTI		Modelo de 2 Factores de WTI	
	Estimación Conjunta	Estimación Individual	Estimación Conjunta	Estimación Individual
RMSE	0,71%	0,54%	2,80%	1,93%
MAE	0,49%	0,39%	1,84%	1,54%
ME	0,00%	0,01%	-1,55%	0,19%

Tabla IV-17: Errores porcentuales del ajuste de los modelos de Brent estimados conjunta e individualmente utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.

Errores Out-of-Sample	Modelo de 4 Factores de Brent		Modelo de 3 Factores de Brent	
	Estimación Conjunta	Estimación Individual	Estimación Conjunta	Estimación Individual
RMSE	0,59%	0,41%	1,27%	1,10%
MAE	0,44%	0,30%	1,05%	0,81%
ME	0,07%	0,00%	0,23%	0,01%

A continuación se presentan figuras que muestran los errores de ajuste de los modelos de 3 factores para el WTI y de 4 factores para el Brent calibrados tanto conjunta como individualmente.

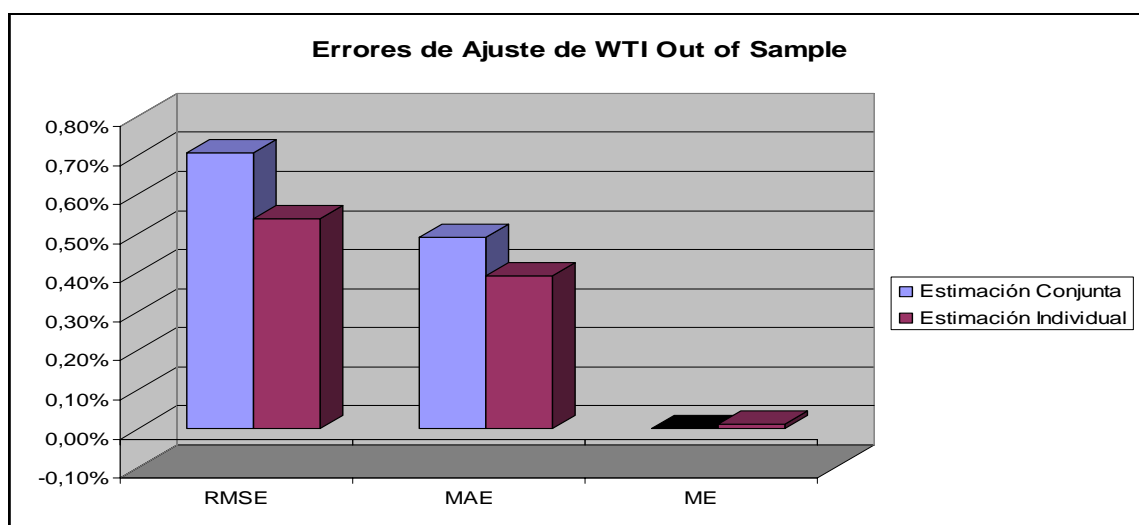


Figura 4-18: Errores de totales ajuste de contratos futuros de WTI para todos los plazos.

Para modelos de 3 factores estimados conjunta e individualmente utilizando los parámetros calibrados con fuera de la muestra.

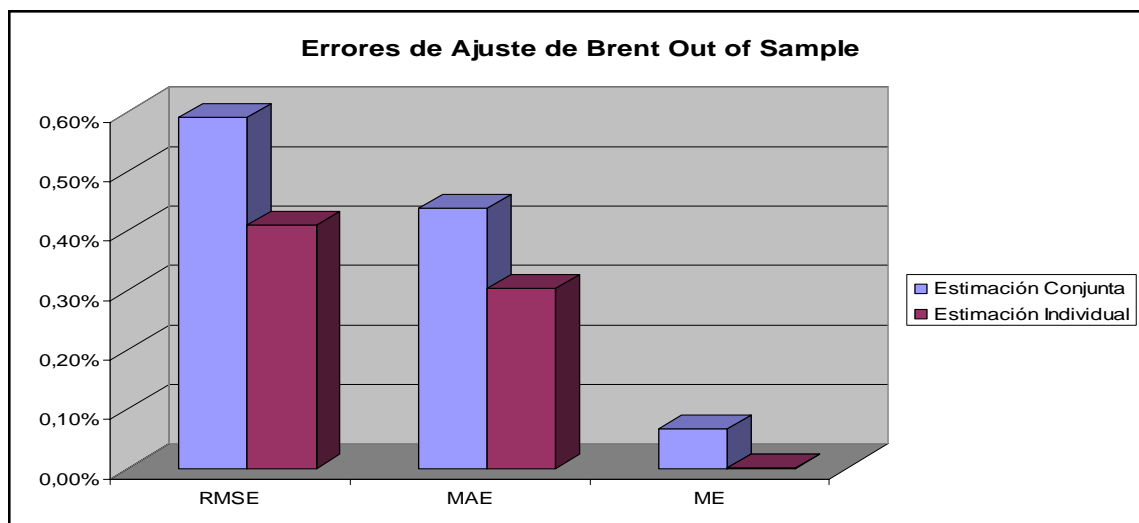


Figura 4-19: Errores de totales ajuste de contratos futuros de Brent para todos los plazos. Para modelos de 4 factores estimados conjunta e individualmente utilizando los parámetros calibrados con fuera de la muestra.

IV.4.6 Ajuste de Estructura de Volatilidad

Una medida importante que debe poseer un modelo de precios de commodities se refiere a que tan bien representa la estructura de volatilidades de los contratos futuros. Por estructura de volatilidad de los futuros, se entenderá la curva de la volatilidad de los retornos de los contratos futuros para cada madurez. Las expresiones analíticas para el cálculo de la estructura de volatilidad fueron presentadas en la sección 2.5.

El objetivo de esta sección es comprobar si la estimación conjunta permite un ajustar la estructura de volatilidad de los commodities representados. En la figura 4-20 se presenta la estructura de volatilidad del Brent para el modelo de 4 factores estimado de forma conjunta. Se puede apreciar que no existe una diferencia significativa entre el ajuste proporcionado por una estimación conjunta respecto de la volatilidad empírica.

La figura 4-21 presenta la estructura de volatilidad del WTI para los modelo de 3 factores estimados de forma conjunta. Al igual que para el Brent, en este caso tampoco se aprecian grandes diferencias entre las volatilidades entregadas por la estimación conjunta y empírica.

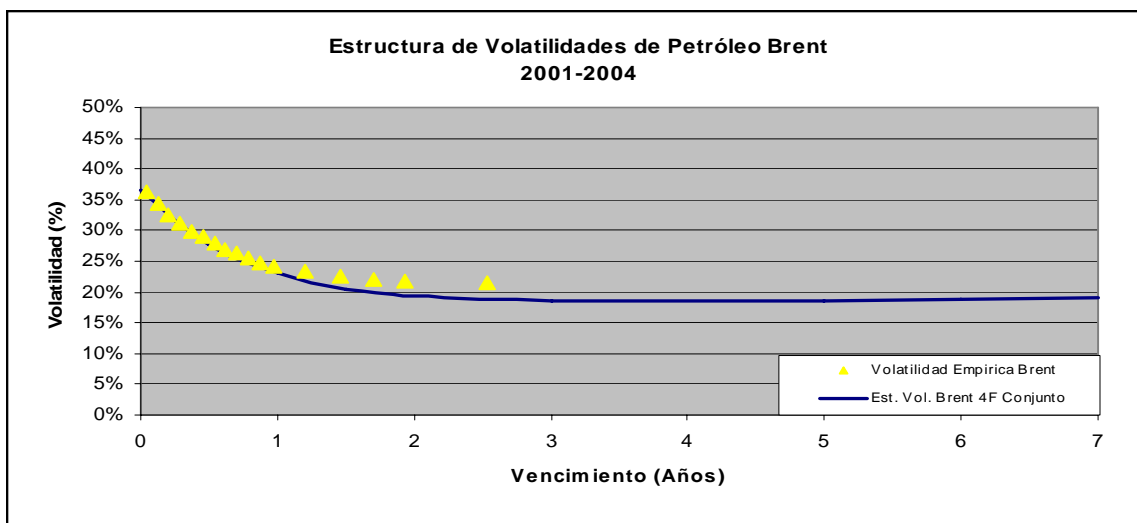


Figura 4-20: Estructuras de Volatilidades del modelo de 4 factores conjunto para petróleo Brent para datos calibrados dentro de la muestra.

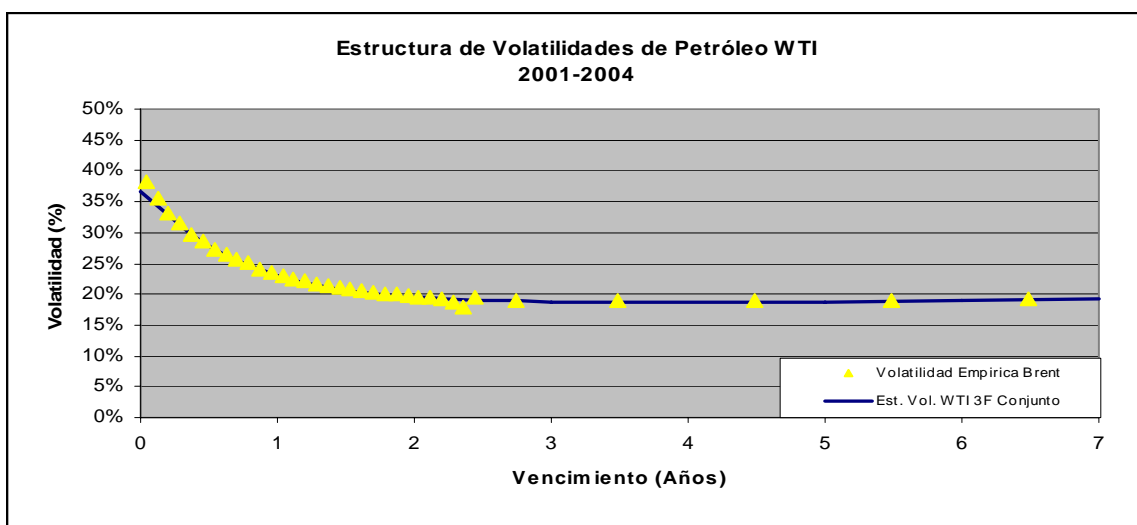


Figura 4-21: Estructuras de Volatilidades del modelo de 3 factores conjunto para petróleo WTI para datos calibrados dentro de la muestra.

IV.4.7 Curvas de Spreads

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al estimar una curva de spreads entre los dos crudos de petróleo. Se estiman dos curvas, la primera corresponde a la curva generada por los precios estimados de manera conjunta. La segunda corresponde a la curva generada por los precios estimados de manera individual.

La figura 4-22 muestra el ajuste de ambas curvas respecto al spread extraído de los contratos transados de ambos commodities para el día 31 de Marzo de 2005. Este spread empírico se calculó para contratos con vencimiento cercano. En este caso no se calcularon errores de ajuste ya que no se tienen contratos con exactamente los mismos vencimientos, lo que no hace posible la determinación del spread para un plazo específico. Sin embargo, en la figura se aprecia que la curva obtenida por medio de la estimación conjunta es mucho más estable para el largo plazo que la obtenida por la estimación individual, la cual para vencimientos superiores a aquellos en los que existen contratos presenta un spread creciente entre ambos crudos, lo cual es bastante poco intuitivo ya que si el spread hasta el año 7 (plazo hasta el cual se transan contratos) es relativamente estable, no se justifica un alza para plazos superiores.

En las tabla IV-18, IV-19 y IV-20 se entrega el spread medio y desviación estándar obtenido a través de los datos y por los modelos estimados de forma conjunta e individual para distintos plazos. En las tablas se puede apreciar que el spread obtenido a través de la estimación conjunta es siempre más volátil. Esta característica se ve incrementada para plazos mayores a los de los contratos transados.

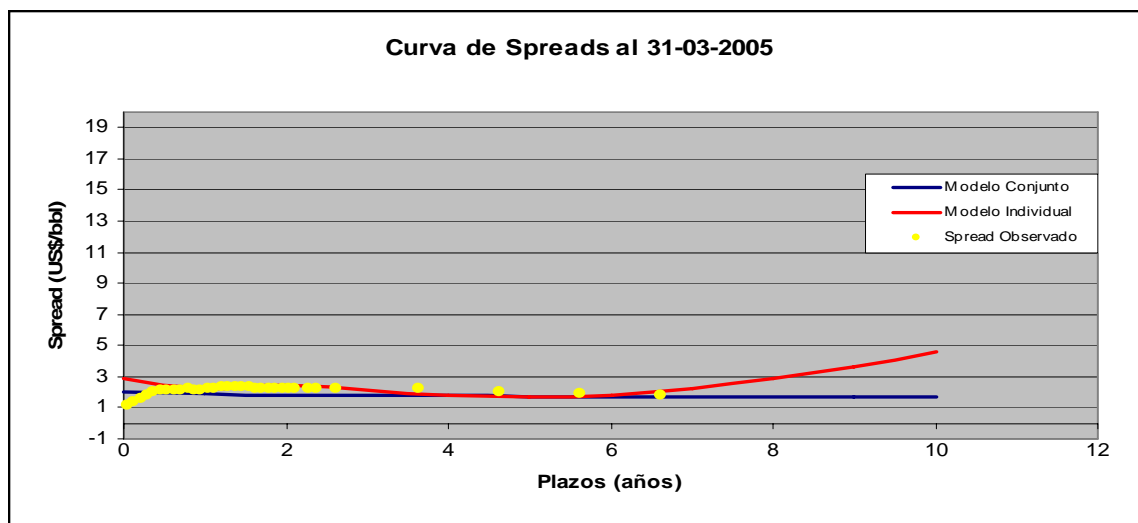


Figura 4-22: Curva de Spreads para el día 31-03-2005 utilizando el modelo de 3 factores para el WTI y 4 factores para el Brent calibrados conjunta e independientemente con datos fuera de la muestra.

Tabla IV-18: Spreads medio y desviación estándar empíricos y de los modelos estimados de forma conjunta e individual, considerando spreads desde 0 hasta 3 años.

	μ	σ
Spread Empírico	1,5	25%
Spread Modelo Conjunto	1,5	38%
Spread Modelo Individual	1,7	50%

Tabla IV-19: Spreads medio y desviación estándar para los modelos estimados de forma conjunta e individual, considerando spreads desde 4 hasta 10 años.

	μ	σ
Spread Modelo Conjunto	1,0	4%
Spread Modelo Individual	2,0	72%

Tabla IV-20: Spreads medio y desviación estándar para los modelos estimados de forma conjunta e individual, considerando spreads desde 0 hasta 10 años.

	μ	σ
Spread Modelo Conjunto	1,2	32%
Spread Modelo Individual	1,9	65%

IV.5 Conclusiones Preliminares

En la segunda parte de esta tesis, se calibra simultáneamente un modelo multifactorial para dos commodities por medio de la utilización del Filtro de Kalman. La idea de estimar dos commodities de forma conjunta reside en el hecho de que commodities altamente correlacionados o que representan un mismo mercado, deberían estar afectados por factores comunes y los precios de uno deberían contribuir en la estimación de los precios del otro y viceversa. Esta última característica, es la base para mejorar la extrapolación de precios proporcionada por los modelos estimados individualmente.

Para probar la efectividad de la estimación conjunta en la extrapolación de datos, se eliminan los precios de los contratos de mayor plazo del Brent y se realiza la estimación de las variables de estado sin ellos. Esto último se hace con la finalidad de dejar al Brent sólo con contratos de vencimiento inferior a 3,5 años y comprobar si la estimación conjunta aporta en la extrapolación de precios para vencimientos mayores a los utilizados en la calibración. A partir de este análisis, se puede concluir que la estimación conjunta es superior a la estimación individual en lo referente a la extrapolación de precios. Este resultado es sumamente importante ya que una gran cantidad de proyectos de explotación petrolífera o de otro tipo que dependa del petróleo, son evaluados utilizando los precios de largo plazo, luego, una mala estimación de estos precios puede producir una toma de decisiones equivocada²⁸.

A continuación se realiza un segundo análisis, en el cual se consideran los precios de ambos crudos para todos los vencimientos y se pudo concluir que tanto para el panel de precios dentro como fuera de muestra, la estimación individual presenta errores de ajuste menores que la estimación conjunta. Sin embargo, la suma de los errores de ajuste de ambos commodities estimados conjuntamente, es menor a la suma de los errores de los modelos estimados de manera individual si consideramos un número similar de factores totales para describir el comportamiento de los precios de ambos commodities. En

²⁸ En Anexo G se muestra un ejemplo de los beneficios de la estimación conjunta para la evaluación de proyectos.

resumen, se puede concluir que la estimación conjunta realiza una contribución en el sentido que se pueden lograr ajustes similares con un menor número de factores totales. Además entrega una metodología de estimación que permite obtener parámetros y variables de estado comunes, proporcionando un modelo más parsimonioso.

En relación con la estructura de volatilidad, se puede concluir que la estimación conjunta entrega un buen ajuste de la estructura de volatilidades de ambos commodities estudiados, logrando ajustar la volatilidad de uno de ellos considerando 3 factores. Este hecho es importante dado que en Cortazar y Naranjo (2006) se planteaba la necesidad de un modelo de 4 factores para ajustar la volatilidad del petróleo.

Finalmente, la estimación conjunta cuenta también la ventaja de proporcionar una curva de spreads más estable que la proporcionada por las curvas estimadas de forma individual.

V. CONCLUSIONES GENERALES

En esta tesis se realizaron dos investigaciones, en la primera se exploró en distintas especificaciones de modelos de precios de commodities, a través de un estudio empírico que compara dos modelos que presentan distintas formas de describir el premio por riesgo. En la segunda investigación, se estimó de forma conjunta la dinámica de dos crudos de petróleo: WTI y Brent.

Con respecto al estudio empírico, se puede concluir que un modelo con premio por riesgo variable cumple con el objetivo de proporcionar un mejor ajuste de los valores esperados de los precios de oro, es decir, proporciona un mejor ajuste en la dimensión temporal que un modelo con premio por riesgo constante. Sin embargo, para el petróleo y para el cobre, en ambos casos se obtienen errores de predicción similares.

En relación al corte transversal, ambos modelos ajustan bien la estructura de precios y volatilidades empíricas. Sin embargo, un aspecto importante a ser considerado es el pobre ajuste que presentan los modelos a los datos fuera de la muestra en el corte transversal. Esta última característica es independiente de la naturaleza del premio por riesgo.

Una forma de mejorar la capacidad de extrapolación de datos corresponde a la estimación conjunta de dos commodities correlacionados, en los cuales uno de ellos presenta precios de mayor plazo que el otro. Al estimar de manera conjunta dos commodities se aprovecha la información de largo plazo contenida en uno de ellos para modelar los precios del otro.

Con respecto al ajuste de los modelos estimados de manera conjunta dentro del rango de vencimientos utilizados en la calibración, es posible concluir que presentan un buen ajuste de la estructura de precios. Aunque es inferior al ajuste proporcionado por un modelo calibrado de forma individual. Finalmente, es posible concluir que la estimación conjunta cumple con el objetivo de proporcionar un modelo más

parsimonioso que la estimación individual, entregando una estructura de spreads más estable, especialmente en el largo plazo.

BIBLIOGRAFIA

AHN, D.-H. (2004). Common Factors and Local Factors: Implications for Term Structures and Exchange Rates. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 39, 69-102.

BRENNAN, M. J., y SCHWARTZ, E. S. (1985). Evaluating natural resources investments. *Journal of Business*, 58, 135-157.

BRENNAN, M.J. y XIA, Y. (2004). International Capital Markets and Exchange Risk, *Documento de Trabajo*, UCLA, Wharton.

CASASSUS, J., y COLLIN-DUFRESNE, P. (2005). Stochastic Convenience Yield implied from Commodity Futures and Interest Rates. *The Journal of Finance*, 60, 2283-2331.

CORTAZAR, G., y SCHWARTZ, E. S. (1994). The valuation of commodity-contingent claims. *Journal of Derivatives*, 1, 27-35.

CORTAZAR, G., y SCHWARTZ, E. S. (2003). Implementing a stochastic model for oil futures prices. *Energy Economics*, 25, 215-238.

CORTAZAR, G., SCHWARTZ, E. S., y NARANJO, L. F. (2003). Term structure estimation in low-frequency transaction markets: A Kalman filter approach with incomplete panel-data, *Documento de Trabajo*, Anderson School of Management, UCLA.

CORTAZAR, G., y NARANJO, L. F. (2006). An N-Factor Gaussian Model of Oil Futures. *Journal of Futures Markets*, por aparecer.

COX, J. C., INGERSOLL, J., y ROSS, S. (1981). The Relation Between Forward Prices and Futures Prices. *Journal of Financial Economics*. 9, 321-46.

DAI, Q., y SINGLETON, K. J. (2000). Specification analysis of affine term structure models. *The Journal of Finance*, 55, 1943-1978.

DUFFIE, D., PAN, J., y SINGLETON, K. J. (2000). Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-diffusions. *Econometrica*, 68, 1343-1376.

GIBSON, R., y SCHWARTZ, E. S. (1990). Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims. *The Journal of Finance*, 45, 959-976.

HARRISON, J. M., y KREPS, D. (1979). Martingale and Arbitrage in Multi-period Securities Markets. *Journal of Economic Theory*, 20, 381-408.

HARRISON, J. M., y PLISKA, S. R. (1981), Martingale and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading. *Stochastic Process and Their Applications*, 11, 215-260.

HARVEY, A. C. (1989). *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*, Cambridge University Press, Cambridge.

MANOLIU M. y TOMPAIDIS S. (2002). Energy futures prices: term structure models with Kalman filter estimation. *Applied Mathematical Finance*, 9, 21-43.

MILONAS, N. y HENKER, T. (2001) Price spread and convenience yield behaviour in the international oil market. *Applied Financial Economics*, 11, 23-36.

MOSBURGER, G. y SCHNEIDER, P. (2005). Modelling International Bond Markets with Affine Term Structure Models, *Documento de Trabajo*.

NARANJO, L. (2002) *Modelos Lognormales de Precios de Commodities y Calibración mediante el Filtro de Kalman utilizando paneles de datos incompletos de futuros de Cobre y Petróleo*, Mag. en Cs. de la Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile.

RAHGOZAR, R. y NAJAFI, H. (2003). Effect of Diversification on Managing Revenue and Risk: An Empirical Analysis Using Crude Oil Futures Markets. *Journal of Derivatives Use, Trading & Regulation*, 9, 133-149.

SCHWARTZ, E. S. (1997). The stochastic behavior of commodity prices: Implications for valuation and hedging. *The Journal of Finance*, 52, 923-973.

SCHWARTZ, E. S., y SMITH, J. E. (2000). Short-term variations and long-term dynamics in commodity prices. *Management Science*, 46, 893-911.

SØRENSEN, C. (2002). Modeling seasonality in agricultural commodity futures. *Journal of Futures Markets*. 22, 393-426.

ANEXOS

**ANEXO A: VALORIZACIÓN DE CONTRATOS FUTUROS PARA EL
MODELO DE C&C-D**

La expresión analítica para el valor de un contrato futuro esta dada por:

$$F(Y, \tau) = \exp (A_F(\tau) + B_F(\tau)^T Y) \quad (\text{A.1})$$

Donde los términos $A_F(\tau)$ y $B_F(\tau)$ son:

$$\begin{aligned} A_F(\tau) = & \phi_0 + \frac{1}{2} M_{11}^2 \frac{1 - e^{-2\tau\kappa_{11}^Q}}{2\kappa_{11}^Q} + \frac{1}{2} (M_{12}^2 + M_{22}^2) \frac{1 - e^{-2\tau\kappa_{22}^Q}}{2\kappa_{22}^Q} \\ & + \frac{1}{2} (M_{13}^2 + M_{23}^2 + M_{33}^2) \frac{1 - e^{-2\tau\kappa_{33}^Q}}{2\kappa_{33}^Q} + M_{11}M_{12} \frac{1 - e^{-\tau(\kappa_{11}^Q + \kappa_{22}^Q)}}{\kappa_{11}^Q + \kappa_{22}^Q} \\ & + M_{11}M_{13} \frac{1 - e^{-\tau(\kappa_{11}^Q + \kappa_{33}^Q)}}{\kappa_{11}^Q + \kappa_{33}^Q} + (M_{12}M_{13} + M_{22}M_{23}) \frac{1 - e^{-\tau(\kappa_{22}^Q + \kappa_{33}^Q)}}{\kappa_{22}^Q + \kappa_{33}^Q} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$B_F(\tau) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ 0 & M_{22} & M_{23} \\ 0 & 0 & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\tau\kappa_{11}^Q} \\ e^{-\tau\kappa_{22}^Q} \\ e^{-\tau\kappa_{33}^Q} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$M_{11} = \phi_1 + \alpha_1(\phi_2 + \alpha_2\phi_3) + \alpha_3\phi_3$$

$$M_{12} = -\alpha_1(\phi_2 + \alpha_2\phi_3)$$

$$M_{13} = -\alpha_3\phi_3$$

$$M_{22} = \phi_2 + \alpha_2\phi_3$$

$$M_{23} = -\alpha_2\phi_3$$

$$M_{33} = \phi_3$$

$$\alpha_1 = \frac{\kappa_{21}^Q}{\kappa_{11}^Q - \kappa_{22}^Q}$$

$$\alpha_2 = \frac{\kappa_{32}^Q}{\kappa_{22}^Q - \kappa_{33}^Q}$$

$$\alpha_3 = \frac{\kappa_{31}^Q}{\kappa_{11}^Q - \kappa_{33}^Q} - \frac{\kappa_{21}^Q}{\kappa_{11}^Q - \kappa_{33}^Q} \frac{\kappa_{32}^Q}{\kappa_{22}^Q - \kappa_{33}^Q}$$

**ANEXO B: VALORIZACIÓN DE CONTRATOS FUTUROS PARA EL
MODELO DE C&S**

La expresión analítica para el precio de un contrato futuro para el modelo de 2 factores de Cortazar y Schwartz (2003) esta dada por:

$$F(S, y, T) = S * e^{-y \frac{(1-e^{-kT})}{k} + B(T)}$$

$$B(T) = (v - \lambda_1)T + (\lambda_2 - \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}) \frac{T}{k} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_2^2}{k^2} T + \frac{1}{4} \frac{\sigma_2^2}{k^3} (1 - e^{-2kT})$$

$$+ \frac{(-\lambda_2 + \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12})}{k^2} (1 - e^{-kT}) - \frac{\sigma_2^2}{k^3} (1 - e^{-kT})$$
(B.1)

En el caso del modelo de 3 factores, el precio de un contrato futuro está dado por:

$$F(S, y, v, T) = S * e^{-y \frac{(1-e^{-kT})}{k} + v \frac{(1-e^{-aT})}{a} + B(T)}$$

$$B(T) = -(\lambda_1)T + \frac{\lambda_2 - \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}}{\kappa^2} (\kappa T + e^{-\kappa T} - 1)$$

$$+ \frac{\sigma_2^2}{4\kappa^3} (-e^{-2\kappa T} + 4e^{-\kappa T} + 2\kappa T - 3) + \frac{a\bar{v} - \lambda_3 + \sigma_1 \sigma_3 \rho_{13}}{a^2} (aT + e^{-aT} - 1)$$

$$- \frac{\sigma_3^2}{4a^3} (e^{-2aT} - 4e^{-aT} - 2aT + 3) - \frac{\sigma_2 \sigma_3 \rho_{23}}{\kappa^2 a^2 (\kappa + a)} \begin{pmatrix} \kappa^2 e^{-aT} + \kappa a e^{-aT} + \kappa a^2 T \\ + \kappa a e^{-\kappa T} + a^2 e^{-\kappa T} \\ - \kappa a e^{-(\kappa+a)T} - \kappa^2 \\ - \kappa a - a^2 + \kappa^2 a T \end{pmatrix}$$
(B.2)

Luego

$$F(S, y, v, T) = S \exp \left[\begin{aligned} & -y \frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa} + v \frac{1 - e^{-aT}}{a} + -(\lambda_1)T + \frac{\lambda_2 - \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}}{\kappa^2} (\kappa T + e^{-\kappa T} - 1) \\ & + \frac{\sigma_2^2}{4\kappa^3} (-e^{-2\kappa T} + 4e^{-\kappa T} + 2\kappa T - 3) + \frac{av - \lambda_3 + \sigma_1 \sigma_3 \rho_{13}}{a^2} (aT + e^{-aT} - 1) \\ & - \frac{\sigma_3^2}{4a^3} (e^{-2aT} - 4e^{-aT} - 2aT + 3) - \frac{\sigma_2 \sigma_3 \rho_{23}}{\kappa^2 a^2 (\kappa + a)} \begin{pmatrix} \kappa^2 e^{-aT} + \kappa a e^{-aT} + \kappa a^2 T \\ + \kappa a e^{-\kappa T} + a^2 e^{-\kappa T} \\ - \kappa a e^{-(\kappa+a)T} - \kappa^2 \\ - \kappa a - a^2 + \kappa^2 a T \end{pmatrix} \end{aligned} \right] \quad (\text{B.3})$$

ANEXO C: VALOR ESPERADO DE VARIABLES DE ESTADO

A continuación se presenta el desarrollo para obtener las expresiones para el valor esperado de las variables de estado:

$$d\mathbf{x}_t = (-\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b})dt + \Sigma d\mathbf{w}_t \quad (\text{C.1})$$

Definiendo el siguiente vector de estados:

$$\mathbf{y}_t = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_t \quad (\text{C.2})$$

Aplicando el lema de Ito a \mathbf{y}_t , se obtiene:

$$\begin{aligned} d\mathbf{y}_t &= e^{\mathbf{A}t} d\mathbf{x}_t + \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_t \\ &= e^{\mathbf{A}t} ((-\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b})dt + \Sigma d\mathbf{w}_t) + \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_t \\ &= e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b}dt + e^{\mathbf{A}t} \Sigma d\mathbf{w}_t \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Integrando la expresión anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_t^T d\mathbf{y}_s &= \int_t^T e^{\mathbf{A}s} \mathbf{b}ds + \int_t^T e^{\mathbf{A}s} \Sigma d\mathbf{w}_s \\ \mathbf{y}_T - \mathbf{y}_t &= \left(\int_t^T e^{\mathbf{A}s} ds \right) \mathbf{b} + \int_t^T e^{\mathbf{A}s} \Sigma d\mathbf{w}_s \\ \mathbf{y}_T &= \mathbf{y}_t + \left(\int_t^T e^{\mathbf{A}s} ds \right) \mathbf{b} + \int_t^T e^{\mathbf{A}s} \Sigma d\mathbf{w}_s \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Reemplazando $\mathbf{y}_t = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_t$ en la ecuación anterior se obtiene:

$$\mathbf{x}_T = e^{-\mathbf{A}(T-t)} \mathbf{x}_t + e^{-\mathbf{A}T} \left(\int_t^T e^{\mathbf{A}s} ds \right) \mathbf{b} + e^{-\mathbf{A}T} \int_t^T e^{\mathbf{A}s} \Sigma d\mathbf{w}_s \quad (\text{C.5})$$

Los momentos condicionales de las variables de estado son²⁹:

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{x}_T) = e^{-\mathbf{A}(T-t)} \mathbf{x}_t - \left(\int_0^{T-t} e^{-\mathbf{A}\tau} d\tau \right) \mathbf{b} \quad (\text{C.6})$$

$$\mathbf{Cov}_t(\mathbf{x}_T) = \int_0^{T-t} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{\Sigma} \mathbf{\Theta} \mathbf{\Sigma}' (e^{-\mathbf{A}\tau})' d\tau \quad (\text{C.7})$$

Donde $\mathbf{\Theta} dt = (d\mathbf{w}_t)(d\mathbf{w}_t)'$. (C.8)

²⁹ Ver Øksendal (1998)

ANEXO D: ESTRUCTURAS DE VOLATILIDAD

D.1 Estructura de Volatilidad Modelo C&C-D

Dada la siguiente expresión para el futuro:

$$F(Y, \tau) = e^{(A_F(\tau) + B_{F1}(\tau)Y_1 + B_{F2}(\tau)Y_2 + B_{F3}(\tau)Y_3)} \quad (\text{D.1})$$

La expresión para la estructura de volatilidad de este modelo es:

$$\sigma_F^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \left(\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial y_1} = B_{F1} \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial y_2} = B_{F2} \quad (\text{D.4})$$

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial y_3} = B_{F3} \quad (\text{D.5})$$

$$\sigma_F^2 = \left(\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial y_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial y_3} \right)^2 = B_{F1}^2 + B_{F2}^2 + B_{F3}^2 \quad (\text{D.6})$$

D.2 Estructura de Volatilidad Modelo de 2 y 3 Factores C&S

En el caso del modelo de 2 factores la estructura de volatilidad es la siguiente:

$$\sigma_F^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \left(\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \left(\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \quad (\text{D.7})$$

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 1 \quad (\text{D.8})$$

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x_2} = -\frac{1 - e^{-kT}}{k} \quad (\text{D.9})$$

$$\sigma_F^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \frac{1 - e^{-kT}}{k} + \sigma_2^2 \left[\frac{1 - e^{-kT}}{k} \right]^2 \quad (\text{D.10})$$

De igual forma para el modelo de 3 factores la estructura de volatilidad es:

$$\sigma_F^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \left(\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \left(\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \quad (\text{D.11})$$

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 1 \quad (\text{D.12})$$

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x_2} = -\frac{1 - e^{-kT}}{k} \quad (\text{D.13})$$

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x_3} = \frac{1 - e^{-aT}}{a} \quad (\text{D.14})$$

$$\begin{aligned}
\sigma_F^2 = & \sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}\frac{1-e^{-kT}}{k} + 2\sigma_1\sigma_3\rho_{13}\frac{1-e^{-aT}}{a} + \sigma_2^2\left[\frac{1-e^{-kT}}{k}\right]^2 \\
& - 2\sigma_2\sigma_3\rho_{23}\frac{(1-e^{-kT})(1-e^{-aT})}{ka} + \sigma_3^2\left[\frac{1-e^{-aT}}{a}\right]^2
\end{aligned}
\tag{D.15}$$

ANEXO E: METODOLOGÍA DE CÁLCULO DE PREDICCIÓN DE PRECIO SPOT

A continuación se presenta la metodología utilizada en el cálculo de la predicción utilizada en la comparación con el precio spot.

Supongamos que se está en el tiempo $t = t_0$ y se tiene un vector de estados \mathbf{x}_0 . Si queremos predecir a un plazo $t = t_1$, calculamos el valor esperado del vector de estados en $t = t_1$ por medio de las expresiones encontradas en le Anexo C. Al vector de estados esperado lo llamamos \mathbf{x}_1 .

Como precio spot en $t = t_1$ se toma el valor del futuro más cercano (F_1), el cual vence en $t = t_2$. Luego, con el vector de estados \mathbf{x}_1 se valoriza un futuro con vencimiento en $t = t_2$. Finalmente se compara el F_1 con el valor del futuro encontrado a partir del vector de estados \mathbf{x}_1 .

Ejemplo de predicción a 1 mes:

$$t_0 = 01-01-2005$$

$$t_1 = 01-02-2005$$

$$T_1 = t_1 - t_0$$

$$\mathbf{x}_1 = E_{t_0} [\mathbf{x}_0, K, T_1]$$

Con

K: parámetros del modelo

Luego, tenemos que el precio spot en t_2 se define como:

$$S_{t_1} = F_1 = F(T_2)$$

Con $T_2 = t_2 - t_1$

Finalmente el valor de la predicción del precio spot se calcula de la siguiente forma:

$$E_{t_1}(S) = F_{t_1}(\mathbf{x}_1, K, T_2)$$

ANEXO F: ERRORES DE PREDICCIÓN MEDIANTE FUTUROS Y CAMINATA ALEATORIA

A continuación se presentan las tablas con los errores encontrados para la predicción a través de los contratos futuros (valor esperado ajustado por riesgo) provenientes de cada modelo y a través del valor esperado de un proceso de caminata aleatoria.

F.1 Errores de Predicción de Futuros para Oro

Tabla F-1: Errores porcentuales de predicción realizada a través del valor de los contratos futuros de Oro entregados por los modelos. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

Errores In-Sample	Plazos (Meses)						TOTAL
	1	2	3	4	5	6	
RMSE C&C-D	3,51%	5,08%	5,76%	6,39%	7,10%	7,68%	6,08%
RMSE C&S	3,56%	5,13%	5,81%	6,44%	7,14%	7,71%	6,12%
MAE C&C-D	2,60%	3,82%	4,48%	5,03%	5,64%	6,22%	4,63%
MAE C&S	2,66%	3,87%	4,53%	5,07%	5,68%	6,24%	4,67%
ME C&C-D	-0,34%	-0,82%	-1,13%	-1,39%	-1,72%	-1,98%	-1,23%
ME C&S	-0,32%	-0,81%	-1,12%	-1,39%	-1,73%	-1,99%	-1,22%

Tabla F-2: Errores porcentuales de predicción realizada a través del valor de los contratos futuros de Oro entregados por los modelos. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.

Errores Out-of-Sample	Plazos (Meses)						TOTAL
	1	2	3	4	5	6	
RMSE C&C-D	3,79%	4,95%	5,23%	5,59%	5,86%	5,76%	5,24%
RMSE C&S	3,78%	4,93%	5,21%	5,58%	5,85%	5,76%	5,23%
MAE C&C-D	3,19%	4,05%	4,31%	4,48%	4,85%	4,46%	4,22%
MAE C&S	3,19%	4,03%	4,32%	4,47%	4,84%	4,45%	4,22%
ME C&C-D	0,68%	1,12%	1,19%	1,20%	1,56%	1,99%	1,29%
ME C&S	0,44%	0,94%	1,05%	1,10%	1,51%	1,96%	1,16%

F.2 Errores de Predicción de Caminata Aleatoria para Oro

Tabla F-3: Errores porcentuales de predicción realizada a través del valor esperado de una caminata aleatoria para Oro. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

Errores In-Sample	Plazos (Meses)						TOTAL
	1	2	3	4	5	6	
RMSE Caminata aleatoria	3,45%	4,91%	5,47%	5,97%	6,51%	6,94%	5,66%
MAE Caminata aleatoria	2,53%	3,63%	4,16%	4,60%	5,04%	5,46%	4,24%
ME Caminata aleatoria	-0,10%	-0,23%	-0,25%	-0,22%	-0,19%	-0,14%	-0,19%

Tabla F-4: Errores porcentuales de predicción realizada a través del valor esperado de una caminata aleatoria para Oro. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.

Errores Out-of-Sample	Plazos (Meses)						TOTAL
	1	2	3	4	5	6	
RMSE Cam. aleatoria	3,77%	4,95%	5,26%	5,68%	6,09%	6,16%	5,38%
MAE Cam. aleatoria	3,18%	4,05%	4,31%	4,58%	4,95%	4,77%	4,30%
ME Cam. aleatoria	0,48%	1,21%	1,51%	1,75%	2,39%	3,01%	1,72%

F.3 Errores de Predicción de Futuros para Petróleo

Tabla F-5: Errores porcentuales de predicción realizada a través del valor de los contratos futuros de Petróleo entregados por los modelos. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

Errores In-Sample	Plazos (Meses)						TOTAL
	1	2	3	4	5	6	
RMSE C&C-D	9,29%	13,63%	15,89%	17,98%	19,81%	20,76%	16,69%
RMSE C&S	9,31%	13,66%	15,93%	18,04%	19,92%	20,95%	16,77%
MAE C&C-D	7,24%	10,42%	12,40%	14,33%	16,23%	17,09%	12,95%
MAE C&S	7,24%	10,47%	12,48%	14,47%	16,37%	17,25%	13,05%
MEC&C-D	0,28%	0,71%	1,15%	1,62%	2,31%	2,98%	1,51%
MEC&S	0,27%	0,72%	1,17%	1,64%	2,32%	2,97%	1,52%

Tabla F-6: Errores porcentuales de predicción realizada a través del valor de los contratos futuros de Petróleo entregados por los modelos. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.

Errores Out-of-Sample	Plazos (Meses)						TOTAL
	1	2	3	4	5	6	
RMSE C&C-D	9,56%	13,23%	15,23%	17,47%	20,31%	23,20%	17,07%
RMSE C&S	9,06%	12,87%	15,09%	17,66%	21,02%	24,18%	17,35%
MAE C&C-D	8,11%	12,04%	13,15%	15,76%	18,72%	21,31%	14,82%
MAE C&S	7,54%	11,65%	12,95%	15,95%	19,60%	22,52%	15,00%
MEC&C-D	5,43%	8,83%	11,77%	14,94%	18,72%	21,30%	13,46%
MEC&S	3,08%	7,66%	11,37%	15,18%	19,60%	22,52%	13,19%

F.4 Errores de Predicción de Caminata Aleatoria para Petróleo

Tabla F-7: Errores porcentuales de predicción realizada a través del valor esperado de una caminata aleatoria para Petróleo. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

Errores In-Sample	Plazos (Meses)						TOTAL
	1	2	3	4	5	6	
RMSE Caminata aleatoria	9,60%	14,28%	16,75%	19,26%	21,33%	21,98%	17,73%
MAE Caminata aleatoria	7,31%	10,61%	12,52%	14,47%	16,37%	17,34%	13,10%
ME Caminata aleatoria	-0,33%	-0,69%	-0,86%	-0,97%	-0,92%	-0,66%	-0,74%

Tabla F-8: Errores porcentuales de predicción realizada a través del valor esperado de una caminata aleatoria para Petróleo. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.

Errores Out-of-Sample	Plazos (Meses)						TOTAL
	1	2	3	4	5	6	
RMSE Caminata aleatoria	8,73%	11,82%	13,46%	15,25%	17,50%	20,00%	14,90%
MAE Caminata aleatoria	7,15%	10,27%	11,42%	13,74%	15,97%	18,27%	12,78%
ME Caminata aleatoria	2,54%	6,17%	9,12%	12,23%	15,91%	18,08%	10,64%

F.5 Errores de Predicción de Futuros para Cobre

Tabla F-9: Errores porcentuales de predicción realizada a través del valor de los contratos futuros de Cobre entregados por los modelos. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

Errores In-Sample	Plazos (Meses)						TOTAL
	1	2	3	4	5	6	
RMSE C&C-D	6,01%	8,84%	10,41%	11,90%	13,51%	14,88%	11,31%
RMSE C&S	6,02%	8,86%	10,48%	12,03%	13,67%	15,01%	11,41%
MAE C&C-D	4,68%	6,93%	8,40%	9,76%	11,03%	12,07%	8,81%
MAE C&S	4,69%	6,94%	8,42%	9,85%	11,12%	12,17%	8,86%
MEC&C-D	-0,12%	-0,12%	-0,20%	-0,23%	-0,21%	-0,14%	-0,17%
MEC&S	-0,13%	-0,21%	-0,31%	-0,35%	-0,32%	-0,22%	-0,26%

Tabla F-10: Errores porcentuales de predicción realizada a través del valor de los contratos futuros de Cobre entregados por los modelos. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.

Errores Out-of-Sample	Plazos (Meses)						TOTAL
	1	2	3	4	5	6	
RMSE C&C-D	6,96%	11,43%	14,04%	16,52%	18,79%	20,03%	15,27%
RMSE C&S	6,91%	11,26%	13,67%	15,97%	18,11%	19,33%	14,80%
MAE C&C-D	5,20%	9,44%	11,68%	14,04%	16,72%	18,58%	12,58%
MAE C&S	5,18%	9,16%	11,19%	13,39%	16,00%	17,79%	12,10%
MEC&C-D	2,24%	6,83%	10,23%	13,30%	16,48%	18,52%	11,24%
MEC&S	2,79%	6,42%	9,42%	12,32%	15,49%	17,60%	10,64%

F.6 Errores de Predicción de Caminata Aleatoria para Cobre

Tabla F-11: Errores porcentuales de predicción realizada a través del valor esperado de una caminata aleatoria para Cobre. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

Errores In-Sample	Plazos (Meses)						TOTAL
	1	2	3	4	5	6	
RMSE Caminata aleatoria	6,16%	9,09%	10,74%	12,37%	14,20%	15,88%	11,85%
MAE Caminata aleatoria	4,78%	7,08%	8,58%	10,00%	11,37%	12,68%	9,08%
ME Caminata aleatoria	-0,32%	-0,64%	-0,96%	-1,23%	-1,49%	-1,65%	-1,05%

Tabla F-12: Errores porcentuales de predicción realizada a través del valor esperado de una caminata aleatoria para Cobre. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.

Errores Out-of-Sample	Plazos (Meses)						TOTAL
	1	2	3	4	5	6	
RMSE Caminata aleatoria	6,97%	11,17%	13,40%	15,32%	16,71%	17,09%	13,88%
MAE Caminata aleatoria	5,20%	8,76%	10,39%	12,04%	13,84%	14,85%	10,83%
ME Caminata aleatoria	2,69%	5,95%	8,38%	10,62%	12,89%	14,32%	9,12%

ANEXO G: RESULTADOS DE TESTS ESTADÍSTICOS PARA COMPARAR CAPACIDADES DE MODELOS DE C&C-D Y C&S

En este anexo se presentan los tests de igualdad de medias utilizados para comparar los ajustes de los modelos a las estructuras de precios de los contratos futuros, las capacidades de predicción presentes en los modelos y el ajuste de las volatilidades entregadas por ambos modelos a las volatilidades empíricas encontradas en los contratos futuros.

G.1 Test de comparación de medias de errores de ajuste de la estructura de precios futuros

En las tablas que se presentan a continuación se muestran los estadísticos t que comparan las medias de los errores cuadráticos (MSE) de ambos modelos para cada uno de los commodities estudiados tanto dentro como fuera de la muestra.

La hipótesis nula $H_0: \mu_{\text{modelo C\&C-D}} = \mu_{\text{modelo C\&S}}$ es rechazada al 5 % cuando el valor del estadístico t entregado en la tabla es mayor a 1,96.

Tabla G-1: Test de igualdad de medias de errores cuadráticos (MSE) de modelo de C&C-D y C&S. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

Commodity	Estadístico t
Oro	22,3
Petróleo	0,22
Cobre	16,85

Tabla G-2: Test de igualdad de medias de errores cuadráticos (MSE) de modelo de C&C-D y C&S. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.

Commodity	Estadístico t
Oro	7,33
Petróleo	10,85
Cobre	11,19

G.2 Test de comparación de medias de errores de predicción de precios spot

En las siguientes tablas se presenta el valor del estadístico t que compara las capacidades de predicción de ambos modelos a través de la media de los errores cuadráticos (MSE) de ajuste del valor esperado en la medida histórica (P) y ajustada por riesgo (Q) y mediante el valor esperado de una caminata aleatoria.

La hipótesis nula $H_0: \mu_1 = \mu_2$ es rechazada al 5 % cuando el valor del estadístico t entregado en la tabla es mayor a 1,96.

Tabla G-3: Test de igualdad de medias de errores cuadráticos (MSE) de predicción de precios spot de Oro. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

	MSE C&C-D en P	MSE C&C-D en Q	MSE C&S en P	MSE C&S en Q	Caminata Aleatoria
MSE C&C-D en P		7,48	5,51	7,90	3,40
MSE C&C-D en Q			1,81	0,41	4,05
MSE C&S en P				2,22	2,17
MSE C&S en Q					4,47

Tabla G-4: Test de igualdad de medias de errores cuadráticos (MSE) de predicción de precios spot de Petróleo. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

	MSE C&C-D en P	MSE C&C-D en Q	MSE C&S en P	MSE C&S en Q	Caminata Aleatoria
MSE C&C-D en P		0,77	1,21	0,48	2,21
MSE C&C-D en Q			1,98	0,30	2,85
MSE C&S en P				1,70	1,19
MSE C&S en Q					2,63

Tabla G-5: Test de igualdad de medias de errores cuadráticos (MSE) de predicción de precios spot de Cobre. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

	MSE C&C-D en P	MSE C&C-D en Q	MSE C&S en P	MSE C&S en Q	Caminata Aleatoria
MSE C&C-D en P		1,03	0,91	1,54	3,51
MSE C&C-D en Q			0,14	0,52	2,59
MSE C&S en P				0,67	2,76
MSE C&S en Q					2,10

Tabla G-6: Test de igualdad de medias de errores cuadráticos (MSE) de predicción de precios spot de Oro. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.

	MSE C&C-D en P	MSE C&C-D en Q	MSE C&S en P	MSE C&S en Q	Caminata Aleatoria
MSE C&C-D en P		0,25	1,79	0,30	0,31
MSE C&C-D en Q			2,05	0,04	0,57
MSE C&S en P				2,09	1,48
MSE C&S en Q					0,61

Tabla G-7: Test de igualdad de medias de errores cuadráticos (MSE) de predicción de precios spot de Petróleo. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.

	MSE C&C-D en P	MSE C&C-D en Q	MSE C&S en P	MSE C&S en Q	Caminata Aleatoria
MSE C&C-D en P		8,22	11,35	7,66	12,21
MSE C&C-D en Q			3,29	0,51	4,14
MSE C&S en P				3,75	0,80
MSE C&S en Q					4,59

Tabla G-8: Test de igualdad de medias de errores cuadráticos (MSE) de predicción de precios spot de Cobre. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.

	MSE C&C-D en P	MSE C&C-D en Q	MSE C&S en P	MSE C&S en Q	Caminata Aleatoria
MSE C&C-D en P		4,00	0,50	4,74	6,01
MSE C&C-D en Q			3,45	0,76	2,15
MSE C&S en P				4,18	5,45
MSE C&S en Q					1,41

G.3 Test de comparación de volatilidades

En las siguientes tablas se presenta el test F utilizado para comparar las varianzas de dos muestras. Las tablas G-9 a G-14 comparan las volatilidades empíricas para cada plazo con las volatilidades calculadas de forma analítica y a través de las curvas para cada uno de los modelos tanto dentro como fuera de la muestra. Las tablas G-15 a G-20 comparan las volatilidades para cada plazo calculadas de forma analítica y por medio de las curvas para ambos modelos tanto dentro como fuera de la muestra.

La hipótesis nula $H_0: \sigma^2_1 = \sigma^2_2$ es rechazada al 10 % de acuerdo al valor del estadístico F presente para cada plazo, el cual depende del tamaño de la muestra. Dado que la volatilidad analítica se calcula a partir de una fórmula, se consideró que el tamaño de la muestra era el mismo que para el cálculo de la volatilidad empírica.

Tabla G-9: Test de comparación de volatilidades empíricas para cada plazo promedio con volatilidades de los modelos para Oro. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

Plazos Promedio Semanales	Vol. empírica - EV C&C-D analítica	Vol. empírica - EV C&S analítica	Vol. empírica - EV C&C-D curvas	Vol. empírica - EV C&S curvas	Valor crítico $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
0,04	1,019	1,022	1,021	1,027	1,131
0,20	1,006	1,010	1,010	1,015	1,131
0,46	1,004	1,007	1,009	1,012	1,131
0,71	1,007	1,006	1,001	1,001	1,131
0,95	1,009	1,010	1,002	1,006	1,131
1,21	1,001	1,006	1,007	1,001	1,131
1,45	1,010	1,018	1,000	1,014	1,131
1,90	1,034	1,050	1,021	1,046	1,131
2,43	1,041	1,014	1,055	1,018	1,136
2,92	1,060	1,024	1,076	1,028	1,136
3,90	1,097	1,043	1,117	1,047	1,136
4,73	1,107	1,042	1,130	1,045	1,137

Tabla G-10: Test de comparación de volatilidades empíricas para cada plazo promedio con volatilidades de los modelos para Oro. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.

Plazos Promedio Semanales	Vol. empírica - EV C&C-D analítica	Vol. empírica - EV C&S analítica	Vol. empírica - EV C&C-D curvas	Vol. empírica - EV C&S curvas	Valor crítico $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
0,04	1,114	1,111	1,044	1,032	1,455
0,23	1,141	1,136	1,011	1,006	1,455
0,37	1,171	1,167	1,014	1,016	1,455
0,70	1,179	1,177	1,036	1,032	1,455
0,87	1,183	1,184	1,040	1,035	1,455
1,20	1,178	1,183	1,048	1,041	1,455
1,37	1,182	1,192	1,053	1,047	1,455
1,95	1,469	1,492	1,326	1,323	1,455
2,34	1,535	1,575	1,393	1,395	1,455
2,83	1,524	1,577	1,392	1,402	1,455
3,84	1,493	1,570	1,382	1,405	1,455
4,68	1,039	1,104	1,030	1,008	1,455

Tabla G-11: Test de comparación de volatilidades empíricas para cada plazo promedio con volatilidades de los modelos para Petróleo. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

Plazos Promedio Semanales	Vol. empírica - EV C&C-D analítica	Vol. empírica - EV C&S analítica	Vol. empírica - EV C&C-D curvas	Vol. empírica - EV C&S curvas	Valor crítico $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
0,04	1,053	1,105	1,181	1,100	1,131
0,20	1,167	1,019	1,060	1,022	1,131
0,45	1,129	1,023	1,057	1,024	1,131
0,70	1,045	1,045	1,010	1,050	1,131
0,95	1,024	1,045	1,032	1,054	1,131
1,20	1,081	1,021	1,069	1,034	1,131
1,45	1,129	1,025	1,103	1,010	1,131
1,95	1,042	1,396	1,009	1,374	1,146
2,43	1,239	1,536	1,198	1,511	1,146
2,83	1,441	1,658	1,394	1,632	1,146
5,00	4,946	1,560	4,811	1,539	1,199
6,00	8,032	1,554	7,822	1,534	1,199
6,74	10,748	1,616	10,476	1,595	1,319

Tabla G-12: Test de comparación de volatilidades empíricas para cada plazo promedio con volatilidades de los modelos para Petróleo. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.

Plazos Promedio Semanales	Vol. empírica - EV C&C-Danalítica	Vol. empírica - EV C&S analítica	Vol. empírica - EV C&C-D curvas	Vol. empírica - EV C&S curvas	Valor crítico $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
0,03	1,095	1,043	1,008	1,012	1,455
0,20	1,092	1,252	1,020	1,043	1,455
0,45	1,338	1,545	1,001	1,030	1,455
0,70	1,551	1,694	1,043	1,007	1,455
0,95	1,739	1,773	1,065	1,001	1,455
1,20	1,901	1,796	1,063	1,005	1,455
1,45	2,033	1,757	1,044	1,006	1,455
1,95	2,248	1,545	1,022	1,024	1,455
2,28	2,804	1,474	1,188	1,028	1,455
2,67	3,477	1,456	1,472	1,104	1,455
4,94	8,721	1,130	3,980	1,060	1,455
5,94	13,924	1,115	6,532	1,076	1,455
6,75	22,414	1,291	11,258	1,259	1,642

Tabla G-13: Test de comparación de volatilidades empíricas para cada plazo promedio con volatilidades de los modelos para Cobre. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

Plazos Promedio Semanales	Vol. empírica - EV C&C-Danalítica	Vol. empírica - EV C&S analítica	Vol. empírica - EV C&C-D curvas	Vol. empírica - EV C&S curvas	Valor crítico $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
0,04	1,009	1,007	1,018	1,008	1,131
0,20	1,058	1,051	1,065	1,054	1,131
0,45	1,030	1,008	1,036	1,002	1,131
0,70	1,002	1,038	1,002	1,019	1,131
0,95	1,035	1,053	1,032	1,025	1,131
1,20	1,018	1,028	1,015	1,007	1,131
1,45	1,008	1,015	1,012	1,026	1,131
1,95	1,347	1,212	1,352	1,269	1,248

Tabla G-14: Test de comparación de volatilidades empíricas para cada plazo promedio con volatilidades de los modelos para Cobre. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.

Plazos Promedio Semanales	Vol. empírica - EV C&C-Danalítica	Vol. empírica - EV C&S analítica	Vol. empírica - EV C&C-D curvas	Vol. empírica - EV C&S curvas	Valor crítico $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
0,04	1,566	1,563	1,018	1,038	1,455
0,20	1,838	1,826	1,021	1,039	1,455
0,45	1,970	1,897	1,063	1,010	1,455
0,71	2,041	1,970	1,143	1,064	1,455
0,96	2,147	2,110	1,169	1,091	1,455
1,21	2,344	2,322	1,120	1,076	1,455
1,45	2,596	2,537	1,041	1,048	1,455
1,86	3,453	3,106	1,220	1,095	1,455

Tabla G-15: Test de comparación de volatilidades calculadas de forma analítica y a través de las curvas de ambos modelos para Oro. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

Plazos Promedio Semanales	EV C&C-D analítica - EV C&C-D curvas	EV C&C-D analítica - EV C&S analítica	EV C&C-D curvas - EV C&S curvas	EV C&S analítica - EV C&S curvas	Valor crítico $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
0,04	1,003	1,003	1,005	1,005	1,131
0,20	1,004	1,004	1,005	1,005	1,131
0,46	1,005	1,003	1,003	1,005	1,131
0,71	1,006	1,002	1,000	1,005	1,131
0,95	1,008	1,001	1,004	1,005	1,131
1,21	1,009	1,004	1,009	1,004	1,131
1,45	1,010	1,008	1,014	1,004	1,131
1,90	1,012	1,016	1,024	1,004	1,131
2,43	1,014	1,026	1,036	1,004	1,136
2,92	1,016	1,035	1,047	1,004	1,136
3,90	1,019	1,051	1,067	1,004	1,136
4,73	1,021	1,062	1,081	1,003	1,137

Tabla G-16: Test de comparación de volatilidades calculadas de forma analítica y a través de las curvas de ambos modelos para Oro. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.

Plazos Promedio Semanales	EV C&C-D analítica - EV C&C-D curvas	EV C&C-D analítica - EV C&S analítica	EV C&C-D curvas - EV C&S curvas	EV C&S analítica - EV C&S curvas	Valor crítico $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
0,04	1,163	1,003	1,011	1,146	1,455
0,23	1,154	1,004	1,005	1,143	1,455
0,37	1,155	1,003	1,002	1,149	1,455
0,70	1,139	1,002	1,004	1,141	1,455
0,87	1,137	1,001	1,005	1,144	1,455
1,20	1,125	1,004	1,006	1,136	1,455
1,37	1,123	1,008	1,006	1,138	1,455
1,95	1,108	1,016	1,002	1,128	1,455
2,34	1,103	1,026	1,002	1,129	1,455
2,83	1,094	1,035	1,007	1,125	1,455
3,84	1,081	1,051	1,017	1,117	1,455
4,68	1,071	1,062	1,023	1,112	1,455

Tabla G-17: Test de comparación de volatilidades calculadas de forma analítica y a través de las curvas de ambos modelos para Petróleo. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

Plazos Promedio Semanales	EV C&C-D analítica - EV C&C-D curvas	EV C&C-D analítica - EV C&S analítica	EV C&C-D curvas - EV C&S curvas	EV C&S analítica - EV C&S curvas	Valor crítico $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
0,04	1,122	1,049	1,073	1,004	1,131
0,20	1,102	1,146	1,037	1,003	1,131
0,45	1,068	1,155	1,082	1,001	1,131
0,70	1,035	1,092	1,061	1,005	1,131
0,95	1,008	1,020	1,021	1,009	1,131
1,20	1,011	1,058	1,034	1,012	1,131
1,45	1,023	1,157	1,115	1,014	1,131
1,95	1,033	1,455	1,386	1,016	1,146
2,43	1,034	1,902	1,810	1,016	1,146
2,83	1,033	2,388	2,275	1,016	1,146
5,00	1,028	7,715	7,403	1,014	1,199
6,00	1,027	12,483	11,998	1,013	1,199
6,74	1,026	17,368	16,709	1,013	1,319

Tabla G-18: Test de comparación de volatilidades calculadas de forma analítica y a través de las curvas de ambos modelos para Petróleo. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.

Plazos Promedio Semanales	EV C&C-D analítica - EV C&C-D curvas	EV C&C-D analítica - EV C&S analítica	EV C&C-D curvas - EV C&S curvas	EV C&S analítica - EV C&S curvas	Valor crítico $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
0,03	1,086	1,049	1,020	1,056	1,455
0,20	1,071	1,146	1,022	1,200	1,455
0,45	1,340	1,155	1,031	1,501	1,455
0,70	1,617	1,092	1,050	1,683	1,455
0,95	1,853	1,020	1,066	1,771	1,455
1,20	2,021	1,058	1,069	1,787	1,455
1,45	2,122	1,157	1,050	1,747	1,455
1,95	2,200	1,455	1,046	1,582	1,455
2,28	2,360	1,902	1,156	1,434	1,455
2,67	2,362	2,388	1,333	1,318	1,455
4,94	2,191	7,715	3,754	1,066	1,455
5,94	2,132	12,483	6,071	1,037	1,455
6,75	1,991	17,368	8,945	1,025	1,642

Tabla G-19: Test de comparación de volatilidades calculadas de forma analítica y a través de las curvas de ambos modelos para Cobre. Utilizando los parámetros calibrados con datos dentro de la muestra.

Plazos Promedio Semanales	EV C&C-D analítica - EV C&C-D curvas	EV C&C-D analítica - EV C&S analítica	EV C&C-D curvas - EV C&S curvas	EV C&S analítica - EV C&S curvas	Valor crítico $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
0,04	1,009	1,002	1,010	1,001	1,131
0,20	1,007	1,006	1,011	1,003	1,131
0,45	1,005	1,039	1,034	1,010	1,131
0,70	1,004	1,036	1,021	1,019	1,131
0,95	1,003	1,017	1,007	1,028	1,131
1,20	1,003	1,010	1,022	1,035	1,131
1,45	1,003	1,023	1,014	1,041	1,131
1,95	1,004	1,112	1,065	1,048	1,248

Tabla G-20: Test de comparación de volatilidades calculadas de forma analítica y a través de las curvas de ambos modelos para Cobre. Utilizando los parámetros calibrados con datos fuera de la muestra.

Plazos Promedio Semanales	EV C&C-D analítica - EV C&C-D curvas	EV C&C-D analítica - EV C&S analítica	EV C&C-D curvas - EV C&S curvas	EV C&S analítica - EV C&S curvas	Valor crítico $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
0,04	1,595	1,002	1,019	1,623	1,455
0,20	1,800	1,006	1,018	1,758	1,455
0,45	2,094	1,039	1,053	1,915	1,455
0,71	2,333	1,036	1,075	2,096	1,455
0,96	2,509	1,017	1,071	2,302	1,455
1,21	2,626	1,010	1,041	2,498	1,455
1,45	2,701	1,023	1,007	2,659	1,455
1,86	2,831	1,112	1,114	2,838	1,455

ANEXO H: BENEFICIOS DE ESTIMACIÓN CONJUNTA EN EVALUACIÓN DE PROYECTOS

Una de las ventajas que posee la estimación conjunta se refiere a la mayor confiabilidad que posee en la evaluación de proyectos respecto a la evaluación llevada a cabo por medio de la estimación individual, especialmente para los flujos correspondientes a plazos superiores a los de los datos utilizados en la calibración de los modelos. Para probar esto se evaluará un proyecto de extracción de Petróleo Brent, en el cual los flujos se realizan en los vencimientos de los contratos futuros, de tal forma de comparar un proyecto evaluado utilizando los contratos futuros realmente transados, con proyectos evaluados considerando contratos futuros extraídos de los modelos estimados de forma conjunta e individual. Se consideró como duración del proyecto al máximo plazo de los contratos transados y se utilizó el panel de datos que no consideraba los contratos futuros mayores a 3.5 años en la estimación de las variables de estado del modelo. Se hizo de esta manera justamente para probar que para plazos superiores a los utilizados en la calibración de parámetros y variables de estado, la modelación conjunta logra valores más cercanos a los reales.

El proyecto será evaluado para el día 01 de Marzo de 2005. Los ingresos del proyecto estarán dados por la extracción de barriles de petróleo Brent. La cantidad de barriles vendidos y los costos, serán fijos e iguales para todos los periodos³⁰. No se considerará ningún tipo de impuesto ni depreciación.

A continuación se presenta una tabla con la cantidad producida y los costos considerados para cada periodo:

Producción (bbl)	10000
Costos (US\$)	100000

³⁰ Las cantidades extraídas y costos son totalmente ficticias, ya que para efectos de lo que se quiere demostrar este punto no es relevante.

Considerando una tasa de descuento de un 10% constante para todos los periodos, se obtiene el siguiente valor del proyecto evaluado con los contratos futuros transados:

	US\$
VAN Futuros Transados	11447594

El valor del proyecto evaluado a través de los contratos futuros extraídos de la estimación individual es:

	US\$
VAN Estimación Individual	11402904

El valor del proyecto evaluado a través de los contratos futuros extraídos de la estimación conjunta es:

	US\$
VAN Estimación Conjunta	11445675

Luego, si consideramos que el valor de proyecto de referencia es el entregado por la valorización a través de los contratos transados en el mercado, tenemos que la evaluación por medio de los futuros dados por la estimación conjunta es más cercana al valor de referencia que la evaluación entregada por los futuros estimados individualmente.